

UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

GEORGE LUCAS DINIZ ALENCAR

PROBLEMA DE ERDŐS-ROTHSCHILD EM CERTOS PADRÕES DE COLORAÇÃO DE GRAFOS CONEXOS

FORTALEZA

2025

GEORGE LUCAS DINIZ ALENCAR

PROBLEMA DE ERDŐS-ROTHSCHILD EM CERTOS PADRÕES DE COLORAÇÃO DE GRAFOS CONEXOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

A353p Alencar, George Lucas Diniz.
Problema de Erdos-Rothschild em certos padrões de coloração de grafos conexos / George Lucas Diniz Alencar. – 2025.
85 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

1. Teoria dos grafos. 2. Combinatória extremal. 3. Coloração de arestas. 4. Contagem. I. Título.
CDD 510

GEORGE LUCAS DINIZ ALENCAR

PROBLEMA DE ERDŐS-ROTHSCHILD EM CERTOS PADRÕES DE COLORAÇÃO DE GRAFOS CONEXOS

Dissertação apresentada ao Curso de Mestrado Acadêmico em Matemática do Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Aprovada em: 28/03/2025

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Walner Mendonça dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Antônio Josefran de Oliveira Bastos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Dedico este trabalho à minha família, aos meus amigos e a todos os amantes curiosos da Matemática.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Patrícia Sobreira Diniz, e à minha avó, Raimunda Sobreira Diniz, que, nesses dois anos, me apoiaram nesta jornada de estudos com muito amor e compreensão.

Ao meu pai, Abelardo de Carvalho Alencar, que tem me incentivado a ir cada vez mais longe e me faz acreditar no meu potencial.

À minha noiva e futura esposa, Monalisa Dutra Barbosa, que tem estado ao meu lado, dando-me todo o apoio emocional de que preciso diariamente, e com quem agora estou um passo mais próximo de concretizar nossos sonhos.

Ao meu orientador, Fabrício Siqueira Benevides, que tem dedicado parte de seu tempo para me ajudar a escrever esta dissertação e me apresentar às incríveis ideias envolvidas nos problemas em questão, despertando ainda mais minha curiosidade e fascínio.

Ao meu antigo orientador de Iniciação Científica, Nicolau Corção Saldanha, que despertou em mim uma paixão pela combinatória em pesquisas.

Aos demais membros da banca examinadora, Walner Mendonça dos Santos e Antônio Josefran de Oliveira Bastos, por dedicarem uma parte valiosa de seu tempo à defesa da minha dissertação.

Aos professores que tive a oportunidade de conhecer durante minha jornada e que compartilharam comigo grandes conhecimentos durante as aulas — alguns até mesmo além delas —, além de serem extremamente pacientes comigo.

À Comissão de Bolsa e à Coordenação do Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal do Ceará por me ajudarem em diversas questões burocráticas e por tornarem meu mestrado ainda mais leve.

Aos professores, coordenadores e diretores do Colégio Farias Brito, que, desde a minha entrada no Ensino Médio, me incentivaram a seguir o caminho olímpico, oferecendo todo o suporte de que precisei e que contribuiu para este momento.

Aos meus amigos, que, nos momentos livres, conversavam comigo sobre assuntos completamente aleatórios e com quem compartilhei diversas partidas de jogos de tabuleiro, permitindo-me relaxar, desligar a mente e dar boas gargalhadas.

À FUNCAP, pelo auxílio prestado, que foi de enorme ajuda.

“Eu prefiro ser essa metamorfose ambulante do que ter aquela velha opinião formada sobre tudo.”

(Raul Seixas)

RESUMO

Um padrão $\hat{F}$ é um grafo com uma pré-coloração de arestas. Se G é um grafo, então uma coloração de arestas de G evita $\hat{F}$ se G não possuir um subgrafo isomorfo a F (considerando também um isomorfismo das cores). Nesta dissertação, mencionaremos alguns resultados conhecidos, como: (i) Se $\hat{F}$ é o padrão de um grafo completo, então, para qualquer inteiro positivo n, um dos grafos de n vértices que maximiza o número de colorações evitando $\hat{F}$ é multipartido completo; (ii) Se $\hat{F}$ é um padrão de um grafo completo com $k+1$ vértices e é monocromático e $r = 2$ ou 3, então, para qualquer inteiro positivo n suficientemente grande, o grafo que maximiza a quantidade de r-colorações evitando $\hat{F}$ é o grafo de Turán com n vértices e k partes; (iii) Se $\hat{F}$ for uma estrela monocromática com $t+1$ vértices, então, para todo G com n vértices, o número de r-colorações de G que evita $\hat{F}$ é, no máximo, $\left(\frac{(r(t-1))!}{(t-1)!^r}\right)^{\frac{n}{2}}$. As contribuições deste trabalho são: (iv) Se $\hat{F}$ é um padrão de um grafo completo com pelo menos 700 vértices e no máximo 5 cores, então, para todo r suficientemente grande, temos que o grafo de n vértices que maximiza o número de r-colorações evitando $\hat{F}$ não é o grafo de Turán com n vértices e k partes; (v) Sendo $\hat{F}$ uma estrela monocromática com $t+1$ vértices, existe um grafo G com n vértices tal que o número de r-colorações de G que evita $\hat{F}$ é, pelo menos, $f(r)^{\frac{n(t-1)}{2}}$, onde $f(r) \sim 2\pi r \left(\frac{r}{e^2}\right)^r$.

Palavras-chave: teoria dos grafos; combinatória extremal; coloração de arestas; contagem.

ABSTRACT

A pattern $\hat{F}$ is a graph with a precoloring of its edges. If G is a graph, then an edge-coloring of G avoids $\hat{F}$ if G does not contain a subgraph isomorphic to F (considering also a color-preserving isomorphism). In this dissertation, we mention some known results, such as: (i) If $\hat{F}$ is the pattern of a complete graph, then for any positive integer n, one of the n-vertex graphs that maximizes the number of colorings avoiding $\hat{F}$ is a complete multipartite graph; (ii) If $\hat{F}$ is the pattern of a monochromatic complete graph with $k+1$ vertices and $r=2$ or 3, then for any sufficiently large positive integer n, the graph that maximizes the number of r-colorings avoiding $\hat{F}$ is the Turán graph with n vertices and k parts; (iii) If $\hat{F}$ is a monochromatic star with $t+1$ vertices, then for any graph G with n vertices, the number of r-colorings of G that avoid $\hat{F}$ is at most $\left(\frac{(r(t-1))!}{(t-1)!^r}\right)^{\frac{n}{2}}$. The contributions of this work are: (iv) If $\hat{F}$ is the pattern of a complete graph with at least 700 vertices and at most 5 colors, then for all sufficiently large r, the n-vertex graph that maximizes the number of r-colorings avoiding $\hat{F}$ is not the Turán graph with n vertices and k parts; (v) Letting $\hat{F}$ be a monochromatic star with $t+1$ vertices, there exists a graph G with n vertices such that the number of r-colorings of G that avoid $\hat{F}$ is at least $f(r)^{\frac{n(t-1)}{2}}$, where $f(r) \sim 2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r$.

Keywords: graph theory; extremal combinatorics; edge-coloring; counting.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Padrões de colorações, (F_1, C_1) e (F_2, C_2), para os quais a unicidade do grafo extremal não foi demonstrada 40
Figura 2 – Coloração extremal para o problema de Erdős-Rothschild com $r = 4$ e $k = 2$ 42
Figura 3 – Exemplo de padrão completo com 6 cores onde cada cor é incidente a metade dos vértices 79

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	10
2	**PRÉ-REQUISITOS**	12
2.1	**Definições iniciais em grafos**	12
2.2	**Grafos extremais**	16
2.3	**Árvores**	21
2.4	**Emparelhamentos**	24
2.5	**Regularidade**	29
2.6	**Números de Ramsey**	31
3	**ALGUNS RESULTADOS RECENTES DA ÁREA**	35
3.1	**Padrões de grafos**	35
3.2	**Padrões completos**	37
3.3	**Padrões completos monocromáticos**	41
3.4	**Uma variação do problema de padrões completos monocromáticos**	53
3.5	**Padrões monocromáticos conexos com número de Turán linear**	59
4	**CONTRIBUIÇÕES**	74
4.1	**Padrões completos grandes com até 5 cores**	74
4.2	**Uma nova cota inferior para $c_{r,S_k}(n)$**	79
5	**CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS**	83
	REFERÊNCIAS	85

1 INTRODUÇÃO

Nesta dissertação, falaremos sobre adaptações e generalizações da conjectura proposta por Erdős em (Erdös, 1992), que é a seguinte:

Conjectura 1.1. *Se G é um grafo com n vértices rotulados, denote por $f(G)$ o número de maneiras de colorir as arestas de G com 2 cores, sem que haja um triângulo monocromático como subgrafo. Então*

$$f(G) \leq 2^{\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$$

para todo n suficientemente grande, com igualdade ocorrendo para o grafo de Turán $T_{n,2}$.

Tal conjectura foi provada por Yuster em 1996. Em seguida, ele, juntamente com Erdős e Rothschild, conjecturaram que o número de maneiras de colorir as arestas de um grafo com n vértices com 2 cores, evitando um K_k, onde $k \geq 3$, monocromático, é, no máximo, $2^{t_{n,k-1}}$, onde $t_{n,k-1}$ é o número de arestas do grafo de Turán com n vértices e $k-1$ batatas, para todo n grande. A partir daí, várias generalizações e adaptações foram propostas e discutidas. Mais especificamente, dado um "grafo colorido", vamos discutir aqui quais são os grafos de n vértices que maximizam o número de colorações nas arestas, evitando um subgrafo colorido isomorfo ao dado (a tais "grafos coloridos"daremos o nome de *padrão*). Intitulamos todos esses problemas como *Variações do problema de Erdős-Rothschild.*

Majoritariamente, esta dissertação se divide em duas partes. A primeira parte consiste em trabalhar com padrões que são colorações de grafos completos, enquanto a segunda parte se preocupa com padrões de colorações de grafos que possuem número de Turán linear.

Apesar de ambas as partes tratarem de problemas extremais de coloração de arestas, as técnicas usadas em cada uma são um tanto diferentes. Na primeira parte, usaremos majoritariamente resultados de regularidade e estabilidade, uma vez que trabalharemos com grafos com muitas arestas (na ordem de n^2 arestas), enquanto que na segunda parte iremos trabalhar com grafos de $O(n)$ arestas e usaremos majoritariamente resultados obtidos com o método probabilístico.

Foram também exibidas duas contribuições: Uma delas demonstra que se um padrão $\hat{F}$ for completo com pelo menos 700 vértices e no máximo 5 cores, então para todo r suficientemente grande, existe um grafo de n vértices com mais de $r^{t_{n,k-1}}$ r-colorações que evitam $\hat{F}$. O outro resultado demonstra que sendo $\hat{F}$ uma estrela monocromática com $t+1$ vértices, existe

um grafo G com n vértices tal que o número de r-colorações de G que evita $\hat{F}$ é, pelo menos, $f(r)^{\frac{n(t-1)}{2}}$, onde $f(r) \sim 2\pi r \left(\frac{r}{e^2}\right)^r$.

2 PRÉ-REQUISITOS

2.1 Definições iniciais em grafos

Como base para os pré-requisitos, utilizamos (Lint; Wilson, 2001), (Botler *et al.*, 2001) e (West *et al.*, 2001). Pelo conflito de notações entre os livros, algumas notações foram alteradas, e estaremos definindo-as e utilizando-as abaixo.

Definição 2.1. Definimos um grafo (simples e finito) G como um par (V,E), onde V é um conjunto finito cujos elementos são chamados vértices de G e E é um subconjunto de $\binom{V}{2}$ cujos elementos são chamados arestas de G. Denotaremos tais conjuntos por $V(G)$ e $E(G)$, respectivamente.

Observação 1. Dado um conjunto S e um inteiro não-negativo k, $\binom{S}{k}$ é a família de todos os subconjuntos de S com k elementos.

Definição 2.2. Seja G um grafo, $v,v' \in V(G)$ e $e \in E(G)$. Dizemos que e é *incidente* a v se $v \in e$. Dizemos que v e v' são *adjacentes* se $\{v,v'\} \in E(G)$. A *vizinhança* de v é o conjunto $N_G(v) = \{u \in V(G) : \{u,v\} \in E(G)\}$ e seu *grau* é dado por $deg(v) = |N_G(v)|$.
Definimos também $\delta(G) = \min\limits_{v \in V(G)} deg(v)$ e $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V(G)} deg(v)$.

Observação 2. Se X é um conjunto finito, denotamos por $|X|$ a quantidade de elementos de X.

Lema 2.3. *Se G é um grafo, então*

$$\sum_{v \in V(G)} deg(v) = 2|E(G)|$$

Demonstração. Vamos contar a quantidade de pares $(v,e) \in V(G) \times E(G)$ tais que $v \in e$.

Por um lado, para cada $v \in V(G)$, existem $deg(v)$ arestas incidentes a v, e assim tal quantidade de pares é $\sum\limits_{v \in V(G)} deg(v)$.

Por outro lado, cada $e \in E(G)$ é incidente a 2 vértices de G, e assim tal quantidade de pares é $\sum\limits_{e \in E(G)} 2 = 2|E(G)|$. □

Definição 2.4. Dizemos que dois grafos, G e H, são isomorfos se existe uma bijeção $\phi : V(G) \to V(H)$ tal que $\{u,v\} \in E(G)$ se, e somente se, $\{\phi(u),\phi(v)\} \in E(H)$. Neste caso, escrevemos $G \cong H$.

Definição 2.5. Dizemos que um grafo H é subgrafo de um grafo G se $V(H) \subset V(G)$ e $E(H) \subset E(G) \cap \binom{V(H)}{2}$.

Dizemos que H é subgrafo gerador de G se $V(H) = V(G)$.

Definição 2.6. Dizemos que um grafo G é

- nulo, se $V(G) = \emptyset$;
- vazio, se $E(G) = \emptyset$;
- completo, se $E(G) = \binom{V(G)}{2}$;
- k-regular, se $deg(v) = k \ \forall v \in V(G)$.

Definição 2.7. Seja G um grafo e sejam $X \subset V(G)$, $Y \subset E(G)$. O *subgrafo induzido* por X é o grafo $G[X]$ dado por $V(G[X]) = X$ e $E(G[X]) = E(G) \cap \binom{X}{2}$. O *subgrafo induzido* por Y é o grafo $G[Y]$ dado por $V(G[Y]) = \bigcup_{y \in Y} y$ e $E(G[Y]) = Y$.

Dizemos ainda que X é *clique* se $G[X]$ é completo, e que X é *independente* se $G[X]$ é vazio.

Definimos ainda o grafo $G - X$ como $G[V(G) \setminus X]$ e o grafo $G - Y$ como o subgrafo gerador de G com $E[G - Y] = E(G) \setminus Y$. Por fim, se $Z \subset \binom{V(G)}{2}$, definimos o grafo $G \cup Z$ por $V(G \cup Z) = V(G)$ e $E(G \cup Z) = E(G) \cup Z$.

Definição 2.8. Um *passeio* em um grafo G é uma sequência $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$, onde k é um inteiro positivo, $v_i \in V(G) \ \forall i \in [k]$ e $\{v_j, v_{j+1}\} \in E(G) \ \forall j \in [k-1]$. Dizemos que tal passeio tem tamanho (ou comprimento) $k-1$.

Uma *trilha* é um passeio $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $\{v_i, v_{i+1}\} \neq \{v_j, v_{j+1}\} \ \forall 1 \leq i < j \leq k-1$. Dizemos que tal trilha tem tamanho (ou comprimento) $k-1$.

Um *caminho* é um passeio $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ tal que $v_i \neq v_j \ \forall 1 \leq i < j \leq k$. Dizemos que tal caminho tem tamanho (ou comprimento) $k-1$.

Um *ciclo* em um grafo G é uma sequência $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$, onde $k \geq 2$ é um inteiro, tal que $v_0 = v_k$, $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ é um caminho em G e $\{v_1, v_k\} \in E(G)$. Dizemos que tal ciclo tem tamanho (ou comprimento) k.

Definição 2.9. Sejam $u, v \in V(G)$. Dizemos que existe um caminho (respectivamente passeio) de u para v se existe caminho (respectivamente passeio) $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ com $v_1 = u$ e $v_k = v$. Chamaremos tal de u,v-caminho (respectivamente u,v-passeio).

Observação 3. Para n inteiro positivo, $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $[0] = \emptyset$.

Lema 2.10. *Seja G um grafo e sejam $u,v \in V(G)$. Se existe um u,v-passeio, então existe um u,v-caminho.*

Demonstração. Considere um u,v-passeio de tamanho mínimo k. Seja $(v_0,v_1,\ldots,v_k)$ tal passeio. Se existe $0 \leq i < j \leq k$ com $v_i = v_j$, então $(v_0,v_1,\ldots,v_i,v_{j+1},\ldots,v_k)$ é um u,v-passeio de tamanho $k-(j-i) < k$, uma contradição. Logo, tal passeio mínimo é, de fato, um caminho. □

Note que a relação de existir caminho é uma relação de equivalência em $V(G)$. Com efeito, a reflexividade e simetria são imediatas, já para a transitividade sejam $u,v,w \in V(G)$ temos que: Se existe um caminho $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ de u para v e existe um caminho $(y_1,y_2,\ldots,y_l)$ de v para w, então $(x_1,x_2,\ldots,x_k,y_1,y_2,\ldots,y_l)$ é um passeio de u para w. Assim, pelo lema 2.10, existe um caminho de u para w.

Definição 2.11. Seja G um grafo e sejam $X_1,X_2,\ldots,X_k$ as classes de equivalência de $V(G)$ pela relação acima. Chamamos então $G[X_1],G[X_2],\ldots,G[X_k]$ as componentes conexas de G.

Se $v \in X_i$, chamamos $G[X_i]$ a componente conexa de v em G.

Se $k = 1$, dizemos que G é conexo.

Note que isso nos diz que $G[X_i]$ é um subgrafo conexo maximal de G $\forall i \in [k]$, o que nos dá que, se $1 \leq i < j \leq k$, $v_i \in X_i$ e $v_j \in X_j$, então $\{v_i,v_j\} \notin E(G)$.

Definição 2.12. Para $n \geq 3$ inteiro, defina os grafos K_n, C_n, P_{n-1} e S_{n-1} como $V(K_n) = V(C_n) = V(P_{n-1}) = V(S_{n-1}) = [n]$, $E(K_n) = \binom{[n]}{2}$, $E(P_{n-1}) = \{\{i,i+1\} : i \in [n-1]\}$, $E(C_n) = \{\{i,i+1\} : i \in [n-1]\} \cup \{\{1,n\}\}$ e $E(S_{n-1}) = \{\{1,i\} : i \in [n] \setminus \{1\}\}$.

Defina ainda os grafos completos $K_1 = P_0$ e $K_2 = P_1 = S_1$ dados por $V(K_1) = V(P_0) = [1]$ e $V(K_2) = V(P_1) = V(S_1) = [2]$.

Definição 2.13. Seja G um grafo não-nulo. Então

• Definimos $\omega(G)$ como o maior inteiro positivo p tal que G possui um subgrafo isomorfo a K_p;

• Definimos $\alpha(G)$ como a quantidade de elementos do maior subconjunto independente de $V(G)$;

• Se G possui um subgrafo isomorfo a C_r para algum $r \geq 3$ inteiro, então definimos $girth(G)$ como o menor r com tal propriedade.

Definição 2.14. Seja G um grafo conexo, defina $d_G : V(G) \times V(G) \to \mathbb{Z}$ como a função onde $d_G(u,v)$, chamada de distância de u para v, é o tamanho do menor u,v-caminho, $\forall u,v \in V(G)$.

Defina ainda o diâmetro de G por $\text{diam}(G) = \max\{d_G(u,v) : u,v \in V(G)\}$.

Note que a função d_G é uma métrica definida em $V(G)$.

Definição 2.15. Se G é um grafo e r um inteiro positivo, então:

• Uma r-coloração de $V(G)$ é uma função $c : V(G) \to [r]$. Tal r-coloração é dita própria se não existem $u,v \in V(G)$ tal que $\{u,v\} \in E(G)$ e $c(u) = c(v)$.

• Uma r-coloração de $E(G)$ é uma função $C : E(G) \to [r]$. Tal r-coloração é dita própria se não existem $e,f \in E(G)$ distintos tais que $e \cap f \neq \emptyset$ e $C(e) = C(f)$.

Definimos ainda $\chi(G)$ e $\chi'(G)$ como os menores inteiros positivos r_1 e r_2, respectivamente, tais que existe uma r_1-coloração própria de $V(G)$ e existe uma r_2-coloração própria de $E(G)$.

Note que se c é uma r-coloração própria de $V(G)$, então $c^{-1}(i) = \{v \in V(G) : c(v) = i\}$ é um conjunto independente para todo $i \in [r]$.

Definição 2.16. Seja k um inteiro positivo. Dizemos que um grafo G é *k-partido* se $\chi(G) \leq k$.

Dizemos também que G é *multipartido completo* se existe um inteiro positivo r e uma r-coloração $c : V(G) \to [r]$ com $c^{-1}(i) \neq \emptyset$, $\forall i \in [r]$ tal que $\{u,v\} \in E(G)$ se, e somente se, $c(u) \neq c(v)$. Caso desejemos explicitar r, diremos que G é r-partido completo. Chamamos os conjuntos $X_i = c^{-1}(i), i \in [r]$, de batatas de G. Assim, $V(G) = \bigcup_{i \in [r]} X_i$ é uma partição de $V(G)$ em batatas.

Lema 2.17. *Se G é um grafo multipartido completo, então existe uma única partição de $V(G)$ em batatas.*

Demonstração. Sejam $V(G) = \bigcup_{i \in [r]} X_i = \bigcup_{j \in [r']} Y_j$ partições de $V(G)$ em batatas com $r' \leq r$. Seja $v_i \in X_i \; \forall i \in [r]$, então $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é uma clique de G e, portanto, não há dois deles pertencentes ao mesmo Y_j, pois estes são independentes. Assim, segue que $r' \geq r$ e, portanto, $r = r'$ e ainda, sem perda de generalidade, $v_i \in Y_i$. Por fim, note que $X_i = Y_i = \{v_i\} \cup \{u \in V(G) : \{u, v_i\} \notin E(G)\} \; \forall i \in [r]$, provando assim a unicidade da partição em batatas. □

Definição 2.18. Sejam n,k inteiros positivos. O grafo de Turán $T_{n,k}$ é, para $n \geq k$, o grafo k-partido completo com $V(T_{n,k}) = [n]$ cujas batatas são

$$X_i = \{j \in [n] : j \equiv i \pmod{k}\}$$

para todo $i \in [k]$. Se $n < k$, então $T_{n,k} = K_n$. Definimos também $t_{n,k} = |E(T_{n,k})|$.

Note que, com isso, $|X_i| \in \{\lfloor \frac{n}{k} \rfloor, \lceil \frac{n}{k} \rceil\}\ \forall i \in [k]$. Além disso, se $n = kq + r$, com k, r inteiros não-negativos, $r < k$, então $t_{n,k} = \binom{n}{2} - (r\binom{q+1}{2} + (k-r)\binom{q}{2})$.

Definição 2.19. Sejam G e H dois grafos. Dizemos que G contém uma cópia de H se existe um subgrafo de G isomorfo a H.

Por exemplo, o grafo de Túran $T_{n,k}$ não contém cópias de K_{k+1}.

2.2 Grafos extremais

O primeiro teorema desta seção nos diz que o grafo com n vértices, sem cópias de K_{k+1}, que maximiza o número de arestas é, de fato, o grafo $T_{n,k}$.

Teorema 2.20 (Teorema de Turán)**.** *Sejam n, k inteiros positivos. Então, um grafo G com n vértices que não contém cópia de K_{k+1} possui, no máximo, $t_{n,k}$ arestas. Além disso, se tal grafo possui $t_{n,k}$ arestas, então $G \cong T_{n,k}$.*

Demonstração. Fixando k, provaremos isso por indução em n. Com efeito, se $n = 1, 2, \ldots, k$, o grafo completo não contém cópia de K_{k+1}, tem $t_{n,k} = \binom{n}{2}$ arestas e é o único que maximiza o número de arestas.

Seja agora $n \geq k+1$ e assuma que, se um grafo com n' vértices não contém K_{k+1}, então ele tem, no máximo, $t_{n',k}$ arestas, $\forall 1 \leq n' < n$. Seja G um grafo com n vértices que não contém K_{k+1} e seja máximo em arestas. Seja $e \in \binom{V(G)}{2} \setminus E(G)$, e seja $G' = G \cup \{e\}$. Então, pela maximalidade de G, teríamos que G' contém uma cópia de K_{k+1}. Seja então $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ um clique de G'. Assim, $e \in \binom{\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}}{2}$, pois $\{x_0, x_1, \ldots, x_k\}$ não é um clique em G. Sem perda de generalidade, seja $e = \{x_0, x_1\}$, então $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ é um clique em G. Sendo $G'' = G[V(G) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}]$, como G'' não contém cópia de K_{k+1}, segue, por hipótese de indução, que $|E(G'')| \leq t_{n-k,k}$. Além disso, cada $u \in V(G) \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, em G, é adjacente a, no máximo, $k-1$ elementos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, concluindo, portanto, que $|E(G)| \leq \binom{k}{2} + t_{n-k,k} + (k-1)(n-k) = t_{n,k}$. Vejamos agora os casos de igualdade:

Se $k+1 \leq n \leq 2k$, então, para termos a igualdade, devemos ter que cada elemento de $V(G'')$, em G, é adjacente a exatamente $k-1$ elementos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Defina então $\tau : V(G'') \to [k]$ tal que $\{v, x_{\tau(v)}\} \notin E(G)$, $\forall v \in V(G'')$, e assim, $E(G) \subset \binom{V(G)}{2} \setminus \{\{v, x_{\tau(v)}\} : v \in V(G'')\}$, nos dando $|E(G)| \leq \binom{n}{2} - (n-k) = t_{n,k}$. Daí, $E(G) = \binom{V(G)}{2} \setminus \{\{v, x_{\tau(v)}\} : v \in V(G'')\}$. Note que, com isso, τ é injetiva, pois se $\tau(v_1) = \tau(v_2)$ para distintos $v_1, v_2 \in V(G')$, então

$\{v_1, v_2\} \cup \{x_i : i \in [k] \setminus \{\tau(v_1)\}\}$ é um clique em G, uma contradição. Logo, G é um grafo k-partido completo com batatas Y_i $\forall i \in [k]$, onde

$$Y_i = \begin{cases} \{x_i, \tau^{-1}(i)\}, & \text{se } i \in \text{Im}(\tau), \\ \{x_i\}, & \text{se } i \notin \text{Im}(\tau). \end{cases}$$

Tal grafo é de fato isomorfo a $T_{n,k}$.

Se $n \geq 2k+1$, devemos ter, por hipótese, que $G'' \cong T_{n-k,k}$. Sejam então $X_1, X_2, \ldots, X_k$ as batatas de G''. Além disso, cada elemento de $V(G'')$, em G, é adjacente a exatamente $k-1$ elementos de $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Defina então $\tau : V(G'') \to [k]$ tal que $\{v, x_{\tau(v)}\} \notin E(G)$, $\forall v \in V(G'')$. Assim, fixando $j \in [k]$, se para todo $i \in [k]$ existisse um $y_i \in X_i$ tal que $\tau(y_i) \neq j$, então $\{x_j, y_1, y_2, \ldots, y_k\}$ seria um clique em G, uma contradição. Assim, existe $\sigma(j) \in [k]$ tal que $\tau(v) = j$ $\forall v \in X_{\sigma(j)}$. Como $\sigma : [k] \to [k]$ é uma injeção, pois as batatas de G'' são não-vazias, ela deve ser uma bijeção. Daí, para $v \in V(G)$, $\{v, x_j\} \notin E(G)$ se, e somente se, $v \in X_{\sigma(j)} \cup \{x_j\}$, concluindo, portanto, que G é um grafo k-partido completo com batatas $X_{\sigma(i)} \cup \{x_i\}$ $\forall i \in [k]$, e portanto, é isomorfo ao grafo de Turán $T_{n,k}$. □

Observação 4. $\text{Im}(\tau)$ denota o conjunto imagem da função τ.

Bem, o teorema acima nos diz que, se um grafo não contém cópia de K_{k+1}, ele tem no máximo $t_{n,k}$ vértices, cuja igualdade ocorre apenas no $T_{n,k}$ (a menos de isomorfismos). Agora, se quisermos um grafo com um pouco menos de $t_{n,k}$ arestas, mas ainda evitando K_{k+1}? O teorema seguinte nos diz que tais grafos são, de certa forma, bem próximos de um grafo k-partido! Iremos repetir abaixo uma demonstração bem elementar, mas brilhante, de Füredi (2015), que também pode ser encontrada em (Botler *et al.*, 2022).

Teorema 2.21. *Sejam n, k, t inteiros positivos. Seja G um grafo com n vértices, sem cópia de K_{k+1} e tal que $|E(G)| \geq t_{n,k} - t$. Então G contém um subgrafo gerador k-partido com pelo menos $|E(G)| - t$ arestas.*

Demonstração. A prova irá seguir por indução em k, sendo óbvio para $k = 1$, pois o único grafo de n vértices que evita K_2 é o grafo vazio. Agora, assuma o resultado válido para $k-1 \geq 1$ e seja G um grafo de n vértices que não contém cópia de K_{k+1} e $|E(G)| \geq t_{n,k} - t$.

Agora tome $u \in V(G)$ com $deg_G(u) = \Delta(G)$ e defina $G' = G[N_G(u)]$. Veja que G' não tem cópia de K_k, caso contrário, G teria cópia de K_{k+1}, uma vez que em u é adjacente a todos os vértices de

G' em G. Assim, aplicando a hipótese de indução: Se t' é tal que $|E(G')| = t_{\Delta(G),k-1} - t'$, então G' possui um subgrafo gerador $(k-1)$-partido H' com $|E(H')| \geq |E(G')| - t'$.

Finalmente, considere H um subgrafo gerador de G tal que

$$E(H) = E(H') \cup \{\{u,v\} \in E(G) : u \in N_G(u), v \in V(G) \setminus N_G(u)\}.$$

Note que H é k-partido. Mostremos que $|E(H)| \geq |E(G)| - t$.

Inicialmente, note que

$$|E(G)| = |E(G')| + |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| + |\{\{u,v\} \in E(G) : u \in N_G(u), v \in V(G) \setminus N_G(u)\}|$$

e que (por uma leve adaptação do lema 2.3)

$$\sum_{v \in V(G) \setminus N_G(u)} deg_G(v) = 2|E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| + |\{\{u,v\} \in E(G) : u \in N_G(u), v \in V(G) \setminus N_G(u)\}|.$$

Subtraindo as equações, obtemos:

$$\sum_{v \in V(G) \setminus N_G(u)} deg_G(v) - |E(G)| = |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| - |E(G')|$$

$$= |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| - t_{\Delta(G),k-1} + t'.$$

Agora, considerando que

$$\sum_{v \in V(G) \setminus N_G(u)} deg_G(v) - |E(G)| \leq \Delta(G)(n - \Delta(G)) - t_{n,k} + t$$

obtemos

$$\Delta(G)(n - \Delta(G)) - t_{n,k} + t \geq |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| - t_{\Delta(G),k-1} + t'.$$

Como temos que $t_{n,k} \geq t_{\Delta(G),k-1} + \Delta(G)(n - \Delta(G))$, então

$$t - t' \geq |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])|.$$

Portanto,

$$|E(H)| = |E(H')| + |\{\{u,v\} \in E(G) : u \in N_G(u), v \in V(G) \setminus N_G(u)\}| =$$

$$|E(H')| + |E(G)| - |E(G')| - |E(G[V(G) \setminus N_G(u)])| \geq |E(G)| - t' - (t - t') = |E(G)| - t.$$

□

Generalizando a ideia acima, podemos definir o seguinte:

Definição 2.22. Dado um inteiro positivo n e um grafo F, definimos $ex(n,F)$ como o maior inteiro positivo h tal que existe um grafo com n vértices e h arestas que não contém cópia de F.

Pelo teorema 2.20, temos que $ex(n,K_{k+1}) = t_{n,k}$.

Teorema 2.23. *Sejam n e t inteiros positivos com $n > t$. Então*

$$ex(n,S_{t+1}) = \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor.$$

Demonstração. Seja G um grafo com n vértices e sem cópia de S_{t+1}. Daí,

$$|E(G)| = \frac{1}{2} \sum_{v \in V(G)} deg(v) \leq \frac{nt}{2}$$

pois $deg(v) \leq t$ para todo $v \in V(G)$, concluindo então

$$ex(n,S_{t+1}) \leq \left\lfloor \frac{nt}{2} \right\rfloor.$$

- Se t é par:

  Tome o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $E(G) = \{\{v_i, v_{i+j}\} : 1 \leq i \leq n, 0 < |j| \leq \frac{t}{2}\}$, onde os índices são vistos módulo n. Assim, todos os vértices têm grau t e, portanto, o número de arestas é exatamente $\frac{nt}{2}$.

- Se t é ímpar e n é par:

  Tome o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $E(G) = \{\{v_i, v_{i+j}\} : 1 \leq i \leq n, 0 < |j| \leq \frac{t-1}{2}\} \cup \{\{v_i, v_{i+\frac{n}{2}}\} : 1 \leq i \leq \frac{n}{2}\}$, onde os índices são vistos módulo n. Assim, todos os vértices têm grau t e, portanto, o número de arestas é exatamente $\frac{nt}{2}$.

- Se t e n são ímpares:

  Tome o grafo G com $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ e $E(G) = \{\{v_i, v_{i+j}\} : 1 \leq i \leq n, 0 < |j| \leq \frac{t+1}{2}\} \setminus \{\{v_1, v_n\}, \{v_1, v_2\}, \{v_3, v_4\}, \{v_5, v_6\}, \ldots, \{v_{n-2}, v_{n-1}\}\}$, onde os índices são vistos módulo n. Assim, todos os vértices, exceto v_1, têm grau t, enquanto que $deg(v_1) = t - 1$ e, portanto, o número de arestas é exatamente $\frac{nt-1}{2}$.

□

Observação 5. Note que, se $n \leq t$, então obviamente $ex(n,S_{t+1}) = \binom{n}{2}$.

A seguir, citaremos e demonstraremos um teorema de Análise que nos dará uma ideia do comportamento de $ex(n,F)$ quando F é conexo. Além disso, esse lema será usado algumas vezes mais adiante.

Lema 2.24 (Lema de Fekete)**.** *Seja* $(a_n)_{n\geq 1}$ *uma sequência de reais que satisfaz*

$$a_{m+n} \geq a_m + a_n$$

então ou $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$ *ou existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Inicialmente, note que, por indução, prova-se que $a_n \geq na_1$, o que nos dá $\frac{a_n}{n} \geq a_1$ para todo inteiro positivo n. Portanto, $\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ é limitado inferiormente. Dividamos agora a prova em dois casos.

Caso 1: O conjunto $\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ é ilimitado.

Assim, para todo $M > 0$, existe n_0 tal que $a_{n_0} \geq Mn_0$. Assim, para todos $q, r \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq r \leq n_0$, temos que

$$a_{qn_0+r} \geq qa_{n_0} + a_r \geq qMn_0 + l,$$

onde $l = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$. Daí, para q suficientemente grande, temos $qMn_0 + l > 0$ e assim

$$\frac{a_{qn_0+r}}{qn_0+r} \geq \frac{qMn_0+l}{qn_0+n_0} = M + \frac{l-n_0M}{qn_0+n_0}.$$

Daí, para q suficientemente grande, temos $\frac{l-n_0M}{qn_0+n_0} > -1$ e assim $\frac{a_{qn_0+r}}{qn_0+r} \geq M-1$, e portanto $\frac{a_n}{n} \geq M-1$ para n suficientemente grande.

Logo, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \infty$.

Caso 2: O conjunto $\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ é limitado.

Seja agora $M = \sup\left\{\frac{a_n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\}$ e inicialmente suponha $M > 0$, então, dado $0 < \varepsilon < \frac{M}{2}$, existe n_0 tal que $a_{n_0} \geq (M-\varepsilon)n_0$. Assim, para todos $q, r \in \mathbb{Z}^+, 1 \leq r \leq n_0$, temos que

$$a_{qn_0+r} \geq qa_{n_0} + a_r \geq q(M-\varepsilon)n_0 + l,$$

onde $l = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}\}$. Daí, para q suficientemente grande, temos $q(M-\varepsilon)n_0 + l > 0$ e assim

$$\frac{a_{qn_0+r}}{qn_0+r} \geq \frac{q(M-\varepsilon)n_0+l}{qn_0+n_0} = M - \varepsilon + \frac{l-n_0(M-\varepsilon)}{qn_0+n_0}.$$

Daí, para q suficientemente grande, temos $\frac{l-n_0(M-\varepsilon)}{qn_0+n_0} > -\varepsilon$ e assim $\frac{a_{qn_0+r}}{qn_0+r} \geq M-2\varepsilon$, e portanto $\frac{a_n}{n} \geq M-2\varepsilon$ para n suficientemente grande.

Logo, $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = M$.

Para o caso $M \leq 0$, seja h um real positivo tal que $M + h > 0$. Defina $b_n := a_n + hn$ e assim $\sup\left\{\frac{b_n}{n} : n \in \mathbb{Z}^+\right\} = M + h > 0$ e $b_{m+n} \geq b_m + b_n$, o que nos dá que $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = M + h$, concluindo $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = M$.

□

Teorema 2.25. *Dado F grafo conexo, então ou* $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,F)}{n} = \infty$ *ou existe* $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,F)}{n} \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Sejam m e n inteiros positivos. Sejam G_1 e G_2 grafos que não contêm cópia de F e tais que $V(G_1) = m$, $V(G_2) = n$, $E(G_1) = ex(m,F)$, $E(G_2) = ex(n,F)$, e $V(G_1) \cap V(G_2) = \emptyset$. Então, o grafo G dado por $V(G) = V(G_1) \cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1) \cup E(G_2)$ tem $m+n$ vértices e não contém cópia de F. Logo,

$$ex(m+n,F) \geq ex(m,F) + ex(n,F).$$

O resultado segue pelo lema 2.24. □

Dizemos que um grafo conexo F tem número de Turán linear se $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,F)}{n} < \infty$.

Note que, se $F \cong P_1$, então $ex(n,F) = 0$ para todo n. Por outro lado, se tivermos que F é um grafo conexo com pelo menos duas arestas, então podemos considerar o grafo G com $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $E(G) = \{\{x_{2k-1}, x_{2k}\} : k \in [\lfloor \frac{n}{2} \rfloor]\}$ que não contém cópia de F e, portanto, $ex(n,F) \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, obtendo $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,F)}{n} \geq \frac{1}{2}$.

2.3 Árvores

Falaremos a seguir de uma família especial de grafos chamados *árvores*. Além de diversas propriedades interessantes, iremos mostrar que eles possuem número de Turán linear.

Definição 2.26. Um grafo G é chamado de *árvore* se ele é conexo e não possui ciclos.

Proposição 2.27. *Se G é uma árvore com pelo menos dois vértices, então ele possui, pelo menos, dois vértices de grau* 1.

Demonstração. Tome vértices $u, v \in V(G)$ tal que

$$d(u,v) = \text{diam}(G) > 0.$$

Com isso, seja $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k)$ com $v_0 = u$, $v_k = v$, $k = \text{diam}(G)$ um u,v-caminho. Afirmamos que $deg(u) = 1$.

Com efeito, se $deg(u) > 1$, então existe $u' \in V(G) \setminus \{v_0, v_1\}$ tal que $\{u, u'\} \in E(G)$. Se u' é um vértice do caminho acima, digamos $u' = v_i$, $i > 1$, então $(v_0, v_1, v_2, \ldots, v_i, v_0)$ é um ciclo em G, o que é uma contradição. Daí, u' não está no caminho acima. Como G é conexo, existe um

caminho $(x_0, x_1, \ldots, x_p)$ com $x_0 = u'$ e $x_p = v$, onde $p = d(u', v) \leq k$.

Se $\{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cap \{x_0, x_1, \ldots, x_p\} = \{v\}$, então $(x_0, x_1, \ldots, x_p, v_{p-1}, \ldots, v_1, v_0, x_0)$ é um ciclo em G, o que é uma contradição.

Caso contrário, seja i o menor índice tal que $v_i \in \{v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k\} \cap \{x_0, x_1, \ldots, x_p\}$. Seja $v_i = x_j$, $j \geq 1$. Se $i = 0$, então $(x_j, x_{j+1}, \ldots, x_p)$ é um u,v-caminho de comprimento $p - j < k$, o que é uma contradição. Se $i > 0$, então $(x_0, x_1, \ldots, x_j, v_{i-1}, \ldots, v_0, x_0)$ é um ciclo em G, o que é uma contradição.

Portanto, devemos ter $deg(u) = 1$ e, analogamente, $deg(v) = 1$. □

Proposição 2.28. *Se G é uma árvore, então $|E(G)| = |V(G)| - 1$.*

Demonstração. Façamos indução em $n = |V(G)|$. Se $n = 1$, então o grafo não possui arestas e, assim, $|E(G)| = 0 = 1 - 1 = |V(G)| - 1$.

Assuma agora que o resultado vale para algum $n \geq 1$.

Considere uma árvore G com $n + 1$ vértices.

Pelo proposição 2.27, existe um vértice $v \in V(G)$ com $deg(v) = 1$. Assim, o grafo $G - \{v\}$ ainda é conexo, não possui ciclos e possui n vértices e, portanto, por hipótese, $G - \{v\}$ possui $n - 1$ arestas. Como $deg(v) = 1$, segue que G tem n arestas. □

Proposição 2.29. *Todo grafo conexo possui um subgrafo gerador que é uma árvore.*

Demonstração. Seja $\tilde{G}$ um grafo conexo. Considere um subgrafo gerador G de $\tilde{G}$ conexo que minimize o número de arestas. Afirmamos que G é uma árvore.

Com efeito, se existisse um ciclo $(x_1, x_2, \ldots, x_k, x_1)$, então $G - \{e\}$ ainda é conexo, onde $e = \{x_1, x_k\}$. Para tal, dados $u, v \in V(G)$, existe um u,v-caminho $(y_0, y_1, \ldots, y_p)$ em G. Se $\{y_{i-1}, y_i\} \neq e \ \forall i \in [p]$, então tal caminho ainda existe em $G - \{e\}$, caso contrário, seja $i \in [p]$ tal que $e = \{y_{i-1}, y_i\}$, digamos $y_{i-1} = x_1$, $y_i = x_k$, então $(y_0, y_1, \ldots, y_{i-1}, x_2, x_3, \ldots, x_k, y_{i+1}, \ldots, y_p)$ é um passeio em $G - \{e\}$, então existe um u,v-caminho em $G - \{e\}$. Logo, $G - \{e\}$ ainda é conexo, contradizendo a minimalidade de G.

Logo, G não tem ciclos e, portanto, é uma árvore. □

Corolário 2.1. *Se G é um grafo conexo, então $|E(G)| \geq |V(G)| - 1$. Se a igualdade ocorre, então G é uma árvore.*

Demonstração. Seja G_0 uma árvore geradora de G, isto é, um subgrafo gerador de G que é uma árvore. Então

$$|E(G)| \geq |E(G_0)| = |V(G_0)| - 1 = |V(G)| - 1.$$

Se G não é árvore, então $G \neq G_0$ e, portanto, $|E(G)| > |E(G_0)| = |V(G)| - 1$. □

Proposição 2.30. *Seja T uma árvore com $t+1$ vértices, t inteiro positivo. Então, para todo n inteiro positivo, temos*

$$ex(n,T) \geq \left\lfloor \frac{n}{t} \right\rfloor \binom{t}{2}.$$

Demonstração. Sejam $G_1, G_2, \ldots, G_{\lfloor \frac{n}{t} \rfloor}$ grafos completos, disjuntos em vértices, com t vértices cada um. Tome então o grafo G com n vértices tal que $\bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{t} \rfloor} V(G_i) \subset V(G)$ e $E(G) = \bigcup_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{t} \rfloor} E(G_i)$. □

Note que isso nos dá que $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,T)}{n} \geq \frac{t-1}{2}$.
Erdős e Sós conjecturaram em 1962 o seguinte:

Conjectura 2.1. *Seja T uma árvore com $t+1$ vértices e G um grafo com n vértices, onde t e n são inteiros positivos. Se $|E(G)| > \frac{n(t-1)}{2}$, então G possui cópia de T.*

Sendo tal conjectura verdadeira, então obtemos em particular $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,T)}{n} = \frac{t-1}{2}$, entretanto, como tal conjectura ainda se encontra em aberto, iremos demonstrar uma versão mais fraca dela, mas que garante que toda árvore tem, de fato, número de Turán linear.

Lema 2.31. *Seja T uma árvore com t vértices, onde t é um inteiro positivo, e G um grafo com $\delta(G) \geq t-1$, então G possui cópia de T.*

Demonstração. A demonstração seguirá por indução em t.
Para $t = 1$, o resultado é imediato. Suponha o resultado válido para algum inteiro positivo t. Vamos provar para $t+1$.

Seja T uma árvore com $t+1$ vértices e G um grafo com $\delta(G) \geq t$. Seja $v \in V(T)$ tal que $deg(v) = 1$. Então, $T - \{v\}$ é uma árvore com t vértices e, portanto, G possui cópia de $T - \{v\}$, isto é, existe um subgrafo H de G e um isomorfismo $\phi : V(T - \{v\}) \to V(H)$. Seja $u \in V(T)$ o único vizinho de v em T. Como H tem $t-1$ arestas e $deg_G(\phi(u)) \geq t$, então $\phi(u)$ possui um vizinho em G que não é vértice de H, digamos v_0. Assim, tomando $H' = (V(H) \cup \{v_0\}, E(H) \cup \{\phi(u), v_0\})$ e estendendo ϕ para $\tilde{\phi} : V(T) \to V(H')$, colocando $\phi(v) = v_0$, obtemos que $\tilde{\phi}$ é um isomorfismo de T em H' e, portanto, G contém cópia de T. □

Teorema 2.32. *Se T é uma árvore com t vértices, $t \geq 2$ inteiro, então $ex(n,T) \leq n(t-2)$.*
Em particular, $\lim_{n\to\infty} \frac{ex(n,T)}{n} \leq t-2$.

Demonstração. Seja G um grafo de n vértices com mais de $n(t-2)$ arestas. Mostremos que G possui cópia de T. Para isso, considere um subgrafo induzido não-nulo H de G que maximiza $\frac{|E(H)|}{|V(H)|}$. Afirmamos que $\delta(H) \geq t-1$.
Com efeito, já sabemos que $\frac{|E(H)|}{|V(H)|} \geq \frac{|E(G)|}{|V(G)|} > t-2$. Suponha que exista $v \in V(H)$ tal que $deg(v) \leq t-2$, então considere $H' = H - \{v\}$ (note que H' não é nulo, pois H tem arestas). Assim,

$$\frac{|E(H')|}{|V(H')|} = \frac{|E(H)| - deg(v)}{|V(H)|-1} \geq \frac{|E(H)|-(t-2)}{|V(H)|-1}.$$

Veja que

$$\frac{|E(H)|-(t-2)}{|V(H)|-1} > \frac{|E(H)|}{|V(H)|} \iff |V(H)|(|E(H)|-(t-2)) > |E(H)|(|V(H)|-1)$$
$$\iff \frac{|E(H)|}{|V(H)|} > t-2$$

o que contradiz a maximalidade de H. Logo, $\delta(H) \geq t-1$ e, portanto, pelo lema 2.31, H possui cópia de T e, portanto, G possui cópia de T. □

Isso nos mostra que toda árvore possui número de Turán linear.

2.4 Emparelhamentos

Nesta seção, comentaremos sobre uma cota inferior para a quantidade de retângulos latinos. Tal cota é extremamente útil para um dos resultados desta dissertação.

Definição 2.33. Dado um grafo G, um *emparelhamento* de G é um subconjunto $H \subset E(G)$ tal que quaisquer dois elementos de H são disjuntos. Se $\bigcup_{h\in H} h = V(G)$, dizemos que H é um emparelhamento perfeito.

Teorema 2.34 (Teorema de Hall)**.** *Seja G um grafo bipartido (2-partido) com $V(G) = A \cup B$, $G[A], G[B]$ são vazios e tal que $|A| \leq |B|$. Então, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *Existe um emparelhamento H de G tal que $A \subset \bigcup_{h\in H} h$.*

2. *Para qualquer subconjunto $S \subset A$, temos que*

$$|\bigcup_{s\in S} N(s)| \geq |S|.$$

Demonstração.

- $(1) \rightarrow (2)$

  Seja $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Como existe um emparelhamento $H = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_n, b_n\}\}$ (note que, como o grafo é bipartido, não é possível ter um emparelhamento com mais de n arestas), então para qualquer $I \in [n]$, temos que

$$\{b_i : i \in I\} \subset \bigcup_{i\in I} N(a_i)$$

  e, portanto, $|\bigcup_{i\in I} N(a_i)| \geq |I|$

- $(2) \rightarrow (1)$

  Mostremos isso por indução em n. De fato, se $n = 1$, como $|N(a_1)| \geq |\{a_1\}| = 1$, então existe $b_1 \in B$ tal que $\{a_1, b_1\} \in E(G)$ e assim, tome $H = \{\{a_1, b_1\}\}$. Suponha agora, dado $n \geq 2$, o resultado válido para todo $n' < n$. Dividamos o problema em 2 casos:

  1º caso: Se para todo $S \subset A$, com $\emptyset \neq S \neq A$, vale que $|\bigcup_{s\in S} N(s)| > |S|$:
  Tome $a \in A$ e $b \in N(a)$. Agora, sejam $A' = A - \{a\}$, $B' = B - \{b\}$ e $G' = G[A' \cup B']$. Note que, para todo $S' \subset A'$, temos

$$|\bigcup_{s\in S'} N_{G'}(s)| \geq |\bigcup_{s\in S'} N_G(s)| - 1 \geq (|S'| + 1) - 1 = |S'|$$

  Daí, por hipótese de indução aplicada a $n - 1$, existe H' um emparelhamento de G' tal que $A' \subset \bigcup_{h\in H'} h$. Assim, tome $H = H' \cup \{\{a, b\}\}$.

  2º caso: Se existe $T \subset A$, com $\emptyset \neq T \neq A$, tal que $|\bigcup_{s\in T} N(s)| = |T|$:
  Como, para todo $S \subset T$, vale que $|\bigcup_{s\in S} N(s)| \geq |S|$, então, aplicando a hipótese de indução em $|T|$, segue que existe um emparelhamento H de $G[T \cup \bigcup_{s\in T} N(s)]$ tal que $T \subset \bigcup_{h\in H} h$. Note que, do fato de $|\bigcup_{s\in T} N(s)| = |T|$, tal emparelhamento é perfeito. Suponha, sem perda de generalidade, que $T = \{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ e $H = \{\{a_1, b_1\}, \{a_2, b_2\}, \ldots, \{a_t, b_t\}\}$, onde

$t = |T|$. Agora, seja $A' = A \setminus T$, $B' = B \setminus \bigcup_{s\in T} N(s)$ e $G' = G[A' \cup B']$. Assim, para cada $L \subset A'$, temos que

$$|\bigcup_{s\in L} N_{G'}(s)| + |T| = |\bigcup_{s\in L} N_G(s) \setminus \bigcup_{s\in T} N_G(s)| + |\bigcup_{s\in T} N_G(s)| = |\bigcup_{s\in T\cup L} N_G(s)| \geq |T\cup L| = |T| + |L|$$

seguindo, portanto, $|\bigcup_{s\in L} N_{G'}(s)| \geq |L|$. Aplicando a hipótese de indução em $n-t$, conseguimos um emparelhamento H' de G' tal que $A \setminus T \subset \bigcup_{h\in H'} h$. Finalmente, $H \cup H'$ é o emparelhamento procurado.

□

Teorema 2.35. *Seja G um grafo bipartido k-regular, com $k \in \mathbb{Z}^+$. Então G possui um emparelhamento perfeito.*

Demonstração. Seja $V(G) = A \cup B$ tal que $G[A]$ e $G[B]$ são vazios. Daí,

$$k|A| = \sum_{v\in A} deg(v) = |E(G)| = \sum_{v\in B} deg(v) = k|B|$$

e, portanto, $|A| = |B|$.

Pelo teorema 2.34, é suficiente mostrar que para qualquer subconjunto $S \subset A$, temos que

$$|\bigcup_{s\in S} N(s)| \geq |S|.$$

Para isso, dado $S \subset A$, vamos contar o número de pares $(a,b) \in S \times \bigcup_{s\in S} N(s)$ tal que $\{a,b\} \in E(G)$:
Por um lado, para cada $a \in S$, existem exatamente k vértices $b \in \bigcup_{s\in S} N(s)$ tais que $\{a,b\} \in E(G)$, totalizando $k|S|$ tais pares.
Por outro lado, para cada $b \in \bigcup_{s\in S} N(s)$, existem exatamente k vértices $a \in A$ e, portanto, no máximo, k vértices $a \in S$ tais que $\{a,b\} \in E(G)$. Logo, há no máximo $k|\bigcup_{s\in S} N(s)|$ de tais pares.

Portanto,

$$k|S| \leq k|\bigcup_{s\in S} N(s)|$$

e o resultado segue. □

Definição 2.36. Dada uma matriz quadrada $n \times n, M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$, defina seu permanente por

$$perm(M) = \sum_{\sigma\in S_n} m_{1,\sigma(1)} m_{2,\sigma(2)} \dots m_{n,\sigma(n)}$$

onde S_n é o conjunto das permutações $\sigma : [n] \to [n]$.

Em 1926, B. L. Van Der Waerden conjecturou o seguinte:

Teorema 2.37. *Seja n um inteiro positivo e seja* $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ *uma matriz quadrada* $n \times n$ *com entradas inteiras não-negativas e tal que*

$$\sum_{j=1}^{n} m_{i_0,j} = 1 \ \forall i_0 \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} m_{i,j_0} = 1 \ \forall j_0 \in [n]$$

Então $perm(M) \geq \frac{n!}{n^n}$.

Tal conjectura foi provada em 1981 com duas diferentes provas, uma por D. I. Falikman e outra por G. P. Egoritsjev. Em (Lint; Wilson, 2001) foi apresentada a prova de Egoritsjev.

Lema 2.38. *Seja G um grafo bipartido k-regular,* $k \in \mathbb{Z}^+$. *Então o número de emparelhamentos perfeitos em G é, pelo menos,* $\frac{k^n n!}{n^n}$.

Demonstração. Seja $V(G) = A \cup B$ tal que $G[A]$ e $G[B]$ são vazios. Daí,

$$k|A| = \sum_{v\in A} deg(v) = |E(G)| = \sum_{v\in B} deg(v) = k|B|$$

e, portanto, $|A| = |B|$.

Agora, sendo $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$, defina $M = (m_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ por

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } \{a_i, b_j\} \in E(G), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Note que um emparelhamento perfeito corresponde a uma permutação $\sigma \in S_n$ tal que $a_{i,\sigma(i)} = 1 \ \forall i \in [n]$. Assim, o número de emparelhamentos de G é simplesmente $perm(M)$.

Defina agora $M' = (\frac{m_{i,j}}{k})_{1\leq i,j\leq n}$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{m_{i_0,j}}{k} = \frac{1}{k} deg(a_{i_0}) = 1 \ \forall i_0 \in [n]$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{m_{i,j_0}}{k} = \frac{1}{k} deg(b_{j_0}) = 1 \ \forall j_0 \in [n]$$

Daí, pelo teorema 2.37, segue que

$$\frac{n!}{n^n} \leq perm(M') = \sum_{\sigma\in S_n} \frac{m_{1,\sigma(1)}}{k} \frac{m_{2,\sigma(2)}}{k} \ldots \frac{m_{n,\sigma(n)}}{k} = \frac{1}{k^n} perm(M)$$

e o resultado segue. □

Definição 2.39. Sejam $k \leq n$ inteiros positivos. Um *retângulo latino* $k \times n$ é uma matriz $k \times n$, $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[k]\times[n]}$ tal que

$$\{m_{i_0,j} : j \in [n]\} = [n] \ \forall i_0 \in [k],$$

$$|\{m_{i,j_0} : i \in [k]\}| = k \ \forall j_0 \in [n].$$

Se $k = n$, dizemos que M é um *quadrado latino* de ordem n.

Teorema 2.40. *Sejam $k < n$ inteiros positivos e $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in[k]\times[n]}$ um retângulo latino $k \times n$. Então M pode ser estendido para um retângulo latino $M' = (m_{i,j})_{(i,j)\in[k+1]\times[n]}$.*

Demonstração. Defina $C_j = [n] \setminus \{m_{i,j} : i \in [k]\} \ \forall j \in [n]$. Assim, $|C_j| = n - k$. Note que, em cada linha de M, cada número de $[n]$ aparece exatamente uma vez. Assim, em M, cada número de $[n]$ aparece exatamente k vezes. Como ao listarmos os elementos de M e de todos os C_j (com multiplicidade) teremos cada número de $[n]$ aparecendo n vezes, então, ao listarmos apenas os elementos de C_j, cada número de $[n]$ aparecerá exatamente $n - k$ vezes.

Finalmente, considere o grafo bipartido G dado por $V(G) = A \cup [n]$ onde $A = \{C_j : j \in [n]\}$ e $E(G) = \{(u,v) \in A \times B : v \in u\}$. Assim, temos que tal grafo G é $(n-k)$-regular e, portanto, pelo teorema 2.35, tal grafo possui emparelhamento perfeito.

Seja $\{\{C_j, c_j\} : j \in [n]\}$ um emparelhamento perfeito. Defina então $m_{k+1,j} = c_j \ \forall j \in [n]$ e tome $M' = (m_{i,j})_{(i,j)\in[k+1]\times[n]}$. □

Teorema 2.41. *Para $k \leq n$ inteiros positivos, seja, $L_{k\times n}$ a quantidade de retângulos latinos $k \times n$ e seja $L_n = L_{n\times n}$. Assim, temos*

$$L_{k\times n} \geq \frac{n!^{n+k}}{(n-k)!^n n^{nk}}.$$

Em particular, $L_n \geq \frac{n!^{2n}}{n^{n^2}}$.

Demonstração. A prova será feita por indução em k. De fato,

$$L_{1\times n} = n! = \frac{n!^{n+1}}{(n-1)!^n n^n}.$$

Suponha o resultado válido para algum $1 \leq k < n$. Pelo teorema 2.40, todo retângulo latino $k \times n$ pode ser estendido para um retângulo latino $(k+1) \times n$. Além disso, pelo lema 2.38,

temos que cada um deles pode ser estendido de, pelo menos, $\frac{n!(n-k)^n}{n^n}$ maneiras. Com isso obtemos que

$$L_{(k+1)\times n} \geq L_{k\times n}\frac{n!(n-k)^n}{n^n} \geq \frac{n!^{n+k+1}}{(n-k-1)!^n n^{n(k+1)}}$$

e o resultado segue. □

2.5 Regularidade

A partir de agora, iremos falar sobre o Lema da Regularidade e algumas consequências do mesmo. Tal ferramenta será bastante utilizada quando tratarmos de padrões de grafos completos monocromáticos no capítulo seguinte.

Definição 2.42. Seja G um grafo e sejam $A, B \subset V(G)$ disjuntos. Sendo $E(A,B) = E_G(A,B) = \{\{a,b\} \in E(G) : a \in A, b \in B\}$, defina, caso A e B sejam não-vazios, a densidade do par (A,B) por

$$d(A,B) = \frac{|E(A,B)|}{|A||B|}.$$

Se pelo menos um dos conjuntos for vazio, vamos definir que a densidade é 0. Ainda, dado $\varepsilon > 0$, dizemos que (A,B) é um par ε-regular se, para todos os pares (X,Y) com $X \subset A$, $Y \subset B$, $|X| \geq \varepsilon|A|$, $|Y| \geq \varepsilon|B|$, temos

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leq \varepsilon.$$

Agora, apresentaremos o Lema da Regularidade, cuja demonstração pode ser encontrada, por exemplo, no livro (Botler *et al.*, 2022).

Lema 2.43 (Lema da regularidade)**.** *Dados $\varepsilon > 0$ e $m \in \mathbb{Z}^+$, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que, para qualquer grafo G, existe uma partição de $V(G) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ com $m \leq k \leq M$, tal que $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para todo $1 \leq i < j \leq k$ e tal que*

$$|\{\{i,j\} \subset [k] : (V_i, V_j) \text{ não é } \varepsilon\text{-regular}\}| \leq \varepsilon\binom{k}{2}.$$

Chamaremos tal partição de ε-regular.

Trabalharemos, entretanto, com a seguinte versão mais forte desse lema:

Lema 2.44 (Lema da regularidade - Versão forte)**.** *Dados $\varepsilon > 0$ e $m, r \in \mathbb{Z}^+$, existe $M \in \mathbb{Z}^+$ tal que, para quaisquer grafos $G_1, G_2, \ldots, G_r$ com $V(G_1) = V(G_2) = \cdots = V(G_r)$ e $E(G_i) \cap$*

$E(G_j) = \emptyset$ para todo $i \neq j$, existe uma partição de $V(G_1) = V_1 \cup \cdots \cup V_k$ com $m \leq k \leq M$ tal que $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para todo $1 \leq i < j \leq k$ e tal que, para todo $t \in [r]$, temos que

$$|\{\{i,j\} \subset [k] : (V_i, V_j) \text{ não é } \varepsilon\text{-regular em } G_t\}| \leq \varepsilon \binom{k}{2}.$$

Chamaremos tal partição de (r,ε)-regular.

Ou seja, podemos estender a propriedade para diversos grafos simultaneamente, contanto que seu conjunto de vértices seja o mesmo e suas arestas sejam disjuntas.

Falaremos logo sobre o lema de imersão de cliques. Para isso, precisamos do seguinte lema:

Lema 2.45. *Sejam $1 \geq \alpha \geq \varepsilon > 0$ e seja (A,B) um par ε-regular num grafo G. Para quaisquer $X \subset A$ e $Y \subset B$ com $|X| \geq \alpha|A|$ e $|Y| \geq \alpha|B|$, o par (X,Y) é $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$-regular e satisfaz $d(X,Y) \geq d(A,B) - \varepsilon$.*

Demonstração. Inicialmente, veja que $|X| \geq \alpha|A| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \alpha|B| \geq \varepsilon|B|$. Como (A,B) é ε-regular, segue que $|d(X,Y) - d(A,B)| \leq \varepsilon$, seguindo portanto que $d(X,Y) \geq d(A,B) - \varepsilon$.
Agora, vamos provar que (X,Y) é $\frac{2\varepsilon}{\alpha}$-regular. Com efeito, tome $X' \subset X, Y' \subset Y$ tais que $|X'| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}|X|$ e $|Y'| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}|Y|$. Como

$$|X'| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}|X| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}\alpha|A| = 2\varepsilon|A| \geq \varepsilon|A|,$$

$$|Y'| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}|Y| \geq \frac{2\varepsilon}{\alpha}\alpha|B| = 2\varepsilon|B| \geq \varepsilon|B|,$$

então $|d(X',Y') - d(A,B)| \leq \varepsilon$.
Finalmente, temos:

$$|d(X',Y') - d(X,Y)| \leq |d(X',Y') - d(A,B)| + |d(A,B) - d(X,Y)| \leq 2\varepsilon \leq \frac{2\varepsilon}{\alpha}.$$

□

Lema 2.46 (Lema de imersão de cliques)**.** *Sejam $r \geq 3$ natural e $\delta \in (0,1]$. Então existe $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(r,\delta)$ tal que, para todo $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ e grafo G, temos que: Se $V_1, V_2, \ldots, V_r \subset V(G)$ são disjuntos dois a dois e tais que, para todo $1 \leq i < j \leq r$, (A_i, A_j) é ε-regular e $d(A_i, A_j) \geq \delta$, então existe $v_i \in V_i$ para todo $i \in [r]$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ é um clique em G.*

Demonstração. Mostremos que $\varepsilon_0(r,\delta) = \frac{\delta^{r-2}}{2^{\binom{r}{2}}}$ funciona. Iremos seguir por indução, tomando como base o caso $r = 2$, que é imediato, uma vez que $\delta > 0$ e, portanto, $E(V_1, V_2) \neq \emptyset$. Agora, assuma o resultado verdadeiro para $r-1 \geq 2$. Seja agora $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta^{r-2}}{2^{\binom{r}{2}}}$.

Afirmamos que existe $v \in V_r$ tal que $|N_G(v) \cap V_i| \geq (\delta - \varepsilon)|V_i|$ para todo $i \in [r-1]$. Para isso, suponha por contradição que exista uma partição $V_r = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{r-1}$ tal que $|N_G(v) \cap V_i| < (\delta - \varepsilon)|V_i|$ para todo $v \in A_i$. Assim, $|E(A_i, V_i)| < (\delta - \varepsilon)|A_i||V_i|$ e, daí, $d(A_i, V_i) < \delta - \varepsilon$. Como (V_i, V_r) é ε-regular, segue que $|A_i| < \varepsilon|V_r|$, e assim, $|V_r| < (r-1)\varepsilon|V_r| \leq \frac{r-1}{2^{\binom{r}{2}}}|V_r| < |V_r|$, uma contradição.

Defina agora $X_i = N_G(v) \cap V_i$ para todo $i \in [r-1]$. Como $\delta - \varepsilon > \varepsilon$, então, pelo lema 2.45, temos que, para todo $1 \leq i < j \leq r-1$, (X_i, X_j) é $\frac{2\varepsilon}{\delta-\varepsilon}$-regular e $d(X_i, X_j) \geq \delta - \varepsilon$. Finalmente, note que

$$\frac{2\varepsilon}{\delta - \varepsilon} \leq \frac{(\delta-\varepsilon)^{r-3}}{2^{\binom{r-1}{2}}}$$

para todo $0 < \varepsilon \leq \frac{\delta^{r-2}}{2^{\binom{r}{2}}}$, uma vez que

$$\frac{(\delta-\varepsilon)^{r-2}}{2^{\binom{r-1}{2}}} \geq \frac{(\frac{\delta}{2})^{r-2}}{2^{\binom{r-1}{2}}} = 2\frac{\delta^{r-2}}{2^{r-1+\binom{r-1}{2}}} = 2\frac{\delta^{r-2}}{2^{\binom{r}{2}}} \geq 2\varepsilon.$$

Por hipótese de indução, existe $v_i \in X_i$ para todo $i \in [r-1]$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ é um clique em G. Daí, $\{v, v_1, v_2, \ldots, v_{r-1}\}$ é um clique em G, o que conclui a indução. □

Definição 2.47. Dados $\varepsilon, \delta > 0$, um grafo G e uma partição $\mathscr{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_k\}$ de $V(G)$, isto é, $\bigcup_{j=1}^{k} V_j = V(G)$ e $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$, definimos o *cluster graph* $\mathscr{H}(G, \mathscr{P}, \varepsilon, \delta)$ dado por $V(\mathscr{H}(G, \mathscr{P}, \varepsilon, \delta)) = \mathscr{P}$ e

$$E(\mathscr{H}(G, \mathscr{P}, \varepsilon, \delta)) = \{\{V_i, V_j\} : (V_i, V_j)\ \varepsilon\text{-regular e } d(V_i, V_j) \geq \delta\}.$$

Note que o lema de imersão de cliques nos diz que, se $\varepsilon \leq \varepsilon_0(|\mathscr{P}|, \delta)$ e $\mathscr{H}(G, \mathscr{P}, \varepsilon, \delta)$ possui um clique de tamanho m, então G possui um clique de mesmo tamanho m.

2.6 Números de Ramsey

Iremos falar agora sobre o número de Ramsey, que denota o menor número de vértices que um grafo completo pode ter tal que qualquer coloração de arestas contém algum subgrafo completo monocromático de tamanho específico.

A existência de $R(\mathbf{k})$ será útil na seção 3.4.

Definição 2.48. Dados inteiros $r, k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 2$, seja $R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ o menor inteiro positivo n_0 com a seguinte propriedade propriedade:
Se G é um grafo completo com $n \geq n_0$ vértices, então, para toda coloração $\phi : E(G) \to [r]$, existe $i \in [r]$ tal que $G[\phi^{-1}(i)]$ contém uma cópia de K_{k_i}.

Iremos mostrar que existe $R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ para quaisquer inteiros $r, k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 2$.

Inicialmente, note que, se existe $R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$, então, para qualquer permutação $\sigma : [r] \to [r]$, temos que $R(k_{\sigma(1)}, k_{\sigma(2)}, \ldots, k_{\sigma(r)}) = R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$. Também é fácil ver que $R(k, 2) = k$ para todo $k \geq 2$.

Teorema 2.49. *Sejam $r, k_1, k_2, \ldots, k_r \geq 2$ inteiros, então existe $R(k_1, k_2, \ldots, k_r)$ e ainda é satisfeito:*

$$R(k_1, k_2, \ldots, k_r) = \begin{cases} R(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}), \text{ se } r \geq 3 \text{ e } k_r = 2; \\ \sum_{i=1}^{r} R(k_1, \ldots, k_{i-1}, k_i - 1, k_{i+1}, \ldots, k_r), \text{ se } k_i \geq 3 \text{ para todo } i \in [r]. \end{cases}$$

Demonstração. Inicialmente, para $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$, defina $||(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)||_1 := |\alpha_1| + |\alpha_2| + \ldots + |\alpha_n|$. Mostremos o teorema acima por indução em $H \geq 4$ tal que, se $\mathbf{k} \in \bigcup_{n \geq 2} \mathbb{Z}^n$ com entradas maiores ou iguais a 2 é tal que $||\mathbf{k}||_1 = H$, então $\mathbf{k}$ satisfaz as condições do teorema.
Com efeito, para $H = 4$ temos $R(2,2) = 2$ e para $H = 5$ temos $R(2,3) = R(3,2) = 3$. Assuma agora $H \geq 6$ e que todo $4 \leq H' < H$ satisfaz tal propriedade. Agora tome $\mathbf{k} \in \bigcup_{n \geq 2} \mathbb{Z}^n$ com entradas maiores ou iguais a 2 tal que $||\mathbf{k}||_1 = H$ e dividamos o problema em 2 casos.

- Se existe alguma entrada de $\mathbf{k}$ igual a 2, digamos a última entrada, uma vez que R é simétrica.

  Seja então $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}, 2)$. Se $r = 2$, então já vimos que $R(k_1, 2) = k_1$. Agora, se $r \geq 3$, considere um grafo completo G e seja $\phi : E(G) \to [r]$ tal que $G[\phi^{-1}(i)]$ não contém cópias de K_{k_i} para todo $i \in [r]$. Como $k_r = 2$, então $\phi^{-1}(r) = \emptyset$, e podemos reduzir o contradomínio de ϕ para $[r-1]$, obtendo assim $R(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1}, 2) = R(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})$. Como $||(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})||_1 = H - 2$, então, por hipótese, existe $R(k_1, k_2, \ldots, k_{r-1})$.
- Se todas as entradas de $\mathbf{k}$ são maiores que 2.

  Seja G um grafo completo tal que existe uma coloração $\phi : E(G) \to [r]$ tal que $G[\phi^{-1}(i)]$ não contém cópias de K_{k_i} para todo $i \in [r]$. Seja $v \in V(G)$ e, para cada $i \in [r]$, considere o conjunto

$$X_i := \{u \in V(G) : \phi(\{u, v\}) = i\}.$$

Afirmamos que $|X_i| \leq R(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r)-1$, que existe por hipótese, pois $||(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r)||_1 = H-1$.

Com efeito, considere $\psi = \phi|_{E(X_i)}$, assim $G[\psi^{-1}(j)]$ não contém cópias de K_{k_j} para todo $j \in [r]\setminus\{i\}$ e ainda $G[\psi^{-1}(i)]$ não contém cópias de K_{k_i-1}, caso contrário, se $G[\psi^{-1}(i)]$ possuísse um k_i-1-clique S, então $S\cup\{v\}$ é um k_i-clique em $G[\phi^{-1}(i)]$, o que é uma contradição.

Logo

$$|V(G)| \leq 1+\sum_{i=1}^{r}|X_i| \leq 1+\sum_{i=1}^{r}R(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r)-1$$

$$= 1-r+\sum_{i=1}^{r}R(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r)$$

concluindo que existe $R(k_1,k_2,\ldots,k_r)$ e

$$R(k_1,k_2,\ldots,k_r) \leq 2-r+\sum_{i=1}^{r}R(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r).$$

Como $r \geq 2$, o resultado segue e a indução está completa.

□

Corolário 2.2. *Sejam $r,k_1,k_2,\ldots,k_r \geq 2$ inteiros, então*

$$R(k_1,k_2,\ldots,k_r) \leq \frac{2}{r!}\binom{\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_r-1}.$$

Observação 6. Aqui denotamos $\binom{n}{m_1,m_2,\ldots,m_r} = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_r!}$, onde $m_1,\ldots,m_r$ são inteiros não-negativos tais que $\sum_{i=1}^{r}m_i = n$.

Demonstração. Iremos, como acima, fazer indução em $H \geq 4$. Se $H=4$, temos $R(2,2)=2=\frac{2}{2!}\binom{2}{1,1}$. Assuma agora $H \geq 5$ e que todo $4 \leq H' < H$ satisfaz tal propriedade. Agora tome $\mathbf{k} \in \bigcup_{n\geq 2}\mathbb{Z}^n$ com entradas maiores ou iguais a 2 tal que $||\mathbf{k}||_1 = H$ e dividamos o problema em 2 casos.

- Se existe alguma entrada de $\mathbf{k}$ igual a 2, digamos a última entrada, uma vez que R é simétrica.

  Seja então $\mathbf{k} = (k_1,k_2,\ldots,k_{r-1},2)$. Se $r=2$, então já vimos que $R(k_1,2)=k_1=\frac{2}{2!}\binom{k_1}{k_1-1,1}$.

Agora, se $r \geq 3$, temos $R(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1},2) = R(k_1,k_2,\ldots,k_{r-1}) \leq \frac{2}{(r-1)!}\binom{\sum_{i=1}^{r-1}(k_i-1)}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_{r-1}-1} = \frac{2}{(r-1)!\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)}\binom{\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_{r-1}-1,1} \leq \frac{2}{r!}\binom{\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_{r-1}-1,1}$.

- Se todas as entradas de $\mathbf{k}$ são maiores que 2.

$$R(k_1,k_2,\ldots,k_r) \leq \sum_{i=1}^{r} R(k_1,\ldots,k_{i-1},k_i-1,k_{i+1},\ldots,k_r) \leq$$

$$\frac{2}{r!}\left(\sum_{i=1}^{r}\binom{\sum_{j=1}^{r}(k_j-1)-1}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_j-2,\ldots,k_r-1}\right) = \frac{2}{r!}\binom{\sum_{i=1}^{r}(k_i-1)}{k_1-1,k_2-1,\ldots,k_r-1}$$

concluindo assim a nossa indução.

□

3 ALGUNS RESULTADOS RECENTES DA ÁREA

3.1 Padrões de grafos

Definiremos agora, como em (Benevides *et al.*, 2017), o que é um padrão (de cores nas arestas de um grafo).

Definição 3.1. Um *padrão* é um par $\hat{F} = (F, C)$, onde F é um grafo não-vazio e $C : E(F) \to \mathbb{Z}^+$ é uma coloração de suas arestas. O número de cores do padrão é dado por $|Im(C)|$. Dizemos também que tal padrão é:

- monocromático, se C é uma função constante;
- rainbow (ou arco-ires), se C é uma função injetiva;
- completo, se F é um grafo completo;
- conexo, se F é conexo.

Observação 7. $\mathbb{Z}^+$ denota o conjunto dos inteiros positivos.

O motivo pelo qual chamamos a estrutura acima de "padrão", é que estamos interessados apenas no padrão em que as cores aparecem nas arestas e não nas cores em si. Isso fica claro quando definimos a noção de isomorfismo entre padrões (a seguir).

Definição 3.2. Dizemos que dois padrões (F_1, C_1) e (F_2, C_2) são isomorfos se existe um isomorfismo de grafos $\phi : V(F_1) \to V(F_2)$ entre F_1 e F_2 e uma função bijetiva $\pi : Im(C_1) \to Im(C_2)$ tal que para todos $u, v \in V(F_1)$ tal que $\{u, v\} \in E(F_1)$ temos

$$\pi\big(C_1(\{u, v\})\big) = C_2(\{\phi(u), \phi(v)\}).$$

Definição 3.3. Seja $\hat{F}$ um padrão e r um inteiro positivo. Dado um grafo G munido de uma r-coloração de arestas $c : E(G) \to [r]$, dizemos que (G, c) contém $\hat{F}$ se existe um isomorfismo entre F e um subgrafo G' de G, digamos $\phi : V(F) \to V(G')$, e uma função injetiva $\pi : [r] \to \mathbb{Z}^+$ tal que para todo $u, v \in V(F)$ tal que $\{u, v\} \in E(F)$ temos

$$\pi\big(c(\{\phi(u), \phi(v)\})\big) = C(\{u, v\})$$

Se (G, c) não contém $\hat{F}$, diremos que (G, c) evita (ou é livre de) $\hat{F}$.

A pergunta inicial: Dado um padrão $\hat{F} = (F, C)$, um inteiro positivo r e um grafo G, quantas são as r-colorações de G que evitam $\hat{F}$?

É imediato que se G não contém cópia de F, então podemos colorir suas arestas de qualquer maneira e teremos uma coloração de G livre de $\hat{F}$. Daí, nesse caso, temos $r^{|E(G)|}$ colorações que evitam $\hat{F}$.

Além disso, se $|Im(C)| > r$, então qualquer r-coloração de G é livre de $\hat{F}$, obtendo novamente $r^{|E(G)|}$ colorações que evitam $\hat{F}$.

Mas no geral, essa contagem seria um pouco mais complicada.

Definição 3.4. Seja G um grafo, r um inteiro positivo e $\hat{F}$ um padrão. Denotemos por $c_{r,\hat{F}}(G)$ a quantidade de r-colorações de G que evitam $\hat{F}$.

Agora, para cada inteiro positivo n, vamos definir

$$c_{r,\hat{F}}(n) = \max\{c_{r,\hat{F}}(G) : |V(G)| = n\}.$$

O que iremos fazer nesta dissertação é exibir resultados conhecidos de cotas para o valor de $c_{r,\hat{F}}(n)$, além de tentar descobrir para quais grafos G de n vértices vale $c_{r,\hat{F}}(n) = c_{r,\hat{F}}(G)$.

Observação 8. Obviamente, se os padrões $\hat{F}_1$ e $\hat{F}_2$ são isomorfos, então para todo grafo G temos que $c_{r,\hat{F}_1}(G) = c_{r,\hat{F}_2}(G)$.

Os dois teoremas seguintes podem ser encontrados em (Hoppen *et al.*, 2014):

Teorema 3.5 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Sejam $\hat{F} = (F,C)$ um padrão e r um inteiro positivo. Então*

$$c_{r,\hat{F}}(n) \geq r^{ex(n,F)}$$

Ainda, se $\hat{F}$ for monocromático temos

$$c_{r,\hat{F}}(n) \leq r^{r\ ex(n,F)}$$

Demonstração. Para provarmos a primeira desigualdade, basta tomarmos o grafo G que não contém cópias de F com n vértices e $ex(n,F)$ arestas. Qualquer r-coloração desse grafo evita $\hat{F}$ e, portanto, $c_{r,\hat{F}}(n) \geq c_{r,\hat{F}}(G) = r^{ex(n,F)}$.

Para provarmos a segunda desigualdade, considere um grafo G que tenha pelo menos uma r-coloração que evita $\hat{F}$. Seja c uma dessas r-colorações. Seja G_i o subgrafo gerador de G tal que $E(G_i) = c^{-1}(i)\ \forall i \in [r]$. Assim, como (G,c) evita $\hat{F}$, então G_i não contém cópias de F e, portanto, $|E(G_i)| \leq ex(n,F)$, o que nos dá $|E(G)| \leq r\ ex(n,F)$ e, portanto, $c_{r,\hat{F}}(G) \leq r^{|E(G)|} \leq r^{r\ ex(n,F)}$, concluindo $c_{r,\hat{F}}(n) \leq r^{r\ ex(n,F)}$. □

Teorema 3.6 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Seja $\hat{F}$ um padrão conexo e r um inteiro positivo. Então ou $\lim_{n\to\infty} c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} = \infty$ ou existe $\lim_{n\to\infty} c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} \in \mathbb{R}$. Defina então $b_{r,\hat{F}} \in \mathbb{R}\cup\{\infty\}$ por*

$$b_{r,\hat{F}} = \lim_{n\to\infty} c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}}$$

Demonstração. Sejam m e n inteiros positivos. Sejam G_1 e G_2 grafos tais que $V(G_1) = m, V(G_2) = n, V(G_1)\cap V(G_2) = \emptyset, c_{r,\hat{F}}(m) = c_{r,\hat{F}}(G_1), c_{r,\hat{F}}(n) = c_{r,\hat{F}}(G_2)$. Então, o grafo G dado por $V(G) = V(G_1)\cup V(G_2)$ e $E(G) = E(G_1)\cup E(G_2)$ tem $m+n$ vértices e ainda

$$c_{r,\hat{F}}(G) = c_{r,\hat{F}}(G_1)c_{r,\hat{F}}(G_2)$$

uma vez que, como $\hat{F}$ é conexo, então colorir as arestas de G evitando $\hat{F}$ é equivalente a colorir as arestas de G_1 e G_2 independentemente evitando tal padrão. Logo

$$c_{r,\hat{F}}(m+n) \geq c_{r,\hat{F}}(m)c_{r,\hat{F}}(n)$$

o que nos dá

$$\log\Big(c_{r,\hat{F}}(m+n)\Big) \geq \log\Big(c_{r,\hat{F}}(m)\Big) + \log\Big(c_{r,\hat{F}}(n)\Big)$$

e, portanto, pelo 2.24, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\log\Big(c_{r,\hat{F}}(n)\Big)}{n} = \mathbb{R}\cup\{\infty\}$. O teorema segue. □

Definição 3.7. Seja Γ uma família de padrões e r um inteiro positivo. Definimos, similarmente, para cada grafo G, $c_{r,\Gamma}(G)$ como o número de r-colorações de G que evitam cada um dos padrões de Γ. Ainda, para cada inteiro positivo n defina

$$c_{r,\Gamma}(n) = \max\{c_{r,\Gamma}(G) : |V(G)| = n\}$$

Note que, se $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ são duas famílias de padrões e $\hat{F} \in \Gamma_1$, então

$$c_{r,\hat{F}}(n) \geq c_{r,\Gamma_1}(n) \geq c_{r,\Gamma_2}(n).$$

3.2 Padrões completos

Iniciaremos esta seção com um resultado de (Benevides *et al.*, 2017). A demonstração descrita abaixo é levemente diferente, mas segue a mesma ideia da apresentada no artigo.

Teorema 3.8 (Fabrício Siqueira Benevides, Carlos Hoppen, Rudini Menezes Sampaio, 2017)**.** *Seja $\hat{F}$ um padrão completo com pelo menos 3 vértices. Então, para todo inteiro positivo n, existe um grafo multipartido completo G com n vértices, tal que*

$$c_{r,\hat{F}}(G) = c_{r,\hat{F}}(n)$$

Demonstração. A ideia aqui é usar a simetrização de Zykov. Seja $\hat{F}$ um padrão e seja G um grafo tal que $c_{r,\hat{F}}(G)$ seja máximo. Agora, para cada $v \in V(G)$ e dada uma coloração $\phi : E(G-\{v\}) \to [r]$ que evita $\hat{F}$, definimos $c(v|(G-\{v\},\phi))$ como o número de maneiras de colorir as arestas incidentes a v de modo que, juntamente com ϕ, toda essa coloração evite $\hat{F}$. Assim,

$$c_{r,\hat{F}}(G) = \sum_{\phi} c(v|(G-\{v\},\phi))$$

Aí que vem o pulo do gato! Tome dois vértices distintos não adjacentes, u e v. Assim, dada uma coloração ϕ das arestas de $G-\{u,v\}$ que evita $\hat{F}$, podemos colorir independentemente:

As arestas incidentes a u de maneira que, juntamente com ϕ, a coloração das arestas de $G-\{v\}$ evita $\hat{F}$;

As arestas incidentes a v de maneira que, juntamente com ϕ, a coloração das arestas de $G-\{u\}$ evita $\hat{F}$.

Como $\hat{F}$ é um padrão completo e u e v não são adjacentes, essa nossa coloração das arestas de G evita $\hat{F}$. Daí,

$$c_{r,\hat{F}}(G) = \sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))c(u|(G-\{u,v\},\phi))$$

Assumindo sem perda de generalidade,

$$\sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))^2 \geq \sum_{\phi} c(u|(G-\{u,v\},\phi))^2$$

então, por Cauchy-Schwarz, temos:

$$\sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))c(u|(G-\{u,v\},\phi)) \leq \sqrt{\left(\sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))^2\right)\left(\sum_{\phi} c(u|(G-\{u,v\},\phi))^2\right)}$$
$$\leq \sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))^2$$

Daí, ao considerarmos o grafo G' com $V(G') = V(G-\{u\}) \cup \{v'\}$ e $E(G') = E(G-\{u\}) \cup \{\{v',t\} : \{v,t\} \in E(G)\}$, temos que

$$c_{r,\hat{F}}(G') = \sum_{\phi} c(v|(G'-\{v,v'\},\phi))c(v'|(G-\{v,v'\},\phi)) = \sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))^2$$

$$\geq \sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))c(u|(G-\{u,v\},\phi)) = c_{r,\hat{F}}(G)$$

Pela maximalidade de G, devemos ter a igualdade, e, portanto,

$$\sum_{\phi} c(v|(G-\{u,v\},\phi))^2 = \sum_{\phi} c(u|(G-\{u,v\},\phi))^2$$

Assim, por simetria, podemos tomar também o grafo G'' com $V(G'') = V(G-\{v\}) \cup \{u'\}$ e $E(G'') = E(G-\{v\}) \cup \{\{u',t\} : \{u,t\} \in E(G)\}$ e ainda temos

$$c_{r,\hat{F}}(G') = c_{r,\hat{F}}(G) = c_{r,\hat{F}}(G'')$$

Em outras palavras, se houverem dois vértices não-adjacentes, então podemos deletar qualquer um deles, "clonar"o outro e ainda obter um grafo com número de colorações que evita $\hat{F}$ máxima.

Dado um grafo G de n vértices, seja Ω_G o conjunto das sequências $(S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n)$ de subconjuntos independentes de $V(G)$ disjuntos dois a dois e tais que $\bigcup_{i=1}^{n} S_i = V(G)$. Defina então

$$\psi(S_1, S_2, \ldots, S_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{|S_i|}{2^i}$$

e assim, podemos definir

$$\psi(G) = \max\{\psi(S_1, S_2, \ldots, S_n) : (S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \Omega_G\}$$

Note que $\Omega_G \neq \emptyset$ pois é possível tomar S_i unitário para todo i. Além disso, $\psi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$ é um racional da forma $\sum_{i=1}^{n} \frac{t_i}{2^i}$, onde $0 \leq t_i \leq n$ é inteiro, então o conjunto $\{\psi(S_1, S_2, \ldots, S_n) : (S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \Omega_G\}$ é finito. Logo, $\psi(G)$ está bem definido.

Dentre todos os grafos G que maximizam $c_{r,\hat{F}}(G)$, considere um que também maximize ψ. Afirmamos que tal G é multipartido completo. Para tal, considere $(S_1, S_2, \ldots, S_n) \in \Omega_G$ tal que

$$\psi(G) = \psi(S_1, S_2, \ldots, S_n)$$

Mostremos que, para cada inteiro não-negativo u, todo vértice de S_u é adjacente a todo vértice de $\bigcup_{i=u+1}^{n} S_i$:

Seja $w \in \bigcup_{i=u+1}^{n} S_i$. Se w não for adjacente a algum vértice de S_u, digamos v_0, então delete cada um dos vértices de $S_u - \{v_0\}$ e, para cada vértice deletado, crie um clone de v_0. Seja

G' o grafo obtido dessa maneira e seja S'_u o conjunto cujos elementos são u, w e os clones de u construídos acima. Ainda para cada $i \neq u$, seja $S'_i = S_i - \{w\}$. Daí, $(S'_1, S'_2, \ldots, S'_n) \in \Omega_{G'}$ e, portanto,

$$\psi(G') \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{|S'_i|}{2^i} \geq \sum_{i=1}^{n} \frac{|S_i|}{2^i} + \frac{1}{2^u} - \frac{1}{2^{u+1}} > \psi(G)$$

uma contradição. Assim, w é adjacente a todo vértice de S_u, seguindo que todo vértice de S_u é adjacente a todo vértice de $\bigcup_{i=u+1}^{n} S_i$.

Note que isso nos mostra que G é um grafo multipartido completo cujas partes são os conjuntos não-vazios dentre $S_1, S_2, \ldots, S_n$. □

Além disso, neste mesmo artigo, prova-se que, se $\hat{F}$ completo não for monocromático e for distinto dos dois padrões completos (F_1, C_1) e (F_2, C_2) abaixo (apenas para $r = 2$ no segundo padrão), então todos os grafos G que maximizam $c_{r,\hat{F}}$ são multipartidos completos.

$$V(F_1) = \{1,2,3\}, \quad V(F_2) = \{1,2,3,4\}$$
$$C_2(\{1,2\}) = C_2(\{1,3\}) = 1, \quad C_2(\{1,4\}) = C_2(\{2,3\}) = C_2(\{2,4\}) = C_2(\{3,4\}) = 2, \quad (3.1)$$
$$\text{e} \quad C_1 = C_2|_{\binom{[3]}{2}}$$

Figura 1 – Padrões de colorações, (F_1, C_1) e (F_2, C_2), para os quais a unicidade do grafo extremal não foi demonstrada



Fonte: elaborado pelo autor.

Sendo $\hat{F} = (K_{k+1}, C)$, é natural nos perguntarmos se, para todo n suficientemente grande, vale que $c_{r,\hat{F}}(n) = r^{ex(n,F)} = r^{t_{n,k}}$, isto é, se $G = T_{n,k}$ é um dos grafos que maximizam o número de tais colorações. A resposta depende do padrão $\hat{F}$. Em (Hoppen *et al.*, 2021) foi provado o seguinte:

Teorema 3.9 (Carlos Hoppen, Hanno Lefmann, Denilson Nolibos, 2021)**.** *Dados inteiros $k \geq 3$, $2 \leq s \leq \binom{k}{2}$ e um grafo G, consideramos todas as r-colorações de G que evitam $\Gamma := \{(K_k, C) : |Im(C)| \geq s\}$. Então, existe $r_0(k,s) \geq 2$ tal que, para todo $r \geq r_0$, vale que*

$$c_{r,\Gamma}(n) = r^{t_{n,k-1}}$$

para todo n suficientemente grande ($n \geq n_0(r)$).

Note que, em particular, para $s = \binom{k}{2}$, temos que, se $\hat{F}$ é um padrão rainbow de um K_k, então para todo inteiro $r \geq 2$ existe um inteiro positivo n_0 tal que, para $n \geq n_0$, vale que $c_{r,\hat{F}}(n) = r^{t_{n,k-1}}$. Veremos mais adiante que tal resultado não segue para padrões em geral.

3.3 Padrões completos monocromáticos

Agora iremos particularizar ainda mais! Vamos supor que $\hat{F}$ seja um padrão completo monocromático, digamos com $k+1$ vértices. Por simplicidade, denotamos $c_{r,k+1}(G) := c_{r,\hat{F}}(G)$ e $c_{r,k+1}(n) := c_{r,\hat{F}}(n)$, que é o número de colorações de arestas de G que evitam um K_{k+1} monocromático.

Perguntamos então quando o grafo $T_{n,k}$ é um dos grafos que maximiza tal número de colorações. Em (Alon *et al.*, 2004), foi provado o seguinte:

Teorema 3.10 (Noga Alon, József Balogh, Peter Keevash, Benny Sudakov, 2004)**.** *Seja $k \geq 2$ um inteiro e seja $r \in \{2,3\}$. Então existe $n(k)$ tal que todo grafo com $n > n(k)$ vértices tem, no máximo, $r^{t_{n,k}}$ colorações de arestas sem K_{k+1} monocromático. Além disso, o grafo $T_{n,k}$ é o único que maximiza tal número de colorações.*

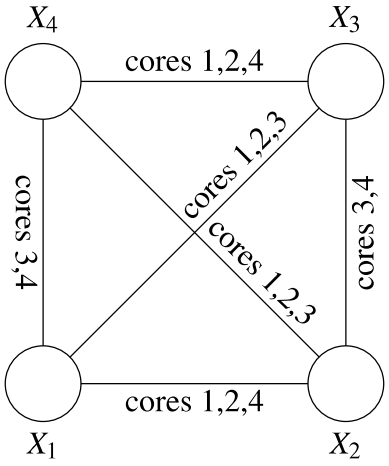
Entretanto, esse resultado não se aplica para quaisquer (r,k). Nesse mesmo artigo, são exibidos contra-exemplos para $(r,k) = (4,2)$ e $(4,3)$, que estão descritos abaixo:

Um contraexemplo para $r = 4$ e $k = 2$ é o seguinte: para n inteiro positivo, considere $T_{n,4}$ e tome os conjuntos X_1, X_2, X_3 e X_4 como na definição 2.18 (do grafo de Turán). Agora vamos colorir, conforme a fig. 2, arbitrariamente as arestas de

$$\begin{cases} T_{n,4}[X_1 \cup X_2] \text{ com as cores } 1,2,4; \\ T_{n,4}[X_3 \cup X_4] \text{ com as cores } 1,2,4; \\ T_{n,4}[X_1 \cup X_3] \text{ com as cores } 1,2,3; \\ T_{n,4}[X_2 \cup X_4] \text{ com as cores } 1,2,3; \\ T_{n,4}[X_1 \cup X_4] \text{ com as cores } 3,4; \\ T_{n,4}[X_2 \cup X_3] \text{ com as cores } 3,4. \end{cases}$$

Note que qualquer coloração desse tipo evita um K_3 monocromático, e, portanto, $c_{4,K_3}(n) \geq 3^{4\lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2} 2^{2\lfloor \frac{n}{4} \rfloor^2} \lll 4^{\frac{n^2}{4}} \geq 4^{t_{n,2}}$, pois $3^{\frac{4}{4^2}} 2^{\frac{2}{4^2}} > 4^{\frac{1}{4}}$.

Figura 2 – Coloração extremal para o problema de Erdős-Rothschild com $r = 4$ e $k = 2$



Fonte: elaborado pelo autor.

Além disso, para $r = 4$ e $k = 3$, temos o seguinte contraexemplo: Para n inteiro positivo, considere $T_{n,9}$ e seja $\mathbb{F}_3$ o corpo dos inteiros módulo 3. Vamos nomear as batatas de $T_{n,9}$ de X_l, $l \in \mathbb{F}_3^2$, e nomear as 4 cores como os seguintes subconjuntos de $\mathbb{F}_3^2$: $C_1 = \{(0,1),(0,2)\}$, $C_2 = \{(1,0),(2,0)\}$, $C_3 = \{(1,1),(2,2)\}$, $C_4 = \{(1,2),(2,1)\}$.

Agora, se $l_1, l_2 \in \mathbb{F}_3^2$ distintos, vamos colorir arbitrariamente as arestas de $T_{n,9}[X_{l_1} \cup X_{l_2}]$ com as 3 cores que não têm $l_1 - l_2$ como elemento.

Note que qualquer uma dessas colorações evita um K_4 monocromático. Com efeito, se houvesse um K_4 monocromático, da cor C_i, então existiriam 4 elementos distintos de $\mathbb{F}_3^2$, digamos a,b,c,d, cuja diferença dois a dois não está em $C_i = \{\alpha, \beta\}$.

Veja que cada $C_j \cup \{(0,0)\}$ é um $\mathbb{F}_3$-módulo e, portanto, devemos ter os conjuntos $\{a, a+\alpha, a+\beta\}$, $\{b, b+\alpha, b+\beta\}$, $\{c, c+\alpha, c+\beta\}$, $\{d, d+\alpha, d+\beta\}$ disjuntos dois a dois, o que é uma contradição, pois a união deles deve ter, no máximo, $|\mathbb{F}_3^2| = 9$.

Logo, $c_{4,K_4}(n) \geq 3^{\binom{9}{2}\lfloor \frac{n}{9} \rfloor^2} \lll 4^{3\lceil \frac{n}{3} \rceil^2} \geq 4^{t_{n,3}}$, pois $3^{\binom{9}{2}\frac{1}{9^2}} > 4^{\frac{3}{3^2}}$.

Observação 9. Sejam $f, g : \mathbb{Z}^+ \to \mathbb{R}^+$. Dizemos que $f(n) \lll g(n)$ se existe uma constante $c > 1$ tal que $f(n) \geq c^n g(n)$ para todo n suficientemente grande.

Nessa seção, nosso objetivo principal será repetir a demonstração do teorema 3.10 de uma maneira mais formal, enfatizando as ideias utilizadas. Começaremos então com o seguinte lema:

Lema 3.11. *Dado $\mu > 0$, se G é um grafo com n vértices, $n \geq n_0(\mu)$, e possui pelo menos $r^{t_{n,k}}$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático, então existe uma partição de $V(G) = \bigcup_{j=1}^{k} V_j$ tal*

que

$$\sum_{j=1}^{k} |E(G[V_j])| < \mu n^2.$$

Note que esse lema nos diz que existem poucas arestas dentro das partes da partição, tornando o grafo G quase que contido em um grafo k-partido completo, que por sua vez possui, no máximo, $t_{n,k}$ arestas.

Demonstração do lema 3.11: Seja $\mathscr{C}(G)$ o conjunto das r-colorações de G que evitam K_{k+1} monocromático. Fixe $0 < \varepsilon < \delta$ com $\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{4}, \varepsilon_0(2,\delta), \varepsilon_0(3,\delta)\right\}$ do lema 2.46. Pelo lema 2.44, existe $M = M(\varepsilon) > 0$ (que não depende de G nem de n) tal que, para cada $C \in \mathscr{C} = \mathscr{C}(G)$, existe uma partição $\mathscr{P} = \mathscr{P}(C)$ (r,ε)-regular com m partes, $\lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \leq m \leq M$, considerando os grafos $G_i(C) = (V(G), C^{-1}(i))$, para $i \in [r]$. Considere agora os cluster graphs $\mathscr{H}_i(C) = (G_i, \mathscr{P}(C), \varepsilon, \delta)$. Note que cada cluster graph não possui $k+1$-clique; caso contrário, pelo lema 2.46, o próprio G munido com a coloração C possuiria um clique monocromático. Chamaremos de arestas C-relevantes as arestas $\{u,v\}$ de G (munidas com a coloração C) tal que $u \in U \in \mathscr{P}$ e $v \in V \in \mathscr{P}$ com (U,V) ε-regular com relação a G_i e ainda $d_{G_i}(U,V) \geq \delta$ para todo $i \in [r]$, definindo assim as demais arestas de G como C-irrelevantes.

Podemos cotar o número de arestas C-irrelevantes da seguinte maneira:

- A quantidade de arestas dentro de uma mesma parte de $\mathscr{P}$ é, no máximo, $k\binom{\lceil \frac{n}{m} \rceil}{2} \leq \frac{(n+m)^2}{2m}$;
- Como temos, no máximo, $\varepsilon\binom{m}{2}$ pares não ε-regulares para cada cor, então temos $\leq \varepsilon\binom{m}{2}(\lceil \frac{n}{m} \rceil)^2 \leq \varepsilon\frac{(n+m)^2}{2}$ arestas C-irrelevantes que possuem extremos em duas partes não ε-regulares para cada cor;
- Agora, note que se duas partes da partição, U e V, têm densidade $< \delta$, então o número de arestas entre os dois é $< \delta|E(U,V)|$. Assim, o número de arestas para cada cor que liga duas partes de densidade $< \delta$ é $\leq \sum_{U,V \in \mathscr{P}} \delta|E(U,V)| \leq \delta\binom{n}{2}$.

Daí, concluímos que o número de arestas C-irrelevantes é, no máximo, $\frac{(n+m)^2}{2m} + r\varepsilon\frac{(n+m)^2}{2} + r\delta\binom{n}{2} \leq 2\varepsilon(n+M)^2 + 3\delta\binom{n}{2} < 8\varepsilon n^2 + \frac{3}{2}\delta n^2 < 4\delta n^2$, para $n \geq M$. Definimos então $E^+(C)$ o conjunto de tais arestas C-relevantes e $E^-(C)$ o conjunto das arestas C-irrelevantes.

A partir desse ponto, iremos separar os casos $r = 2$ e $r = 3$.

Iniciaremos com o caso $r = 3$:

Dada uma partição $\mathscr{P}$ de $V(G)$ em m partes, com a quantidade de vértices em cada parte diferindo no máximo por 1, e uma tripla (F_1, F_2, F_3) de grafos cujo conjunto de vértices

é $\mathscr{P}$ e nenhum deles contém cópias de K_{k+1}. Vamos contar o número de colorações C tal que $G_i(C) = F_i$ para todo $i \in \{1,2,3\}$.

Bem, as arestas de $E^-(C)$ podem ser escolhidas e coloridas de, no máximo,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} \binom{|V(G)|}{j} 3^j \leq \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor}$$

para $\delta < \frac{1}{16}$.

Agora, sendo $e = \{u,v\}$, $u \in U \in \mathscr{P}$ e $v \in V \in \mathscr{P}$, uma das demais arestas, então só posso colorir e com a cor i se $\{U,V\} \in E(F_i)$, uma vez que e irá fazer parte das arestas de $E^+(C)$. Defina então e_s como a quantidade de elementos que aparece em exatamente s dos conjuntos $E(F_1), E(F_2), E(F_3)$, para todo $s \in \{1,2,3\}$. Assim, o número de maneiras de colorir as arestas de G com tal partição e tais $(F_1,F_2,F_3) = (G_1(C), G_2(C), G_3(C))$ é, no máximo,

$$\lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} \prod_{s=1}^{3} (s^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2})^{e_s}.$$

Ora, $2e_2 + 3e_3 \leq e_1 + 2e_2 + 3e_3 = |E(F_1)| + |E(F_2)| + |E(F_3)| \leq 3t_{m,k} \implies e_2 \leq \frac{3}{2}(t_{m,k} - e_3)$. Daí obtemos, no máximo,

$$\lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} (2^{\frac{3}{2}(t_{m,k}-e_3)} 3^{e_3})^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2} \leq \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} (2^{\frac{3}{2}(t_{m,k}-e_3)} 3^{e_3})^{\frac{(n+M)^2}{m^2}}$$

tais colorações. Assim, o número de colorações de G que evita K_{k+1} monocromático é, no máximo,

$$\sum_{(\mathscr{P},F_1,F_2,F_3)} \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} (2^{\frac{3}{2}(t_{m,k}-e_3)} 3^{e_3})^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2}.$$

Dada $\mathscr{P}$, podemos escolher (F_1,F_2,F_3) de, no máximo, $2^{\frac{3m^2}{2}}$ maneiras. E, portanto, o número de parcelas da soma acima é, no máximo,

$$\sum_{m=\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor}^{M} m^n 2^{\frac{3m^2}{2}} \leq M^{n+1} 2^{\frac{3M^2}{2}}.$$

Como o número de colorações de G que evita K_{k+1} monocromático é, pelo menos, $3^{t_{n,k}}$, então, pelo princípio da casa dos pombos, temos que existe $(\mathscr{P},F_1,F_2,F_3)$ com

$$\lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 3^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} (2^{\frac{3}{2}(t_{m,k}-e_3)} 3^{e_3})^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2} \geq \frac{3^{t_{n,k}}}{M^{n+1} 2^{\frac{3M^2}{2}}}.$$

Omitindo algumas contas, é possível mostrar, para n suficientemente grande, a existência de uma função positiva $f : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ com $\lim_{\delta \to 0} f(\delta) = 0$ tal que $e_3 \geq t_{m,k} - f(\delta)\frac{m^2}{2}$.

Seja $\mathscr{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ e defina o grafo F tal que $V(F) = \mathscr{P}$ e $E(F) = E(F_1) \cap E(F_2) \cap E(F_3)$, então F não contém cópias de K_{k+1} e tem, pelo menos, $t_{m,k} - f(\delta)\frac{m^2}{2}$ arestas. Daí, pelo teorema 2.21, F possui um subgrafo gerador F' k-partido com pelo menos $t_{m,k} - 2f(\delta)\frac{m^2}{2}$ arestas. Seja então $V(F) = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ uma partição dos vértices de F' em conjuntos independentes e defina $W_j = \bigcup_{p \in U_j} V_p$ para todo $j \in [k]$. Vamos agora cotar $\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])|$.

Veja que $\sum_{j=1}^{k} |E(F[U_j])| \leq f(\delta)\frac{m^2}{2}$ e, portanto, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])| \leq 4\delta n^2 + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 \left(f(\delta)\frac{m^2}{2} + e_1 + e_2 \right) \leq 4\delta n^2 + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 \left(f(\delta)\frac{m^2}{2} + e_1 + 2e_2 \right) \leq$$

$$4\delta n^2 + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 \left(f(\delta)\frac{m^2}{2} + 3t_{m,k} - 3e_3 \right) \leq 4\delta n^2 + 2\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 f(\delta)m^2 \leq 4\delta n^2 + 2(n+M)^2 f(\delta)$$

$$\leq (4\delta + 8f(\delta))n^2$$

para $n \geq M$. Daí, para $\mu > 0$, tome δ tal que $4\delta + 8f(\delta) < \mu$ e, assim, tomando $\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{4}, \varepsilon_0(2,\delta), \varepsilon_0(3,\delta)\right\}$ e n suficientemente grande ($n > M(\varepsilon)$), temos

$$\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])| < \mu n^2.$$

Para o caso $r = 2$, adaptaremos a demonstração acima:

Dada uma partição $\mathscr{P}$ de $V(G)$ em m partes, com a quantidade de vértices em cada parte diferindo no máximo em 1, e uma tripla (F_1, F_2) de grafos cujo conjunto de vértices é $\mathscr{P}$ e nenhum deles contém cópia de K_{k+1}. Vamos contar o número de colorações C tal que $G_i(C) = F_i$ para todo $i \in \{1,2\}$.

Bem, as arestas de $E^-(C)$ podem ser escolhidas e coloridas de, no máximo,

$$\sum_{j=0}^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} \binom{|V(G)|}{j} 2^j \leq \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor}$$

para $\delta < \frac{1}{16}$.

Agora, sendo $e = \{u, v\}$, $u \in U \in \mathscr{P}$ e $v \in V \in \mathscr{P}$, uma das demais arestas, então só posso colorir e com a cor i se $\{U, V\} \in E(F_i)$, uma vez que e irá fazer parte das arestas de $E^+(C)$. Defina então e_s como a quantidade de elementos que aparece em exatamente s dos conjuntos

$E(F_1), E(F_2)$, para todo $s \in \{1,2\}$, assim o número de maneiras de colorir as arestas de G com tal partição e tais $(F_1,F_2) = (G_1(C), G_2(C))$ é, no máximo,

$$\lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} \prod_{s=1}^{2} (s^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2})^{e_s} = \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2 e_2}$$

Assim, o número de colorações de G que evitam K_{k+1} monocromático é, no máximo,

$$\sum_{(\mathscr{P},F_1,F_2)} \lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2 e_2}$$

Dada $\mathscr{P}$, podemos escolher (F_1,F_2) de, no máximo, $2^{\frac{2m^2}{2}}$ maneiras. Portanto, o número de parcelas da soma acima é, no máximo,

$$\sum_{m=\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \rfloor}^{M} m^n 2^{m^2} \leq M^{n+1} 2^{M^2}$$

Como o número de colorações de G que evitam K_{k+1} monocromático é, pelo menos, $2^{t_{n,k}}$, então, pelo princípio da casa dos pombos, temos que existe $(\mathscr{P},F_1,F_2)$ com

$$\lceil 4\delta n^2 \rceil \binom{\frac{n^2}{2}}{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lfloor 4\delta n^2 \rfloor} 2^{\lceil \frac{n}{m} \rceil^2 e_2} \geq \frac{2^{t_{n,k}}}{M^{n+1} 2^{M^2}}$$

Omitindo algumas contas, é possível mostrar, para n suficientemente grande, a existência de uma função positiva $f : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ com $\lim_{\delta \to 0} f(\delta) = 0$ tal que $e_2 \geq t_{m,k} - f(\delta)\frac{m^2}{2}$. Seja $\mathscr{P} = \{V_1, V_2, \ldots, V_m\}$ e defina o grafo F tal que $V(F) = \mathscr{P}$ e $E(F) = E(F_1) \cap E(F_2)$, então F não contém cópia de K_{k+1} e tem, pelo menos, $t_{m,k} - f(\delta)\frac{m^2}{2}$ arestas. Daí, pelo teorema 2.21, F possui um subgrafo gerador F' k-partido com pelo menos $t_{m,k} - 2f(\delta)\frac{m^2}{2}$ arestas. Seja então $V(F) = \bigcup_{j=1}^{k} U_j$ uma partição dos vértices de F' em conjuntos independentes e defina $W_j = \bigcup_{p \in U_j} V_p$ para todo $j \in [k]$. Vamos agora cotar $\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])|$.

Veja que $\sum_{j=1}^{k} |E(F[U_j])| \leq f(\delta)\frac{m^2}{2}$ e que $e_1 + 2e_2 = |E(F_1)| + |E(F_2)| \leq 2t_{m,k}$. Portanto, obtemos que

$$\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])| \leq 4\delta n^2 + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 (f(\delta)\frac{m^2}{2} + e_1) \leq 4\delta n^2 + \left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 (f(\delta)\frac{m^2}{2} + 2t_{m,k} - 2e_2) \leq$$

$$4\delta n^2 + \frac{3}{2}\left\lceil \frac{n}{m} \right\rceil^2 f(\delta) m^2 \leq 4\delta n^2 + \frac{3}{2}(n+M)^2 f(\delta) \leq (4\delta + 8f(\delta))n^2$$

para $n \geq M$. Daí, para $\mu > 0$, tome δ tal que $4\delta + 8f(\delta) < \mu$ e assim, tomando $\varepsilon < \min\left\{\frac{\delta}{4}, \varepsilon_0(2,\delta), \varepsilon_0(3,\delta)\right\}$ e n suficientemente grande ($n > M(\varepsilon)$), temos

$$\sum_{j=1}^{k} |E(G[W_j])| < \mu n^2.$$

□

De posse desse lema e do seguinte lema, já podemos seguir à demonstração do teorema.

Lema 3.12. *Sejam $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$, G um grafo, k um inteiro positivo e $W_1, W_2, \ldots, W_k$ subconjuntos não-vazios e disjuntos dois a dois de $V(G)$, tal que, para todo $i \neq j$ e todo par de subconjuntos (X,Y) com $X \subset W_i$, $Y \subset W_j$, $|X| \geq \delta^k |W_i|$ e $|Y| \geq \delta^k |W_j|$, temos que $|E_G(X,Y)| \geq \delta |X||Y|$. Então, existe $v_i \in W_i$ para todo $i \in [k]$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um clique em G.*

Demonstração. A prova seguirá por indução em k. O caso $k = 1$ é imediato, pois o conjunto W_1 é não-vazio. Para $k = 2$, também é imediato, pois para $X = W_1$ e $Y = W_2$ temos $d_G(W_1, W_2) \geq \delta$, e portanto existe uma aresta de W_1 para W_2. Suponha o resultado verdadeiro para algum $k-1 \geq 2$. Vamos mostrar a veracidade para k.

Dados $W_1, W_2, \ldots, W_k$ satisfazendo as condições acima, defina, para todo $i \in [k-1]$,

$$W_k^{(i)} = \{v \in W_k : |N_G(v) \cap W_i| < \delta |W_i|\}.$$

Daí,

$$|E_G(W_k^{(i)}, W_i)| = \sum_{v \in W_k^{(i)}} |N_G(v) \cap W_i| < \sum_{v \in W_k^{(i)}} \delta |W_i| = \delta |W_k^{(i)}||W_i|,$$

e, portanto, devemos ter $|W_k^{(i)}| < \delta^k |W_k|$. Logo,

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k-1} W_k^{(i)} \right| < (k-1)\delta^k |W_k| < |W_k|,$$

e, portanto, existe $v_k \in W_k \setminus \bigcup_{i=1}^{k-1} W_k^{(i)}$. Defina então $W_i' = W_i \cap N_G(v_k)$ para todo $i \in [k-1]$. Assim, pela escolha de v_k, temos que $|W_i'| \geq \delta |W_i|$, o que nos dá que, para cada $1 \leq i < j \leq k-1$, se $X \subset W_i'$ e $Y \subset W_j'$ com $|X| \geq \delta^{k-1} |W_i'| \geq \delta^k |W_i|$ e $|Y| \geq \delta^{k-1} |W_j'| \geq \delta^k |W_j|$, então segue que $|E_G(X,Y)| \geq \delta |X||Y|$.

Aplicando a hipótese de indução, segue que existe $v_i \in W_i'$ para todo $i \in [k-1]$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k-1}\}$ é um clique em G. Portanto, $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é um clique em G. □

Demonstração do teorema 3.10: Seja $n \geq n_0 = n_0(10^{-8k})$ do lema 3.11 e seja

$$\tilde{n} = \max\{n_0, n_1, n_2, n_3, n_4\},$$

onde n_1, n_2, n_3, n_4 serão definidos posteriormente. Mostremos que, se G com $n \geq \tilde{n}+2$ vértices tem $r^{t_{n,k}+m}, m \geq 0$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático e G não é isomorfo a $T_{n,k}$, então uma das seguintes situações acontece:

- Existe um vértice $x \in V(G)$ tal que $G-\{x\}$ possui pelo menos $r^{t_{n-1,k}+m+1}$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático (note que $G-\{x\}$ não pode ser isomorfo a $T_{n-1,k}$, pois tem mais de $r^{t_{n-1,k}}$ r-colorações).
- Existem vértices distintos $x, y \in V(G)$ tais que $G-\{x,y\}$ possui pelo menos $r^{t_{n-2,k}+m+2}$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático (note que $G-\{x,y\}$ não pode ser isomorfo a $T_{n-2,k}$, pois tem mais de $r^{t_{n-2,k}}$ r-colorações).

Usando indutivamente este argumento, iremos encontrar um grafo $\tilde{G}$ com $n' \in \{\tilde{n}, \tilde{n}+1\}$ vértices tal que, com pelo menos $r^{t_{n',k}+m+n-n'} \geq r^{t_{\tilde{n},k}+n-\tilde{n}-1} > r^{(\tilde{n}+1)^2}$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático para $n \geq \tilde{n}^2+3\tilde{n}+2$, contradizendo o fato de que $\tilde{G}$ tem no máximo $\frac{(\tilde{n}+1)^2}{2}$ arestas e, portanto, no máximo $r^{\frac{(\tilde{n}+1)^2}{2}}$ r-colorações.

Com isso, se G é um grafo com pelo menos $\tilde{n}^2+3\tilde{n}+2$ vértices e tem pelo menos $r^{t_{n,k}}$ r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático, então G deve ser isomorfo ao grafo $T_{n,k}$, o que concluiria a demonstração do teorema.

Bem, seja G, não isomorfo a $T_{n,k}$, com $n > \tilde{n}$ vértices e $r^{t_{n,k}+m}, m \geq 0$, r-colorações que evitam K_{k+1} monocromático. Se tivermos $\delta(G) < \delta(T_{n,k})$, então existe $x \in V(G)$ com $deg_G(x) \leq \delta(T_{n,k})-1$. Daí, as arestas incidentes a x poderiam ser coloridas de, no máximo, $r^{\delta(T_{n,k})-1}$ maneiras. Então o número de r-colorações de $G-\{x\}$ que evitam K_{k+1} monocromático seria pelo menos $r^{t_{n,k}+m-\delta(T_{n,k})+1} = r^{t_{n-1,k}+m+1}$, concluindo assim a existência de x. Assuma, então, que $\delta(G) \geq \delta(T_{n,k})$.

Considere agora uma partição $V(G) = \bigcup_{i=1}^{k} V_i$ que minimiza $\sum_{i=1}^{k} |E(G[V_i])|$. Pelo lema 3.11, temos que $\sum_{i=1}^{k} |E(G[V_i])| < 10^{-8k}n^2$ e ainda temos que, para todo $x \in V(G)$: Se $x \in V_j$, então $|N_G(x) \cap V_j| \leq |N_G(x) \cap V_i|$ para todo $i \neq j$, caso contrário, se existisse i_0 com $|N_G(x) \cap V_j| > |N_G(x) \cap V_{i_0}|$, então, definindo $V_j' = V_j \setminus \{x\}$, $V_{i_0}' = V_{i_0} \cup \{x\}$ e $V_i' = V_i$ para todo $i \neq i_0, j$, segue que $\sum_{i=1}^{k} |E(G[V_i'])| < \sum_{i=1}^{k} |E(G[V_i])|$, uma contradição.

Mostremos agora que $||V_i| - \frac{n}{k}| < 10^{-5k}n$: Ora, se $|V_i| \geq \frac{n}{k} + 10^{-6k}n$ para algum i,

segue que $|\bigcup_{j\neq i} V_j| \leq \frac{k-1}{k}n - 10^{-6k}n$ e, portanto, para cada $v \in V_i$, segue que $|N_G(v) \cap V_i| \geq \delta(T_{n,k}) - \frac{k-1}{k}n + 10^{-6k}n \geq 10^{-6k}n - 1$ e assim

$$|E(G[V_i])| = \frac{1}{2}\sum_{v\in V_i} |N_G(v)\cap V_i| \geq \frac{1}{2}(10^{-6k}n-1)\left(\frac{1}{k}+10^{-6k}\right)n > 10^{-8k}n^2$$

uma contradição. Assim, $|V_i| < \frac{n}{k} + 10^{-6k}n$ para todo $i \in [k]$. Agora, note que, para cada $i \in [k]$,

$$|V_i| = n - \sum_{j\neq i} |V_j| \geq n - (k-1)\left(\frac{n}{k} + 10^{-6k}n\right) = \frac{n}{k} - (k-1)10^{-6k}n > \frac{n}{k} - 10^{-5k}n$$

concluindo assim que $||V_i| - \frac{n}{k}| < 10^{-5k}n$.

A partir de agora, iremos focar no caso $r = 3$ (o caso $r = 2$ é uma simples adaptação e, portanto, iremos omití-lo):

Seja novamente $\mathscr{C} = \mathscr{C}(G)$ o conjunto das 3-colorações de G que evitam K_{k+1} monocromático. Dividamos o problema em 2 casos:

• 1º caso: Existe $x \in V(G)$, digamos $x \in V_1$, tal que $|N(x) \cap V_1| \geq \frac{n}{300k}$.

Note então que $|N(x) \cap V_i| \geq \frac{n}{300k}$ para todo $i \in [k]$. Seja

$$\mathscr{C}_1 = \{c \in \mathscr{C} : \text{ existe } l \in [3] \text{ e } W_j \subset V_j \forall j \in [k], |W_j| \geq \frac{n}{1000k} \text{ tal que } \bigcup_{j=1}^{k} \{\{x,w\} : w \in W_j\} \subset c^{-1}(l)\}.$$

Agora, tome $c \in \mathscr{C}_1$ e tais l e W_j como na definição acima. Daí, como c evita K_{k+1} monocromático, então a coloração c restrita a $G[\bigcup_{j=1}^{k} W_j]$ não contém K_k da cor l. Daí, considerando o subgrafo gerador G' de $G[\bigcup_{j=1}^{k} W_j]$ com apenas as arestas da cor l, temos que, pelo lema 3.12 (tomando $\delta = \frac{1}{10}$), existe um par (i,j) e subconjuntos $X_i \subset W_i$ e $X_j \subset W_j$ com $|X_i| \geq 10^{-k}|W_i|$, $|X_j| \geq 10^{-k}|W_j|$ e $|E_{G'}(X_i,X_j)| < \frac{1}{10}|X_i||X_j|$. Daí, dado c, existe uma tripla $(l,i,j) \in [3]\times[k]\times[k]$ com $i < j$ e subconjuntos $X_i \in W_i$ e $X_j \in W_j$ com $|X_i| \geq 10^{-k}|W_i|$ e $|X_j| \geq 10^{-k}|W_j|$ cuja quantidade de arestas da cor l entre X_i e X_j é, no máximo, $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$. Com isso, já podemos achar uma cota superior para $\mathscr{C}_1$:

Fixando $(l,i,j), \alpha = |X_i|, \beta = |X_j|$, o número de tais colorações em $\mathscr{C}_1$ é, no máximo,

$$\begin{aligned}
&\left(\binom{|V_i|}{\alpha}\binom{|V_j|}{\beta}\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{\alpha\beta}{10}\rfloor}\binom{\alpha\beta}{p}2^{\alpha\beta-p}\right)3^{t_{n,k}+10^{-8k}n^2-\alpha\beta} \\
&\qquad\leq \binom{|V_i|}{\alpha}\binom{|V_j|}{\beta}\left(\frac{\alpha\beta}{10}+1\right)\binom{\alpha\beta}{\lfloor\frac{\alpha\beta}{10}\rfloor}2^{\alpha\beta}3^{t_{n,k}+10^{-8k}n^2-\alpha\beta} \\
&\qquad< 3^{t_{n,k}}3^{(f_k(n)-\phi_k)n^2}.
\end{aligned}$$

Onde $\phi_k > 0$ é uma constante e $\lim_{n\to\infty} f_k(n) = 0$ (omitimos as contas, mas elas podem ser encontradas no artigo mencionado). Daí

$$|\mathscr{C}_1| \leq 3\binom{k}{2}\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)^2 3^{t_{n,k}}3^{(f_k(n)-\phi_k)n^2},$$

e assim, mudando a constante ϕ_k e a função f_k, se necessário, obtemos

$$|\mathscr{C}_1| \leq 3^{t_{n,k}}3^{(f_k(n)-\phi_k)n^2}.$$

Daí, para n suficientemente grande, $n \geq n_1$, obtemos $|\mathscr{C}_1| \leq 3^{t_{n,k}-1}$ e, portanto, $|\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1| \geq 3^{t_{n,k}+m} - 3^{t_{n,k}-1} \geq 3^{t_{n,k}+m-1}$. Seja então $c \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$, daí existem $i_1, i_2, i_3 \in [k]$ tais que existem menos de $\frac{n}{1000k}$ arestas da cor l entre x e vértices de V_{i_l} para todo $l \in [3]$. Como $|N(x) \cap V_i| \geq \frac{n}{300k}$ para todo $i \in [k]$, então não podemos ter $i_1 = i_2 = i_3$.

Defina a função ρ definida em $\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$ que leva uma coloração c em sua projeção no subgrafo gerador pelas arestas incidentes a x.

Se tivermos i_1, i_2, i_3 distintos dois a dois, então para (i_1, i_2, i_3) fixo, a quantidade de colorações $\rho(c)$ é, no máximo,

$$\left(\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{p}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n-p}\right)^3 3^{(k-3)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}$$
$$\leq \left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-3)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}.$$

E assim, a quantidade de colorações em $\rho(c)$ é, no máximo,

$$k(k-1)(k-2)\left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-3)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}.$$

Agora, para $i_1 \neq i_2 = i_3$, então para (i_1, i_2) fixo, a quantidade de colorações de $\rho(c)$ é, no máximo,

$$\left(\sum_{p=0}^{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{p}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n-p}\right)^3 3^{(k-2)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}$$
$$\leq \left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-2)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}.$$

E assim, a quantidade de colorações em $\rho(c)$ é, no máximo,

$$k(k-1)\left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-2)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}.$$

Com isso, concluímos que

$$|Im(\rho)| \leq k(k-1)(k-2)\left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-3)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}+$$
$$+3k(k-1)\left(\left(1+\frac{n}{1000k}\right)\binom{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}{\lfloor\frac{n}{1000k}\rfloor}2^{\frac{n}{k}+10^{-5k}n}\right)^3 3^{(k-2)\left(\frac{n}{k}+10^{-5k}n\right)}.$$

Como $3^{t_{n,k}+m-1} \leq |\mathscr{C}\setminus\mathscr{C}_1| \leq |Im(\rho)|\cdot c_{3,k+1}(G-\{x\})$, obtemos, para $n \geq n_2$ (omitindo algumas contas):

$$c_{3,k+1}(G-\{x\}) \geq \frac{3^{t_{n,k}+m-1}}{|Im(\rho)|} \geq 3^{t_{n-1,k}+m+1}$$

concluindo assim o 1º caso.

• 2° caso: Para todo $v \in V(G)$, se $v \in V_i$, então $|N(x)\cap V_i| < \frac{n}{300k}$.

Bem, veja que G não é k-partido, caso contrário ele teria menos que $t_{n,k}$ arestas e, portanto, teria menos que $3^{t_{n,k}}$ colorações, o que é uma contradição. Assim, ao menos um dos grafos $G[V_i]$ não é vazio, digamos, $\{x,y\} \in E(G[V_1])$. De maneira similar, defina

$$\mathscr{C}_1 = \{c \in \mathscr{C} : \text{ existem } W_j \subset V_j \ \forall\ 2 \leq j \leq k, |W_j| \geq \frac{n}{1000k} \text{ tal que}$$
$$\bigcup_{j=2}^{k}\{\{x,w\},\{y,w\} : w \in W_j\} \subset c^{-1}(c(\{x,y\}))\}.$$

Seja $c \in \mathscr{C}_1$ e W_j's como acima. Como c evita um K_{k+1} da cor $c(\{x,y\})$, então a restrição de c ao subgrafo $G[\bigcup_{j=2}^{k} W_j]$ não contém um K_{k-1} da cor $c(\{x,y\})$. Daí, considerando o subgrafo gerador G' de $G[\bigcup_{j=2}^{k} W_j]$ com apenas as arestas da cor $c(\{x,y\})$, temos que, pelo lema 3.12 (tomando $\delta = \frac{1}{10}$), existe um par (i,j) e subconjuntos $X_i \subset W_i$ e $X_j \subset W_j$ com $|X_i| \geq 10^{-(k-1)}|W_i|$, $|X_j| \geq 10^{-(k-1)}|W_j|$ e $|E_{G'}(X_i,X_j)| < \frac{1}{10}|X_i||X_j|$. Daí, dado c, existe uma tripla $(l,i,j) \in [3]\times[k]\setminus\{1\}\times[k]\setminus\{1\}$ com $l = c(\{x,y\})$, $i<j$ e subconjuntos $X_i \in W_i$ e $X_j \in W_j$ com $|X_i| \geq 10^{-(k-1)}|W_i|$ e $|X_j| \geq 10^{-(k-1)}|W_j|$, cuja quantidade de arestas da cor l entre X_i e X_j é, no máximo, $\frac{1}{10}|X_i||X_j|$. Com isso, já podemos achar uma cota superior para $\mathscr{C}_1$:

Fixando $(l,i,j), \alpha = |X_i|, \beta = |X_j|$, o número de tais colorações em $\mathscr{C}_1$ é, no máximo,

$$\left(\binom{|V_i|}{\alpha} \binom{|V_j|}{\beta} \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{\alpha\beta}{10} \rfloor} \binom{\alpha\beta}{p} 2^{\alpha\beta - p} \right) 3^{t_{n,k} + 10^{-8k} n^2 - \alpha\beta}$$

$$\leq \binom{|V_i|}{\alpha} \binom{|V_j|}{\beta} \left(\frac{\alpha\beta}{10} + 1 \right) \binom{\alpha\beta}{\lfloor \frac{\alpha\beta}{10} \rfloor} 2^{\alpha\beta} 3^{t_{n,k} + 10^{-8k} n^2 - \alpha\beta}$$

$$< 3^{t_{n,k}} 3^{(f_k(n) - \phi_k) n^2}.$$

onde $\phi_k > 0$ é uma constante e $\lim_{n\to\infty} f_k(n) = 0$ (omitimos as contas, mas elas podem ser encontradas no artigo mencionado). Daí

$$|\mathscr{C}_1| \leq 3 \binom{k-1}{2} (\frac{n}{k} + 10^{-5k} n)^2 3^{t_{n,k}} 3^{(f_k(n) - \phi_k) n^2}$$

e assim, mudando a constante ϕ_k e a função f_k, se necessário, obtemos

$$|\mathscr{C}_1| \leq 3^{t_{n,k}} 3^{(f_k(n) - \phi_k) n^2}.$$

Daí, para n suficientemente grande, $n \geq n_3$, obtemos $|\mathscr{C}_1| \leq 3^{t_{n,k}-1}$ e, portanto, $|\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1| \geq 3^{t_{n,k}+m} - 3^{t_{n,k}-1} \geq 3^{t_{n,k}+m-1}$.

Agora tome $c \in \mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$. Assim, existe $i \in [k] \setminus \{1\}$ tal que o conjunto

$$H_j = \{v \in V_i : \{v,x\}, \{v,y\} \in c^{-1}(c(\{x,y\}))\}$$

tem menos que $\frac{n}{1000k}$ elementos. Defina a função ρ definida em $\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1$ que leva uma coloração c em sua projeção no subgrafo gerador pelas arestas incidentes a x ou y. Assim, fixo o par $(l,j) \in [3] \times [k] \setminus \{1\}$, vamos cotar o número de colorações $\rho(C)$ com $c(\{x,y\}) = l$ e j como definido acima.

Note que, para cada $z \in V_j \setminus W_j$, o par de arestas $(\{z,x\}, \{z,y\})$, caso existam, pode assumir 8 possibilidades de coloração, uma vez que a única proibida é ambas as cores serem l. Daí, o número de tais colorações em $\rho(c)$ é, no máximo,

$$\left(\sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{1000k} \rfloor} \binom{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n}{p} 8^{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n - p} \right) 3^{2((k-2)(\frac{n}{k} + 10^{-5k} n) + \frac{n}{300k})}$$

$$\leq \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{1000k} \right\rfloor\right) \binom{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n}{\lfloor \frac{n}{1000k} \rfloor} 8^{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n} 3^{2((k-2)(\frac{n}{k} + 10^{-5k} n) + \frac{n}{300k})}$$

e, portanto,

$$|Im(\rho)| \leq 3(k-1) \left(1 + \left\lfloor \frac{n}{1000k} \right\rfloor\right) \binom{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n}{\lfloor \frac{n}{1000k} \rfloor} 8^{\frac{n}{k} + 10^{-5k} n} 3^{2((k-2)(\frac{n}{k} + 10^{-5k} n) + \frac{n}{300k})}.$$

Finalmente, obtemos

$$3^{t_{n,k}+m-1} \leq |\mathscr{C} \setminus \mathscr{C}_1| \leq |Im(\rho)| c_{3,k+1}(G - \{x,y\})$$

o que nos dá, para $n \geq n_4$,

$$c_{3,k+1}(G - \{x,y\}) \geq \frac{3^{t_{n,k}+m-1}}{|Im(\rho)|} \geq 3^{t_{n-2,k}+m+2}$$

como queríamos. □

3.4 Uma variação do problema de padrões completos monocromáticos

Como em (Pikhurko; Staden, 2024), temos a seguinte definição:

Definição 3.13. Seja s um inteiro positivo e $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_s) \in \mathbb{N}^s$ um vetor com s entradas inteiras positivas. Dado um grafo G, defina $F(G, \mathbf{k})$ como o número de s colorações $\chi : E(G) \to [s]$ tal que $\chi^{-1}(i)$ evita K_{k_i} para todo $i \in [s]$ (diremos que tais colorações evitam $K_{\mathbf{k}}$). Defina ainda, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$F(n, \mathbf{k}) = \max_{|V(G)|=n} F(G, \mathbf{k}).$$

Note que, neste problema, não queremos evitar padrões, mas sim grafos coloridos específicos. Lembre-se de que, quando se evita um padrão (F, C), estamos interessados em evitar um subgrafo isomorfo a F, que tem uma coloração apenas *isomorfa* a C, mas que não precisa ser exatamente C. Nessa seção, a coloração do subgrafo precisará necessariamente ser C.

Novamente, a pergunta natural é: Qual o valor de $F(n, \mathbf{k})$ e, para quais grafos G de n vértices temos $F(G, \mathbf{k}) = F(n, \mathbf{k})$?

Definição 3.14. Defina como **k**-extremais os grafos G de n vértices que satisfazem $F(G, \mathbf{k}) = F(n, \mathbf{k})$.

Na seção anterior, estudamos o caso em que $\mathbf{k} = (k+1, k+1, \ldots, k+1) \in \mathbb{N}^s$. Vimos que $F(n, (k+1, k+1)) = 2^{t_{n,k}}$ com igualdade apenas no grafo $T_{n,k}$ para todo n suficientemente grande e $F(n, (k+1, k+1, k+1)) = 3^{t_{n,k}}$ com igualdade apenas no grafo $T_{n,k}$ para todo n suficientemente grande. Além disso, para $s \geq 4$ e $\mathbf{k} = (k+1, k+1, \ldots, k+1)$, temos $F(n, (k+1, k+1, \ldots, k+1)) > s^{t_{n,k}}$.

Nessa seção, exibiremos um resultado de (Pikhurko; Staden, 2024) que, se $\mathbf{k}$ tem uma propriedade específica chamada *propriedade de extensão forte*, então os grafos de n vértices

que maximizam F são multipartidos completos, e o tamanho de suas partes pode ser determinado através de um problema de otimização. Entretanto, no caso de $\mathbf{k}$ qualquer, garantimos ao menos um grafo multipartido completo maximal, além de uma aproximação assintótica para $\log_2 F(n,\mathbf{k})$. Para isso, inicialmente, vamos começar com algumas definições.

Definição 3.15. Dados inteiros $l \geq 0$, $r,s \geq 2$ e $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$, defina $\Phi_l(r,\mathbf{k})$ como o conjunto das funções $\phi : \binom{[r]}{2} \to 2^{[s]}$ tal que $|\phi(t)| \geq l$ para todo $t \in \binom{[r]}{2}$ e, para cada $c \in [s]$, temos que o subgrafo gerador de $([r], \binom{[r]}{2})$ pelas arestas

$$\phi^{-1}(c) := \{\{i,j\} \in \binom{[r]}{2} : c \in \phi(\{i,j\})\}$$

é livre de K_{k_c}.

Observação 10. Dado um conjunto S, o conjunto 2^S é a família dos subconjuntos de S.

Note que, se $l \geq 1$ e $r \geq R(\mathbf{k})$ como no teorema 2.49, então $\Phi_l(r,\mathbf{k}) = \emptyset$, uma vez que, se existisse $\phi \in \Phi_l(r,\mathbf{k})$, considerando a s-coloração de arestas de K_r dada por $\tilde{\phi} : \binom{[r]}{2} \to [s]$, com $\tilde{\phi}(e) = \min \phi(e)$, como $r \geq R(\mathbf{k})$, segue que existe $c \in [s]$ cujo subgrafo gerador de K_r pelas arestas $\tilde{\phi}^{-1}(c)$ contém uma cópia de K_{k_c}, onde $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \ldots, k_s)$. Daí, $\phi^{-1}(c)$ contém uma cópia de K_{k_c}, uma contradição.

Definição 3.16. Dado $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$, defina FEAS*$(\mathbf{k})$ como o conjunto das triplas $(r,\phi,\alpha) \in \mathbb{N} \times \Phi_2(r,\mathbf{k}) \times (\mathbb{R}^+)^r$ tais que $r \geq 2$ e $||\alpha||_1 = 1$.
Defina ainda, para cada $(r,\phi,\alpha) \in$ FEAS*$(\mathbf{k})$, a função

$$q(\phi,\alpha) := 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \alpha_i \alpha_j \log_2 |\phi(\{i,j\})|.$$

Observação 11. Para $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_m) \in \mathbb{R}^m$, definimos $||\mathbf{v}||_1 = |v_1| + |v_2| + \ldots + |v_m|$.

Proposição 3.17. *Dado* $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$*, o conjunto*

$$\{q(\phi,\alpha) : (r,\phi,\alpha) \in \mathit{FEAS}^*(\mathbf{k})\}$$

admite um elemento máximo. Iremos denotar tal elemento máximo por $Q(\mathbf{k})$.

Demonstração. Inicialmente, veja que se $(r,\phi,\alpha) \in$ FEAS*$(\mathbf{k})$, então $r < R(\mathbf{k})$. Além disso, para cada $1 \leq r < R(\mathbf{k})$, o conjunto $\Phi_2(r,\mathbf{k})$ é finito, e, portanto, o conjunto

$$W := \{(r,\phi) : (r,\phi,\alpha) \in \text{FEAS*}(\mathbf{k})\}$$

é finito.

Para cada um de tais (r,ϕ), considere a função $q_{r,\phi} : \mathbb{R}^r_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ dada por

$$q_{r,\phi}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) := 2\sum_{1\leq i<j\leq r}\alpha_i\alpha_j\log_2|\phi(\{i,j\})|.$$

Como tal função é contínua, então sua restrição ao compacto $\{\alpha \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} : ||\alpha||_1 = 1\}$ admite um valor máximo $M_{r,\phi}$. Seja então $M_{r_0,\phi_0} = \max_{(r,\phi)\in W} M_{r,\phi}$, com r_0 mínimo.

Afirmamos que se $q_{r_0,\phi_0}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{r_0}) = M_{r_0,\phi_0}$, então $\alpha_i \neq 0$ para todo $i \in [r_0]$. Com efeito, assuma que exista $i \in [r_0]$ tal que $\alpha_i = 0$, defina então $\phi_1 \in \Phi_2(r_0-1,\mathbf{k})$ pondo

$$\phi_1(\{j,j'\}) = \begin{cases} \phi_0(\{j,j'\}), \text{se} j,j' \neq i; \\ \phi_0(\{j,r_0\}), \text{se} j' = i; \end{cases}$$

e com isso temos que $q_{r_0-1,\phi_1}(\alpha_1,\ldots,\alpha_{i-1},\alpha_{r_0},\alpha_{i+1},\ldots,\alpha_{r_0-1}) = M_{r_0,\phi_0} = \max_{(r,\phi)\in W} M_{r,\phi}$ e, portanto, $M_{r_0-1,\phi_1} = \max_{(r,\phi)\in W} M_{r,\phi}$, contradizendo a minimalidade de r_0.

Portanto, $\max\{q(\phi,\alpha) : (r,\phi,\alpha) \in \text{FEAS}^*(\mathbf{k})\} = \max_{(r,\phi)\in W} M_{r,\phi}$. □

Nesse ponto, é natural nos perguntarmos qual a motivação de $Q(\mathbf{k})$ em relação a $F(n,\mathbf{k})$... Para isso, fixe inteiros positivos $r,a_1,a_2,\ldots,a_r$ tais que $\sum_{i=1}^{r} a_i = n$ e fixe $\phi \in \Phi_2(r,\mathbf{k})$. Considere o grafo multipartido completo G de n vértices cujas batatas são $X_1,X_2,\ldots,X_r$ e tais que $|X_i| = a_i$ para todo $i \in [r]$. Agora, considere as colorações $\chi : E(G) \to [s]$ tais que, se $u \in X_i, v \in X_j, i \neq j$, então $\chi(\{u,v\}) \in \phi(\{i,j\})$.

Note que cada uma dessas colorações χ evita $K_{\mathbf{k}}$ e, portanto, obtemos

$$F(G,\mathbf{k}) \geq \prod_{1\leq i<j\leq r}|\phi(\{i,j\})|^{a_ia_j}$$

o que nos dá

$$\frac{\log_2 F(G,\mathbf{k})}{\frac{n^2}{2}} \geq 2\sum_{1\leq i<j\leq r}\frac{a_i}{n}\frac{a_j}{n}\log_2|\phi(\{i,j\})|.$$

Tomando $\alpha = (\frac{a_1}{n},\frac{a_2}{n},\ldots,\frac{a_r}{n})$, obtemos

$$\frac{\log_2 F(G,\mathbf{k})}{\frac{n^2}{2}} \geq q(\phi,\alpha).$$

Note, entretanto, que (r,α,ϕ) é um elemento de $\text{FEAS}^*(\mathbf{k})$ tal que $n\alpha$ tem entradas inteiras (positivas) e, com isso, não conseguimos garantir que $\frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\frac{n^2}{2}} \geq Q(\mathbf{k})$. Entretanto, vale que

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}} \geq Q(\mathbf{k}).$$

Com efeito, seja $(r,\phi,\alpha_0) \in \text{FEAS}^*(\mathbf{k})$ tal que $q_{r,\phi}(\alpha_0) = q(\phi,\alpha_0) = Q(\mathbf{k})$ e r é mínimo. Assim, tomando $q_{r,\phi}$ para $q : \{\alpha \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} : ||\alpha||_1 = 1\} \to \mathbb{R}$, pondo

$$q_{r,\phi}(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_r) := 2\sum_{1\leq i<j\leq r} \alpha_i\alpha_j \log_2 |\phi(\{i,j\})|$$

temos, então, como provado na proposição 3.17 que q atinge um máximo em α_0.

Tome agora $\varepsilon \in (0,1)$, então por $\{\alpha \in \mathbb{R}^r_{\geq 0} : ||\alpha||_1 = 1\}$ ser compacto, q é uniformemente contínua e, assim, existe $\delta > 0$ tal que $||u-v||_1 < \delta \implies |q(u)-q(v)| < \varepsilon$.

Assim, para $n > \max\{\frac{r}{\varepsilon}, \frac{2r}{\delta}, \frac{1}{\alpha_i} : i \in [r]\}$ inteiro, defina $\alpha_n = \left(\frac{\lfloor n\beta_1\rfloor}{n}, \frac{\lfloor n\beta_2\rfloor}{n}, \ldots, \frac{\lfloor n\beta_{r-1}\rfloor}{n}, 1 - \sum_{i=1}^{r-1}\frac{\lfloor n\beta_i\rfloor}{n}\right)$, onde $\alpha_0 = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r)$. Daí

$$||\alpha_n - \alpha_0||_1 = \sum_{i=1}^{r-1}\beta_i - \frac{\lfloor n\beta_i\rfloor}{n} + |\beta_r - 1 + \sum_{i=1}^{r-1}\frac{\lfloor n\beta_i\rfloor}{n}| = 2\sum_{i=1}^{r-1}\beta_i - \frac{\lfloor n\beta_i\rfloor}{n} < \frac{2(r-1)}{n} < \delta$$

e, portanto, $q(\alpha_n) \geq q(\alpha_0) - \varepsilon$. Como todas as entradas de α_n são positivas, segue que

$$\frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\frac{n^2}{2}} \geq q(\alpha_n) \geq q(\alpha_0) - \varepsilon = Q(\mathbf{k}) - \varepsilon.$$

Como $\binom{n}{2} \sim \frac{n^2}{2}$, segue que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}} \geq Q(\mathbf{k}).$$

Iremos provar agora, como pode ser encontrado em (Alon *et al.*, 2004), que a função $n \mapsto \frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}}$ é não-crescente e, em particular, existe o limite abaixo e ainda temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}} \geq Q(\mathbf{k}).$$

Com isso, podemos finalmente afirmar que

$$\frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}} \geq Q(\mathbf{k}).$$

Lema 3.18. *Fixado* $\mathbf{k}$*, a função*

$$f(n) = F(n,\mathbf{k})^{\frac{1}{\binom{n}{2}}}$$

é não-crescente.

Iremos usar aqui o lema 3.29, que pode ser consultado na seção seguinte.

Demonstração. Seja G um grafo de m vértices tal que $F(G,\mathbf{k}) = f(m)$ e sejam $V(G) = \{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Para cada $i \in [m]$, defina $E_i = \{j \in [n] : e_j \in E(G - \{v_i\})\}$.
Seja agora

$$\mathscr{F} = \{(\chi(e_1), \chi(e_2), \ldots, \chi(e_n)) : \chi \text{ é uma } s\text{-coloração de } G \text{ que evita } K_{\mathbf{k}}\}.$$

Assim, para cada $i \in [m]$, os elementos de $\mathscr{F}_{E_i}$ são s-colorações de $G - \{v_i\}$ que evitam $K_{\mathbf{k}}$ e, portanto, $|\mathscr{F}_{E_i}| \leq f(m-1)$.
Como para cada $j \in [n]$, se $e_j = \{v_\alpha, v_\beta\}$, então $j \in E_i$ para todo $i \in [m] \setminus \{\alpha, \beta\}$, temos pelo lema 3.29

$$f(m)^{m-2} = |\mathscr{F}|^{m-2} \leq \prod_{j=1}^{m} |\mathscr{F}_{E_j}| \leq \prod_{j=1}^{m} f(m-1) = f(m-1)^m$$

e assim

$$f(m)^{\frac{1}{\binom{m}{2}}} \leq f(m-1)^{\frac{1}{\binom{m-1}{2}}}$$

como queríamos. □

Mais precisamente, foi provado em (Pikhurko *et al.*, 2017) que

Teorema 3.19 (Oleg Pikhurko, Katherine Staden, 2017)**.** *Se* $\mathbf{k}$ *é dado, então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log_2 F(n,\mathbf{k})}{\binom{n}{2}} = Q(\mathbf{k}).$$

Além disso, para cada $n \in \mathbb{N}$*, existe ao menos um grafo* $\mathbf{k}$*-extremal multipartido completo de* n *vértices.*

Em (Pikhurko; Staden, 2024), um resultado preciso foi encontrado para $\mathbf{k}$ com uma certa propriedade a ser definida a seguir.

Definição 3.20. Para $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$, define-se

$$\mathrm{OPT}^*(\mathbf{k}) = \{(r, \phi, \alpha) \in \mathrm{FEAS}^*(\mathbf{k}) : q(\phi, \alpha) = Q(\mathbf{k})\}.$$

Dizemos que $\mathbf{k}$ tem a *propriedade de extensão forte* se, para toda $(r, \phi, \alpha) \in \mathrm{OPT}^*(\mathbf{k})$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r)$, e $\psi \in \Phi_0(r+1, \mathbf{k})$ tal que $\psi|_{\binom{[r]}{2}} = \phi$ e

$$\sum_{i \in [r], \psi(\{i, r+1\}) \neq \emptyset} \alpha_i \log_2 |\psi(\{i, r+1\})| = Q(\mathbf{k}),$$

então existe $j \in [r]$ tal que $\psi(\{j, r+1\}) = \emptyset$ e, ainda, para todo $i \in [r] \setminus \{j\}$, temos $\psi(\{i,j\}) = \psi(\{i, r+1\})$.

Por exemplo, sendo $k \geq 3$ um inteiro positivo, mostramos que (k,k) possui a propriedade de extensão forte. Com efeito, como $s = 2$, então, se $r < k$, a única função $\phi \in \Phi_2(r,(k,k))$ é a função constante $\phi \equiv \{1,2\}$; caso $r \geq k$, temos que $\Phi_2(r,(k,k)) = \emptyset$. Daí,

$$q(\phi, \alpha) = 2\sum_{i=1}^{r} \alpha_i \alpha_j \leq \frac{r-1}{r} \leq \frac{k-2}{k-1}$$

e assim $Q(k,k) = \frac{k-2}{k-1}$ e $\text{OPT}^*(k,k) = \{(k-1, \phi, (\frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{1}{k-1}))\}$, onde ϕ é a função constante acima.

Sendo então $\psi : \binom{[k]}{2} \to 2^{[2]}$ uma extensão da ϕ acima em $\Phi_0(k,(k,k))$ tal que

$$\sum_{i \in [k-1], \psi(\{i,k\}) = \{1,2\}} \frac{1}{k-1} = \frac{k-2}{k-1},$$

temos que existem exatamente $k-2$ valores $i \in [k-1]$ tais que $\psi(\{i,k\}) = \{1,2\}$. Seja então $h \in [k-1]$ tal que $\psi(\{h,k\}) \neq \{1,2\}$.

Note que, se $\psi(\{h,k\}) = \{1\}$, então o subgrafo gerador de $([r], \binom{[r]}{2})$ pelas arestas $\psi^{-1}(1)$ contém um K_k. Analogamente, se $\psi(\{h,k\}) = \{2\}$, então o subgrafo gerador de $([r], \binom{[r]}{2})$ pelas arestas $\psi^{-1}(2)$ contém um K_k. Assim, $\psi(\{h,k\}) = \emptyset$ e, ainda, para todo $i \in [k-1] \setminus \{h\}$, temos $\psi(\{i,k\}) = \psi(\{i,h\}) = \{1,2\}$.

Deixamos como exercício ao leitor provar que (k,k,k), $(3,3,3,3)$, $(3,3,3,3,3,3)$ e $(4,4,4,4)$ também possuem a propriedade de extensão forte.

Antes de irmos ao último teorema dessa seção, precisamos da seguinte definição:

Definição 3.21. Dados $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$ e um grafo G multipartido completo cuja partição em batatas é $V(G) = \bigcup_{i=1}^{r} X_i$ e dada $\phi \in \Phi_2(r, \mathbf{k})$, dizemos que uma coloração $\chi : E(G) \to [s]$ é $\mathbf{k}$-perfeita com respeito a $(\phi, X_1, X_2, \ldots, X_r)$ se, para todo $e \in E_G(X_i, X_j)$, temos $\chi(e) \in \phi(\{i,j\})$ para todos $1 \leq i < j \leq r$.

Finalmente, enunciamos o teorema:

Teorema 3.22 (Oleg Pikhurko, Katherine Staden, 2024)**.** *Seja* $\mathbf{k}$ *com a propriedade de extensão forte. Então, para todo n suficientemente grande, todo grafo* $\mathbf{k}$*-extremal de n vértices é multipartido completo. Além disso, vale o seguinte:*

Para todo $\varepsilon > 0$*, existe* $\delta > 0$ *e* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que, se G é* $\mathbf{k}$*-extremal com* $n \geq n_0$ *vértices, então:*

- *Existe* $(r,\phi,\alpha) \in OPT^*(\mathbf{k})$ *e* $\beta = (\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_r) \in (\mathbb{R}^+)^r$ *com* $||\alpha-\beta||_1 < \varepsilon$ *e tal que* G *é* r*-partido completo com batatas* $X_1,X_2,\ldots,X_r$ *satisfazendo* $|X_i| = \beta_i n$ *para todo* $i \in [r]$.
- *Para pelo menos* $(1-2^{-\delta n})F(G,\mathbf{k})$ *colorações* χ *que evitam* $K_{\mathbf{k}}$ *de* G*, existe* $(r,\tilde{\phi},\tilde{\alpha}) \in OPT^*(\mathbf{k})$ *com* $||\alpha-\tilde{\alpha}||_1 < \varepsilon$ *tal que* χ *é* $\mathbf{k}$*-perfeita com respeito a* $(\tilde{\phi},X_1,X_2,\ldots,X_r)$.

A demonstração desse teorema pode ser encontrada no artigo mencionado acima.

3.5 Padrões monocromáticos conexos com número de Turán linear

Como nesta seção iremos assumir que os padrões são monocromáticos, abusaremos um pouco da notação e escreveremos $c_{r,F}$ e $b_{r,F}$ em vez de $c_{r,\hat{F}}$ e $b_{r,\hat{F}}$, respectivamente. Além disso, assumiremos também que tais padrões têm pelo menos duas arestas.

Definição 3.23. Um padrão conexo $\hat{F} = (F,C)$ é dito ter número de Turán linear se F tem número de Turán linear.

Afirmamos, então, o seguinte:

Teorema 3.24. *Seja* $\hat{F}$ *um padrão conexo monocromático. Então* $b_{r,\hat{F}} < \infty$ *se, e somente se,* $\hat{F}$ *tem número de Turán linear.*

Demonstração. Ora, se $\hat{F}$ não tem número de Turán linear, então segue pelo teorema 3.6 que $c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} \geq r^{\frac{ex(n,F)}{n}}$, e assim $\lim_{n\to\infty} c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} = \infty$.

Por outro lado, se $\hat{F}$ tem número de Turán linear, seja $m = \lim_{n\to\infty} \dfrac{ex(n,F)}{n}$. Daí, para n suficientemente grande, novamente pelo teorema 3.6, temos que

$$c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} \leq r^{r\frac{ex(n,F)}{n}} \leq r^{r(m+1)}$$

e, portanto, $c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}}$ é limitado, concluindo que $\lim_{n\to\infty} c_{r,\hat{F}}(n)^{\frac{1}{n}} < \infty$. □

Em (Hoppen *et al.*, 2014) foi provado o seguinte:

Proposição 3.25 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Seja* $n \geq 4$ *um inteiro, então*

$$c_{2,P_2}(n) = 2^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}, \quad c_{3,P_2}(n) = \begin{cases} 18^{\frac{n}{4}}, & \text{se } n \equiv 0 \pmod 4 \\ 30 \times 18^{\frac{n-5}{4}}, & \text{se } n \equiv 1 \pmod 4 \\ 66 \times 18^{\frac{n-6}{4}}, & \text{se } n \equiv 2 \pmod 4 \\ 126 \times 18^{\frac{n-7}{4}}, & \text{se } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}, \quad e \quad \frac{9}{8}2^{n-1} \leq c_{2,P_3}(n) \leq 2^n.$$

A demonstração da proposição acima, apesar de ser elementar, é bem braçal. Deixaremos, então, como exercício ao leitor, que, caso deseje, pode encontrá-la no artigo mencionado.

Nesse mesmo artigo foi demonstrado que, se $r \geq 4$, então $c_{r,F}(n) \ggg r^{ex(n,F)}$ e exibiremos tal demonstração abaixo.

Para isso, precisaremos do seguinte lema:

Lema 3.26. *Seja G um grafo não nulo. Então existe um grafo G' isomorfo a G com $V(G) = V(G')$ e tal que*

$$|E(G) \cap E(G')| \leq \frac{|E(G)|^2}{\binom{|V(G)|}{2}}.$$

Demonstração. Sejam $V(G) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ e S_n o conjunto das permutações $\pi : [n] \to [n]$. Dado $\pi \in S_n$, seja $\pi(G)$ um grafo tal que $V(\pi(G)) = V(G)$ e $\{x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}\} \in E(\pi(G))$ se, e somente se, $\{x_i, x_j\} \in E(G)$. É claro que $\pi(G)$ e G são isomorfos, pois basta considerarmos $\tau : V(G) \to V(\pi(G))$ dada por $\tau(x_i) = x_{\pi(i)}$.

Agora vamos contar os pares $(\pi, e) \in S_n \times E(G)$ tais que $e \in E(\pi(G))$. Com efeito, para cada $e \in E(G)$ temos $e \in E(\pi(G))$ se, e somente se, existem $i, j \in [n]$ tais que $e = \{x_{\pi(i)}, x_{\pi(j)}\} \in E(\pi(G))$, o que nos dá $\{x_i, x_j\} \in E(G)$. Em outras palavras, sendo $e = \{x_u, x_v\}$, queremos contar o número de permutações π tais que $\{x_{\pi^{-1}(u)}, x_{\pi^{-1}(v)}\} \in E(G)$. Note que, para cada escolha de $\pi^{-1}(u) = t$, temos que $\pi^{-1}(v)$ pode ser escolhido de $deg(x_t)$ maneiras, enquanto que, após as escolhas de $\pi^{-1}(u)$ e $\pi^{-1}(v)$, os demais elementos de $[n] - \{u, v\}$ podem ter sua imagem em π^{-1} escolhidas de $(n-2)!$ maneiras. Assim, o número de tais permutações π é

$$(n-2)! \sum_{t=1}^{n} deg(x_t) = 2|E(G)|(n-2)!.$$

Portanto, o número de tais pares (π, e) é $2|E(G)|^2(n-2)!$.

Por outro lado, suponha por contradição que, para cada $\pi \in S_n$, temos que

$$|E(G) \cap E(\pi(G))| > \frac{|E(G)|^2}{\binom{V(G)}{2}}.$$

Assim, o número de pares (π, e) é maior do que

$$n! \frac{|E(G)|^2}{\binom{n}{2}} = 2|E(G)|^2(n-2)!.$$

O que é uma contradição. □

Finalmente, vamos ao nosso teorema:

Teorema 3.27 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Seja $\hat{F}$ um padrão monocromático com número de Turán linear e seja $r \geq 4$. Assim, para todo n suficientemente grande, temos que $c_{r,F}(n) \ggg r^{ex(n,F)}$.*

Demonstração. Defina $c = \lim_{n\to\infty} \dfrac{ex(n,F)}{n} > 0$.

Considere grafos G_1 e G_2 isomorfos que não contêm cópia de F, tais que $V(G_1) = V(G_2)$, $|V(G_1)| = |V(G_2)| = n$, $|E(G_1)| = |E(G_2)| = ex(n,F)$ e $|E(G_1) \cap E(G_2)| \leq \frac{|E(G_1)|^2}{\binom{|V(G_1)|}{2}}$.

Daí, para n suficientemente grande, temos que $ex(n,F) < (c+1)n$ e assim

$$|E(G_1) \cap E(G_2)| \leq \frac{((c+1)n)^2}{\binom{n}{2}} \leq 4(c+1)^2.$$

Considere o grafo G dado por $V(G) = V(G_1)$ e $E(G) = E(G_1) \cap E(G_2)$. Vamos agora particionar o conjunto das r cores em conjuntos A e B, tais que A tem $\lceil \frac{r}{2} \rceil$ cores e B tem $\lfloor \frac{r}{2} \rfloor$ cores, e assim colorir as arestas de $E(G_1)$ com as cores de A de maneira arbitrária e usando cada cor pelo menos uma vez, e as arestas de $E(G_2) - E(G_1)$ com as cores de B de maneira arbitrária e usando cada cor pelo menos uma vez. Note que qualquer coloração desse tipo evita $\hat{F}$ e temos pelo menos

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil^{|E(G_1)|} \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor^{|E(G_2)|-|E(G_1)\cap E(G_2)|} - \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \left(\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil - 1 \right)^{|E(G_1)|} \left(\left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor - 1 \right)^{|E(G_2)|-|E(G_1)\cap E(G_2)|}$$

colorações (O termo negativo representa o número de maneiras de escolher um par $(a,b) \in A \times B$ e colorir as arestas de G evitando as cores a e b).

Como podemos particionar o conjunto das cores de $\binom{r}{\lceil \frac{r}{2} \rceil}$ maneiras e que cada maneira de particionar me dá colorações disjuntas, segue que

$$c_{r,\hat{F}}(G) \geq \binom{r}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} \left(\frac{(\lceil \frac{r}{2} \rceil \lfloor \frac{r}{2} \rfloor)^{ex(n,F)}}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}} - \left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \frac{((\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1)(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1))^{ex(n,F)}}{(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1)^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}} \right)$$

Afirmamos que

$$\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor \frac{((\lceil \frac{r}{2} \rceil - 1)(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1))^{ex(n,F)}}{(\lfloor \frac{r}{2} \rfloor - 1)^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}} < \frac{1}{2} \frac{(\lceil \frac{r}{2} \rceil \lfloor \frac{r}{2} \rfloor)^{ex(n,F)}}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}}$$

que é verdade se, e somente se,

$$\frac{((1 - \frac{1}{\lceil \frac{r}{2} \rceil})(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}))^{ex(n,F)}}{(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor})^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}} < \frac{1}{2\lceil \frac{r}{2} \rceil \lfloor \frac{r}{2} \rfloor}$$

Com efeito,

$$\frac{((1 - \frac{1}{\lceil \frac{r}{2} \rceil})(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}))^{ex(n,F)}}{(1 - \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor})^{|E(G_1)\cap E(G_2)|}} \leq e^{-\frac{1}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} ex(n,F)} e^{-\frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(ex(n,F) - |E(G_1)\cap E(G_2)|)}$$

e assim, como para n grande temos que $ex(n,F) \geq \frac{cn}{2}$, então

$$\exp\left(\frac{1}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} ex(n,F) + \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}(ex(n,F) - |E(G_1) \cap E(G_2)|)\right)$$
$$\geq \exp\left(\frac{cn}{2\left(\frac{1}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} + \frac{1}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\right)} - \frac{4(c+1)^2}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor}\right) > 2\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor$$

Logo, segue que

$$c_{r,\hat{F}}(G) \geq \frac{1}{2}\binom{r}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} \frac{(\lceil \frac{r}{2} \rceil \lfloor \frac{r}{2} \rfloor)^{ex(n,F)}}{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor^{|E(G_1) \cap E(G_2)|}} \geq \frac{1}{2}\binom{r}{\lceil \frac{r}{2} \rceil} \frac{(\frac{r^2-1}{4})^{ex(n,F)}}{(\frac{r}{2})^{4(c+1)^2}} \geq \frac{(2r)^{ex(n,F)}}{(\frac{r}{2})^{4(c+1)^2}} \ggg r^{ex(n,F)}$$

para n grande. □

Veja que $b_{r,P_2}(G)$ conta o número de r-colorações próprias de arestas de um grafo G. Note que se $\Delta(G) > r$, então não há r-colorações próprias de arestas. Assim, iremos considerar apenas os grafos com $\Delta(G) \leq r$. Em (Hoppen *et al.*, 2014) foi provado que

Teorema 3.28 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Vale que*

$$3^{\frac{nr}{6}} \leq c_{r,P_2}(n) \leq (r!)^{\frac{n}{2}}.$$

Não iremos demonstrar o lado esquerdo dessa desigualdade, pois no próximo capítulo exibiremos uma cota inferior melhor para $c_{r,P_2}(n)$. Quanto ao lado direito da desigualdade, iremos exibir uma prova alternativa mais elementar do que a apresentada no paper.

Demonstração. Rotule os vértices de $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$, onde $l = |E(G)|$. A partir dessa rotulação, e como $\Delta(G) \leq r$, defina $\omega : E(G) \to [r]$ recursivamente por:

$$\omega(e_j) = r - \max\{|\{i : i < j, u_j \in e_i\}|, |\{i : i < j, v_j \in e_i\}|\}$$

onde $e_j = \{u_j, v_j\}$, para todo $j \in [l]$.

Assim, o grafo G admite no máximo $\prod_{j=1}^{l} \omega(e_j)$ colorações próprias de arestas.

Com efeito, vamos colorir as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_l$ nessa ordem. Daí, para cada $j \in [l]$, após colorirmos as arestas $e_1, e_2, \ldots, e_{j-1}$, então supondo sem perda de generalidade que $|\{i : i < j, u_j \in e_i\}| \geq |\{i : i < j, v_j \in e_i\}|$, a aresta e_j deve ter cor diferente de todas as outras arestas anteriores incidentes a u_j e, portanto, posso colorí-la de, no máximo, $\omega(e_j)$ maneiras.

Agora, para cada $k \in [r]$, vamos olhar para o grafo gerador G_k dado por $V(G_k) = V(G)$ e $E(G_k) = \bigcup_{i=k}^{r} \omega^{-1}(i)$. Note que em G_k cada vértice tem grau, no máximo, $r + 1 - k$.

Com efeito, se existisse $v \in V(G_k)$ tal que $deg(v) \geq r+2-k$, então considere a aresta e_j incidente a v em G_k com j máximo. Daí, por definição, $\omega(e_j) \leq r-(r+1-k) = k-1$ e assim $e_j \notin \bigcup_{i=k}^{r} \omega^{-1}(i) = E(G_k)$, uma contradição.

Daí, temos que

$$\sum_{i=k}^{r} |\omega^{-1}(i)| = |\bigcup_{i=k}^{r} \omega^{-1}(i)| = |E(G_k)| \leq \frac{(r+1-k)n}{2}$$

e, portanto,

$$\prod_{j=1}^{l} \omega(e_j) = \prod_{k=1}^{r} k^{|\omega^{-1}(k)|} \leq \prod_{k=1}^{r} k^{\frac{n}{2}} = (r!)^{\frac{n}{2}}.$$

□

De maneira mais geral, também foi encontrada em (Hoppen *et al.*, 2014) uma cota superior para $c_{r,S_k}(n)$, cujo valor para $k=2$ coincide com o do teorema 3.28. Antes de enunciá-lo, precisamos do seguinte lema, que pode ser encontrado e demonstrado em (Alon; Spencer, 2016).

Lema 3.29. *Sejam m, n e k inteiros positivos e $I_1, I_2, \ldots, I_m$ subconjuntos de $[n]$ tais que cada $i \in [n]$ pertence a pelo menos k desses conjuntos. Seja ainda $\mathscr{F} \subset R^n$ finito. Para cada $A \subset [n]$, defina $\tilde{A} : [n] \to \{0,1\}$ dado por*

$$\tilde{A}(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Defina também a projeção de $\mathscr{F}$ nas coordenadas de A como

$$\mathscr{F}_A = \{(f(i)\tilde{A}(i))_{i=1}^{n} : f \in \mathscr{F}\}.$$

onde $f = (f(i))_{i=1}^{n}$. Então, vale que

$$|\mathscr{F}|^k \leq \prod_{j=1}^{m} |\mathscr{F}_{I_j}|.$$

Lema 3.30. *Dados r e t inteiros positivos, então*

$$c_{r,S_t}(S_n) \leq \chi_{r,t} := \frac{(r(t-1))!}{(t-1)!^r}$$

para todo inteiro positivo n. Além disso,

$$c_{r,S_t}(S_{(t-1)r}) = \chi_{r,t}.$$

Demonstração. Inicialmente, mostremos que $c_{r,S_t}(S_{(t-1)r}) = \chi_{r,t}$.

Com efeito, para colorirmos um $S_{(t-1)r}$ com as cores $[r]$ evitando um S_t monocromático, então cada cor deve aparecer em exatamente $t-1$ arestas. Para tal, vamos apenas escolher as arestas de cada cor:

Podemos escolher as arestas da cor 1 de $\binom{(t-1)r}{t-1}$ maneiras;

Escolhidas as arestas da cor 1, podemos escolher as arestas da cor 2 de $\binom{(t-1)(r-1)}{t-1}$ maneiras;

Escolhidas as arestas das cores 1 e 2, podemos escolher as da cor 3 de $\binom{(t-1)(r-2)}{t-1}$ maneiras;

E assim sucessivamente.

Obtemos então um total de

$$\prod_{i=0}^{r-1} \binom{(t-1)(r-i)}{t-1} = \frac{(r(t-1))!}{(t-1)!^r}$$

colorações, concluindo assim essa primeira parte.

Para a segunda parte, note que $c_{r,S_t}(S_n) = 0$ para $n > (t-1)r$, uma vez que para cada r-coloração desse grafo, temos que, pelo princípio da casa dos pombos, haverá uma cor que aparecerá em mais do que $\frac{(t-1)r}{r} = t-1$ arestas, ou seja, tal coloração não seria livre de S_t monocromático.

Vejamos agora o que acontece para $n \leq (t-1)r$:

Dado $n < (t-1)r$, seja Γ o conjunto das r-colorações de S_n que evitam S_t monocromático e Ω o conjunto das r-colorações de S_{n+1} que também evitam S_t monocromático. Seja $E(S_n) = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ e $E(S_{n+1}) = \{e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}\}$. Agora, construa uma função $\lambda : \Gamma \to \Omega$ tal que, para cada r-coloração $c \in \Gamma$, considere $\lambda(c) \in \Omega$ tal que $\lambda(c)(e_i) = c(e_i)\ \forall i \in [n]$ e tome $\lambda(c)(e_{n+1})$ para ser uma cor que apareceu menos de $t-1$ vezes em c, o que de fato existe pelo princípio da casa dos pombos, pois $\frac{n}{r} < t-1$. Com isso, λ é uma injeção e, portanto, $|\Gamma| \leq |\Omega|$, seguindo o resultado. □

Teorema 3.31 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Para cada inteiro positivo n, vale que*

$$c_{r,S_t}(n) \leq (\chi_{r,t})^{\frac{n}{2}}.$$

Demonstração. Seja G um grafo de n vértices e l arestas, $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$, e assuma que G possua, ao menos, uma r-coloração livre de S_t monocromático. Para cada r-coloração de G, considere o vetor $(v_1, v_2, \ldots, v_l) \in [r]^l$ tal que v_i é a cor da aresta e_i para todo $i \in [l]$. Seja $\mathscr{F}$ o conjunto de tais vetores de $[r]^l$ associados a uma r-coloração livre de S_t monocromático. Para

cada $u \in V(G)$, defina

$$E_u = \{i \in [l] : u \in e_i\}.$$

Assim, cada $i \in [l]$ está em exatamente dois desses conjuntos E_u.

Logo, pelo lema 3.29, temos

$$|\mathscr{F}|^2 \leq \prod_{u \in V(G)} |\mathscr{F}_{E_u}|$$

Note que os elementos de $\mathscr{F}_{E_u}$ representam uma r-coloração própria do grafo induzido pelas arestas incidentes a u, e, portanto, pelo lema 3.30, $|\mathscr{F}_{E_u}| \leq \chi_{r,t}$. O resultado segue. □

Já de posse de uma cota superior para $c_{r,S_t}(n)$, vamos falar de uma cota inferior para o mesmo. Primeiro, vamos enunciar um lema, uma das cotas de Chernoff, cuja demonstração pode ser encontrada em (Habib *et al.*, 2013), e em seguida provar uma cota que foi demonstrada em (Hoppen *et al.*, 2014).

Lema 3.32. *Seja n um inteiro positivo, $p \in (0,1)$ e $0 \leq B \leq pn$. Então*

$$\sum_{pn+B \leq k \leq n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \leq e^{-\frac{B^2}{3pn}}.$$

Teorema 3.33 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Dados $r \geq 2$ e $t \geq 3$ inteiros positivos tal que $t \geq 2s$, então vale que*

$$b_{r,S_t} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r(2t-s-1)}} \chi_{r,t}^{-\frac{s-1}{4t-2s-2}} \chi_{r,t}^{\frac{1}{2}} = r^{-(\frac{\sqrt{3}}{4}+o(1))r\sqrt{t\ln(t)}} \chi_{r,t}^{\frac{1}{2}}.$$

Onde $s = \lceil \sqrt{3t\ln(2r^2t)} \rceil$ e $o(1)$ é relativo à variável t ao fixarmos r.

Demonstração. Considere um grafo G bipartido completo cujos conjuntos A e B têm $r(t-s)$ e $r(t-1)$ vértices, respectivamente. Agora, para cada $v \in A$, vamos colorir as arestas incidentes a v com as cores em $[r]$, de modo que cada cor apareça em exatamente $t-1$ arestas. Para cada par $(w,j) \in B \times [r]$, seja $B(w,j)$ o conjunto de tais colorações, em que existe ao menos t arestas da cor j incidentes a w.

Note que, dentre todas as $\chi_{r,t}^{r(t-s)}$ r-colorações possíveis, queremos contar a quantidade delas com exatamente l arestas da cor j incidentes a w. Obteremos:

Vamos escolher inicialmente um conjunto $X \subset A$ com l vértices. Note que $\{v,w\}$ é da cor j para todo $v \in X$ e $\{v',w\}$ não é da cor j para todo $v' \in A \setminus X$. Isso é exatamente

$$\chi_{r,t}^{r(t-s)} \left(\frac{1}{r}\right)^{l} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r(t-s)-l}.$$

Assim, ao variarmos X, obteremos:

$$|B(w,j)| = \sum_{l=t}^{r(t-s)} \binom{r(t-s)}{l} \chi_{r,t}^{r(t-s)} \left(\frac{1}{r}\right)^{l} \left(\frac{r-1}{r}\right)^{r(t-s)-l} \leq \chi_{r,t}^{r(t-s)} e^{-\frac{s^2}{3(t-s)}}.$$

A última desigualdade se deve ao lema 3.32 e pelo fato de $0 \leq s \leq t-s$. Portanto, temos que

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{(w,j)\in B\times[r]} B(w,j)\right| &\leq r^2(t-1)\chi_{r,t}^{r(t-s)} e^{-\frac{s^2}{3(t-s)}} \leq r^2(t-1)e^{-\frac{3t\ln\left(2r^2t\right)}{3(t-s)}} \chi_{r,t}^{r(t-s)} \\ &\leq r^2(t-1)e^{-\ln\left(2r^2t\right)} \chi_{r,t}^{r(t-s)} = \frac{r^2(t-1)}{2r^2t} \chi_{r,t}^{r(t-s)} \leq \frac{\chi_{r,t}^{r(t-s)}}{2}.\end{aligned}$$

Daí, o número de r-colorações de G que evitam um subgrafo S_t monocromático é, pelo menos,

$$\frac{\chi_{r,t}^{r(t-s)}}{2}.$$

Finalmente, tomando agora um grafo G' com n vértices, iremos particionar esses n vértices em $\left\lfloor \frac{n}{r(2t-s-1)} \right\rfloor$ conjuntos L com $r(2t-s-1)$ vértices cada e ignorar os vértices restantes. Para cada um desses conjuntos L, tome $G'[L]$ um subgrafo isomorfo ao grafo G acima, enquanto que os vértices que foram ignorados não terão nenhuma aresta incidente a eles. Com isso, obtemos

$$c_{r,S_t}(n) \geq c_{r,S_t}(G') \geq \left(\frac{\chi_{r,t}^{r(t-s)}}{2}\right)^{\left\lfloor \frac{n}{r(2t-s-1)} \right\rfloor}.$$

Concluímos que

$$b_{r,S_t} \geq \left(\frac{\chi_{r,t}^{r(t-s)}}{2}\right)^{\frac{1}{r(2t-s-1)}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{r(2t-s-1)}} \chi_{r,t}^{-\frac{s-1}{2(2t-s-1)}} \chi_{r,t}^{\frac{1}{2}}. \qquad \square$$

O teorema 3.33 parece ser útil ao fixarmos r e variarmos t suficientemente grande, uma vez que $t > s$. A seguinte proposição, provada também em (Hoppen *et al.*, 2014), nos dá uma maior liberdade entre r e t:

Proposição 3.34 (Carlos Hoppen, Yoshiharu Kohayakawa, Hanno Lefmann, 2014)**.** *Para quaisquer inteiros $r \geq 2$ e $t \geq 3$, vale que*

$$c_{r,S_t}(T_{2t,2}) = 2r^{t^2}(1-r^{-(t-1)})^t + (r-1)r^{t^2} - r^{t^2+1}(1-r^{-t})^t + r^{t^2+1}\sum_{g=1}^{t}(-1)^g\binom{t}{g}\left(\frac{1-r^{-(t-g)}}{r^g}\right)^t.$$

Em particular, para $r,t \geq 3$ ou $r = 2$ e $t \geq 5$, vale que

$$b_{r,S_t} \geq r^{\frac{t^2-2}{2t}} \lll r^{\frac{(t-1)}{2}}.$$

Demonstração. Note que tal grafo $T_{2t,2}$ é bipartido, cujas partições são $A = \{1,3,5,\ldots,2t-1\}$ e $B = \{2,4,6,\ldots,2t\}$, e todos os vértices têm grau exatamente t. Para cada subconjunto $S \subset V(G)$, seja $\Gamma(S)$ o conjunto das r-colorações desse grafo tal que, para cada $v \in S$, todas as arestas incidentes a v têm a mesma cor. Para facilitar, iremos escrever $S = A_S \cup B_S$, onde $A_S \subset A$ e $B_S \subset B$. Podemos facilmente calcular $|\Gamma(S)|$:

- Se $B_S = \emptyset$:

  Então, para cada $v \in A_S$, escolhemos uma cor e pintamos todas as arestas incidentes a v dessa cor escolhida. As demais $t^2 - t|S|$ arestas podem ser coloridas livremente de r maneiras. Assim,

  $$|\Gamma(S)| = r^{|S|}r^{t^2-t|S|} = r^{t^2+(1-t)|S|}$$

- Se $A_S = \emptyset$:

  Análogo ao item anterior.

- Se $A_S, B_S \neq \emptyset$:

  Assim, todas as arestas incidentes a ao menos um vértice de S têm a mesma cor, e como a quantidade de arestas incidentes a algum vértice de S é $t|S| - |E(T_{2t,2}[S])| = t|S| - |A_S||B_S|$, segue que

  $$|\Gamma(S)| = r^{|S|}r^{t^2-t|S|} = r^{t^2-t|S|+|A_S||B_S|+1}$$

Veja que o número de colorações de $K_{2t,2}$ que evita S_t monocromático é dado por

$$r^{t^2} - \left|\bigcup_{v\in V(K_{2t,2})}\Gamma(\{v\})\right|.$$

Pelo princípio da inclusão-exclusão e usando o fato de $\Gamma(S_1 \cup S_2) = \Gamma(S_1) \cap \Gamma(S_2)$, temos:

$$\left|\bigcup_{v\in V(K_{2t,2})}\Gamma(\{v\})\right| = \sum_{l=1}^{2t}(-1)^{l-1}\sum_{|S|=l}|\Gamma(S)|$$

Daí, sendo $|S_A| = m$ e $|S_B| = l - m$, então

$$|\Gamma(S)| = 2r^{t^2+(1-t)l} + \sum_{m=1}^{l-1} \binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1}, \text{ se } l \leq t,$$

$$|\Gamma(S)| = \sum_{m=1}^{l-1} \binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1}, \text{ se } l > t,$$

obtendo assim

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{v\in V(K_{2t,2})} \Gamma(\{v\})\right| &= \sum_{l=1}^{t}(-1)^{l-1}2r^{t^2+(1-t)l} + \sum_{l=1}^{2t}\sum_{m=1}^{l-1}\binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1} \\ &= \sum_{l=1}^{t}(-1)^{l-1}2r^{t^2+(1-t)l} + \sum_{1\leq m<l\leq 2t}(-1)^{l-1}\binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1}\end{aligned}$$

e assim,

$$\begin{aligned}c_{r,S_t}(T_{2t,2}) &= -r^{t^2} + \sum_{l=0}^{t}(-1)^{l}2r^{t^2+(1-t)l} + \sum_{1\leq m<l\leq 2t}(-1)^{l-1}\binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{1\leq m<l\leq 2t}(-1)^{l}\binom{t}{m}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{m=1}^{t}\binom{t}{m}\sum_{l=m+1}^{2t}(-1)^{l}\binom{t}{l-m} r^{t^2-tl+m(l-m)+1} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{m=1}^{t}\binom{t}{m}\sum_{i=1}^{t}(-1)^{m+i}\binom{t}{i} r^{t^2-t(m+i)+mi+1}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m} r^{t^2-tm+1}\sum_{i=1}^{t}(-1)^{i}\binom{t}{i} r^{-ti+mi} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m} r^{t^2-tm+1}((1-r^{m-t})^t - 1) \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + \sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m} r^{t^2-tm+1}(1-r^{m-t})^t - \sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m} r^{t^2-tm+1} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + r^{t^2+1}\sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m}\left(\frac{1-r^{m-t}}{r^m}\right)^t - r^{t^2+1}\sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m} r^{-tm} \\ &= -r^{t^2} + 2r^{t^2}(1-r^{1-t})^t + r^{t^2+1}\sum_{m=1}^{t}(-1)^{m}\binom{t}{m}\left(\frac{1-r^{m-t}}{r^m}\right)^t - r^{t^2+1}((1-r^{-t})^t - 1).\end{aligned}$$

Note que, mais fracamente, e para $r,t \geq 3$ ou $r = 2$ e $t \geq 5$, temos que

$$c_{r,S_t}(T_{2t,2}) = r^{t^2} - \left|\bigcup_{v\in V(K_{2t,2})} \Gamma(\{v\})\right| \geq r^{t^2} - \sum_{v\in V(K_{2t,2})} |\Gamma(\{v\})| = r^{t^2} - 2tr^{t^2-t+1} > r^{t^2-2}$$

e, portanto, para cada inteiro positivo n, considere o grafo G consistindo da união de $\lfloor \frac{n}{2t} \rfloor$ cópias de $T_{2t,t}$ juntamente com $n - 2t\lfloor \frac{n}{2t} \rfloor$ vértices isolados. Então

$$c_{r,S_t}(G) > r^{(t^2-2)\lfloor \frac{n}{2t} \rfloor}$$

e, portanto, $b_{r,S_t} \geq r^{\frac{t^2-2}{2t}}$. □

Um artigo mais recente (Colucci *et al.*, 2020) nos dá algumas cotas superiores melhores para alguns padrões monocromáticos de estrelas, como segue:

Teorema 3.35 (Lucas Colucci, Ervin Győri, Abhishek Methuku, 2020)**.** *Sejam t e r inteiros suficientemente grandes, então vale que*

$$b_{2,S_3} \leq 18^{\frac{3}{10}};$$

$$b_{2,S_4} \leq 200^{\frac{5}{18}};$$

$$b_{2,S_t} \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \binom{2t-2}{t-1} \right)^{\frac{2t-3}{4t-7}};$$

$$b_{r,S_3} \leq \left(\frac{r(2r-1)!^2}{2^{2r-2}} \right)^{\frac{2r-1}{8r-6}} \sim \sqrt[8]{\frac{2}{e^2}} \left(\frac{(2r)!}{2^r} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Para a prova desse teorema, precisamos do seguinte lema que melhora, nesses casos, o teorema 3.31:

Lema 3.36. *Sejam $r \geq 2$ e $t \geq 3$ inteiros. Assim, existe uma constante $M(r,t)$ tal que*

$$c_{r,S_t}(n)^{2r(t-1)-3} \leq M(r,t) \left(\max \left\{ \left(r^{2r(t-1)-3-2a} c_{r,S_t}(S_a)^2 \right)^a : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

Em particular,

$$b_{r,S_t} \leq \left(\max \left\{ \left(r^{2r(t-1)-3-2a} c_{r,S_t}(S_a)^2 \right)^a : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \right)^{\frac{1}{2(2r(t-1)-3)}}$$

Demonstração. Considere um grafo G com n vértices e com pelo menos uma r-coloração que evita S_t monocromático. Nesse caso, devemos ter $\Delta(v) \leq r(t-1)$; caso contrário, se $deg(v) > r(t-1)$, então qualquer r-coloração nos dá, pelo princípio da casa dos pombos, que uma das r cores aparece em mais de $\frac{r(t-1)}{r} = t-1$ arestas incidentes a v, nos dando uma cópia

monocromática de S_t. Ainda, se tivermos algum vértice v com $deg(v) = r(t-1)$, então considere o grafo $G' = G - \{e\}$, onde e é uma aresta incidente a v em G. Então

$$c_{r,S_t}(G') \geq c_{r,S_t}(G),$$

uma vez que cada coloração das arestas de G (evitando S_t monocromático) nos induz injetivamente uma coloração das arestas de G', já que, uma vez coloridas as demais arestas incidentes a v em G, há no máximo uma maneira de colorir e.
Daí, existe um grafo G com n vértices e $\Delta(G) \leq r(t-1)-1$ tal que

$$c_{r,S_t}(G) = c_{r,S_t}(n).$$

Dentre tais grafos G, tome um que maximiza o número de arestas. Com isso, afirmamos que não existem dois vértices $u, v \in V(G)$ não-adjacentes com $deg(u), deg(v) < \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)$. Com efeito, se existissem tais vértices, considere o grafo $G' = (V(G), E(G) \cup \{\{u,v\}\})$. Afirmamos que

$$c_{r,S_t}(G') \geq c_{r,S_t}(G).$$

Com efeito, coloridas as arestas de G (evitando S_t monocromático), mostramos que conseguimos colorir a aresta $\{u,v\}$ ainda evitando S_t monocromático.
Ora, se ao colorirmos essa aresta com a cor $w \in [r]$ obtivermos um S_t monocromático, então tal S_t tem $\{u,v\}$ como aresta, e portanto ao menos um dos vértices u ou v já tinha em G $t-1$ arestas incidentes com a cor w. Assim, para cada cor $w \in [r]$, pelo menos um dos vértices u ou v já tem $t-1$ arestas incidentes da cor w. Pelo princípio da casa dos pombos e sem perda de generalidade, vamos supor que u possui $t-1$ arestas incidentes de cada uma das $\lceil \frac{r}{2} \rceil$ cores. Assim, $deg(u) \geq \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)$, uma contradição.
Logo, conseguimos colorir a aresta $\{u,v\}$ com pelo menos uma cor e, portanto, provamos a desigualdade acima. Como $\Delta(G') \leq \max\{\Delta(G), \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)\} \leq r(t-1)-1$, então contradizemos a maximização de arestas de G.

Portanto, em tal grafo G, temos que $\{v \in V(G) : deg(v) < \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)\}$ é um clique que, obviamente, tem no máximo $\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)$ vértices. Seja então Γ a família dos grafos G com n vértices satisfazendo $\Delta(G) \leq r(t-1)-1$, tal que, para todo vértice $v \in V(G)$, com exceção de no máximo $\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)$ deles, temos $deg(v) \geq \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)$. Assim, existe $G \in \Gamma$ tal que

$$c_{r,S_t}(G) = c_{r,S_t}(n).$$

A partir de agora, iremos realizar uma leve adaptação do teorema 3.31. Seja G o grafo acima e $E(G) = \{e_1, e_2, \ldots, e_l\}$. Para cada r-coloração de G, considere o vetor $(v_1, v_2, \ldots, v_l) \in [r]^l$, tal que v_i é a cor da aresta e_i para todo $i \in [l]$. Seja $\mathscr{F}$ o conjunto de tais vetores de $[r]^l$ associados a uma r-coloração livre de S_t monocromático. Para cada $j \in [l]$, defina

$$E_j = \{i \in [l] : u_j \in e_i\} \cup \{i \in [l] : v_j \in e_i\},$$

onde $e_j = \{u_j, v_j\}$.
Defina ainda

$$F_j^w = \{j\} \quad \forall\, w \in [2r(t-1) - 2 - deg(u_j) - deg(v_j)].$$

Assim, se $j \in [l]$, então j está nos conjuntos F_j^w, $w \in [2r(t-1) - 2 - \deg(u_j) - \deg(v_j)]$, e nos conjuntos E_z, onde z é tal que e_z é incidente a u_j ou v_j. Assim, j está em exatamente $2r(t-1) - 2 - \deg(u_j) - \deg(v_j) + \deg(u_j) + \deg(v_j) - 1 = 2r(t-1) - 3$ de tais conjuntos E_i, F_i^w.

Logo, pelo lema 3.29, temos

$$|\mathscr{F}|^{2r(t-1)-3} \leq \prod_{j=1}^{l} |\mathscr{F}_{E_j}| \prod_{w=1}^{2r(t-1)-2-\deg(u_j)-\deg(v_j)} |\mathscr{F}_{F_j^w}|.$$

Como $|F_j^w| = 1$, segue que $|\mathscr{F}_{F_j^w}| \leq r$. Ainda, considere a árvore T dada por $V(T) = N_G(u_j) \cup N_G(v_j)$ e $E(T) = \{e \in E(G) : u_j \in e\} \cup \{e \in E(G) : v_j \in e\}$, então

$$|\mathscr{F}_{E_j}| \leq c_{r,S_t}(T).$$

Afirmamos que $c_{r,S_t}(T) = \frac{c_{r,S_t}(S_{\deg(u_j)}) c_{r,S_t}(S_{\deg(v_j)})}{r}$. Com efeito, se colorirmos inicialmente as arestas incidentes a u_j, podemos fazer isso de $c_{r,S_t}(S_{\deg(u_j)})$ maneiras. Após isso, desejamos colorir as demais arestas incidentes a v_j, com exceção de $\{u_j, v_j\}$, que já está colorida. Por simetria, podemos fazer isso de $\frac{c_{r,S_t}(S_{\deg(v_j)})}{r}$ maneiras. Com isso, finalmente concluímos que

$$|\mathscr{F}|^{2r(t-1)-3} \leq \prod_{j=1}^{l} \frac{c_{r,S_t}(S_{\deg(u_j)}) c_{r,S_t}(S_{\deg(v_j)})}{r} r^{2r(t-1)-2-\deg(u_j)-\deg(v_j)}.$$

Para um grafo H e $e = \{u, v\} \in E(H)$, defina

$$f_H(e) = c_{r,S_t}(S_{\deg(u)}) c_{r,S_t}(S_{\deg(v)}) r^{2r(t-1)-3-\deg(u)-\deg(v)}$$

e ainda defina

$$\lambda(H) = \prod_{e \in E(H)} f_H(e).$$

Daí,

$$c_{r,S_t}(n)^{2r(t-1)-3} \leq \lambda(G) \leq \max\{\lambda(H) : H \in \Gamma\}.$$

Dentre os grafos $H \in \Gamma$ que maximizam a função λ, considere um que maximiza o número de arestas $e = \{u,v\}$ com $\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1) \leq \deg(u) = \deg(v) \leq r(t-1)-1$ (chamaremos tais arestas de *especiais*). Dado um par $(\delta_1, \delta_2) \in \mathbb{Z}^2$ com $\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1) \leq \delta_1 < \delta_2 \leq r(t-1)-1$, afirmamos que a quantidade de arestas $\{u,v\} \in E(H)$ com $\deg(u) = \delta_1$ e $\deg(v) = \delta_2$ é, no máximo, $(2r(t-1))^2$.

Suponha por contradição que tal quantidade seja maior que $(2r(t-1))^2$. Seja então $\{u_1,v_1\}$ uma de tais arestas, com $\deg(u_1) = \delta_1$ e $\deg(v_1) = \delta_2$. Assim, como $|N(u_1) \cup N(v_1)| \leq \deg(u_1) + \deg(v_1) - 1 \leq 2r(t-1)-3$, então a quantidade de arestas de H que envolvem ao menos um dos vértices de $N(u_1) \cup N(v_1)$ é, no máximo, $(2r(t-1)-3)(2r(t-1)-1) < (2r(t-1))^2$. Assim, existe uma aresta $\{u_2,v_2\}$ com $\deg(u_2) = \delta_1$ e $\deg(v_2) = \delta_2$ tal que $\{u_2,v_2\} \cap (N(u_1) \cup N(v_1)) = \emptyset$, em particular $\{u_1,u_2\}, \{v_1,v_2\} \notin E(H)$. Considere o grafo $H' = (V(H), (E(H) \setminus \{\{u_1,v_1\},\{u_2,v_2\}\}) \cup \{\{u_1,u_2\},\{v_1,v_2\}\})$.

Veja que

$$\lambda(H') = \lambda(H) \frac{f_{H'}(\{u_1,u_2\}) f_{H'}(\{v_1,v_2\})}{f_H(\{u_1,v_1\}) f_H(\{u_2,v_2\})} = \lambda(H)$$

e ainda H' possui duas arestas especiais a mais que H, contradizendo a definição de H.

(Note que em H e H' cada vértice ainda possui o mesmo grau, e portanto, para todo $e \in E(H) \cap E(H')$, temos $f_H(e) = f_{H'}(e)$).

Portanto, a quantidade de arestas não-especiais de H é, no máximo,

$$\left(\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1) \right)^2 + \binom{r(t-1) - \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}{2} (2r(t-1))^2.$$

Assim, sendo

$$W = \max \left\{ c_{r,S_t}(S_x) c_{r,S_t}(S_y) r^{2r(t-1)-3-x-y} : 1 \leq x,y \leq r(t-1)-1 \right\}$$

temos

$$\lambda(H) \leq W^{\left(\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)\right)^2 + \binom{r(t-1) - \lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}{2} (2r(t-1))^2} \prod_{e \in E(H) \text{ especial}} f(e).$$

Agora, para cada $a \in [\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1), r(t-1)-1] \cap \mathbb{Z}$, seja R_a o conjunto dos vértices de grau a em H. Assim, as arestas especiais cujos vértices têm grau a são as arestas de $H[R_a]$. Assim, a quantidade de tais arestas é

$$\frac{1}{2} \sum_{v \in R_a} \deg_{H[R_a]}(v) \leq \frac{1}{2} \sum_{v \in R_a} \deg_H(v) = \frac{a|R_a|}{2}.$$

Finalmente, tomando $M(r,t) = W^{\left(\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)\right)^2 + \binom{\lfloor \frac{r}{2} \rfloor (t-1)}{2}(2r(t-1))^2}$, obtemos:

$$\lambda(H) \leq M(r,t) \prod_{a=\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}^{r(t-1)-1} \prod_{e \in E(H[R_a])} f(e) \leq M(r,t) \prod_{a=\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}^{r(t-1)-1} \left(c_{r,S_t}(S_a)^2 r^{2r(t-1)-3-2a} \right)^{\frac{a|R_a|}{2}}.$$

Para facilitar nossa vida, tome $w_a = \left(c_{r,S_t}(S_a)^2 r^{2r(t-1)-3-2a} \right)^a$. Assim,

$$\begin{aligned}
\log(\lambda(H)) &\leq \log(M(r,t)) + \sum_{a=\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}^{r(t-1)-1} \frac{|R_a|}{2} \log(w_a) \\
&\leq \log(M(r,t)) + \sum_{a=\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}^{r(t-1)-1} \frac{|R_a|}{2} \max \left\{ \log(w_a) : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \\
&\leq \log(M(r,t)) + \max \left\{ \log(w_a) : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \sum_{a=\lceil \frac{r}{2} \rceil (t-1)}^{r(t-1)-1} \frac{|R_a|}{2} \\
&\leq \log(M(r,t)) + \max \left\{ \log(w_a) : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\} \frac{n}{2}
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$c_{r,S_t}(n)^{2r(t-1)-3} \leq M(r,t) \max \left\{ w_a : a \in \left[\left\lceil \frac{r}{2} \right\rceil (t-1), r(t-1)-1 \right] \cap \mathbb{Z} \right\}^{\frac{n}{2}}. \qquad \square$$

O teorema 3.35 é uma consequência do lema 3.36. Nos dois primeiros pontos, a conta é imediata. Iremos omitir a conta para os dois últimos pontos. Os detalhes podem ser encontrados no paper mencionado.

4 CONTRIBUIÇÕES

Nesse capítulo, exibiremos alguns resultados originais.

Na primeira seção, mostraremos que para padrões completos $\hat{F}$ com k vértices, k suficientemente grande, que figuram até 5 cores, vale que $c_{r,\hat{F}}(n) > r^{t_{n,k-1}}$, para todo r suficientemente grande (em função de k). Note que isso, pelo teorema 3.9, não vale para padrões completos rainbow.

Na segunda seção, iremos trabalhar com o padrão P_2 monocromático, exibindo uma cota inferior para c_{r,P_2} com certa melhora em relação a artigos anteriores. Além disso, exibiremos uma cota inferior para c_{r,S_t}, que ainda não existe na bibliografia.

4.1 Padrões completos grandes com até 5 cores

Definição 4.1. Dado um padrão completo $\hat{F} = (F,C)$ e uma cor $\zeta \in Im(C)$ desse padrão, dizemos que ζ é *incidente* a um vértice $v \in V(F)$ se existe uma aresta da cor ζ incidente a v. Defina ainda a seguinte família de padrões completos

$$\mathscr{F} = \{\hat{F} : \text{ existe uma cor de } \hat{F} \text{ incidente a mais de } \frac{|V(F)|}{2} + 1 \text{ vértices de } F\}.$$

Observação 12. A menos de isomorfismos, podemos assumir que $Im(C) \subset [\binom{|V(F)|}{2}]$ para todo $\hat{F} \in \mathscr{F}$.

Um passo crucial para a demonstração do teorema principal desta seção, é a prova do seguinte lema.

Lema 4.2. *Se $\hat{F} = (F,C) \in \mathscr{F}$, com $|V(F)| = k \geq 3$, então existem inteiros $n_0(k)$ e $r_0(k)$ tais que, para todo $n \geq n_0(k)$ e $r \geq r_0(k)$, temos que o grafo de n vértices que maximiza o número de r-colorações evitando o padrão $\hat{F}$ não é isomorfo ao $T_{n,k-1}$.*

Demonstração. Tome $r_0(k) = k^{k^2}$ e seja $c = \lceil \frac{k+3}{2} \rceil$. Assim, como $\hat{F} \in \mathscr{F}$, existe uma cor incidente a pelo menos c vértices de F. Agora, considere o grafo $T_{n,k}$ cujas batatas são $S_1, S_2, \ldots, S_k$.

Considere agora os subconjuntos $X_1, X_2, \ldots, X_k$ de $\{1,2,\ldots,r\}$ dados por

$$X_t = \left\{ \left\lceil \frac{x}{k+1-c} \right\rceil : x \in \{1,\ldots,r(k+1-c)\},\ x \equiv t \pmod{k} \right\}$$

para todo $t \in \{1,2,\ldots,k\}$. Em outras palavras, estamos acrescentando o 1 em $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1-c}$, acrescentando o 2 em $X_{(k+1-c)+1}, X_{(k+1-c)+2}, \ldots, X_{2(k+1-c)}$, e assim sucessivamente, onde os índices são vistos módulo k.

Como $k+1-c<k$, cada elemento $w \in \{1,2,...,r\}$ aparece em exatamente $k+1-c$ conjuntos dentre os $X_i's$, uma vez que as $k+1-c$ soluções inteiras de $\lceil \frac{x}{k+1-c} \rceil = w$ são consecutivas e portanto possuem congruências distintas duas a duas módulo k.

Além disso, $|X_t| = \lfloor \frac{r(k+1-c)-t}{k} \rfloor + 1 = \lfloor \frac{r(k+1-c)}{k} \rfloor$ ou $\lceil \frac{r(k+1-c)}{k} \rceil$.

Agora vamos colorir arbitrariamente as arestas de S_i para S_j com as cores em $[r] \setminus (X_i \cup X_j)$, para todo $1 \leq i < j \leq k$.

Note que cada uma dessas colorações evita o padrão $\hat{F}$, pois, como F é completo, se tivéssemos uma cópia desse padrão $\hat{F}$, teríamos exatamente um vértice desse padrão em cada S_i e, ainda, uma das cores, digamos azul, dessa coloração seria incidente a pelo menos c vértices. Tais vértices devem estar nos S_i's tais que a cor azul não pertence a X_i, mas a quantidade de tais S_i's é $k-(k+1-c) = c-1 < c$, o que leva a uma contradição.

Assim, como cada aresta pode ser colorida arbitrariamente com, pelo menos, $r - 2\lceil \frac{r(k+1-c)}{k} \rceil$ cores, então o número de colorações nesse grafo que evita $\hat{F}$ é, pelo menos,

$$\left(r - 2\left\lceil \frac{r(k+1-c)}{k} \right\rceil\right)^{t_{n,k}}$$

que é estritamente maior que $r^{t_{n,k-1}}$. Os detalhes da conta serão exibidos abaixo:

Para isso, é suficiente mostrarmos que

$$\left(r - 2\left(\frac{r(k+1-c)}{k} + 1\right)\right)^{t_{n,k}} > r^{t_{n,k-1}}.$$

Isso equivale a

$$1 - \frac{2(k+1-c)}{k} - \frac{2}{r} > r^{\frac{t_{n,k-1}}{t_{n,k}}-1}.$$

Para verificar isto, basta mostrar que

$$1 - \frac{2(k+1-c)}{k} - \frac{2}{k^{k^2}} > r^{\frac{t_{n,k-1}}{t_{n,k}}-1}$$

Como $2c-k-2 \geq 1$, basta então

$$\frac{1}{k} - \frac{2}{k^{k^2}} \geq r^{\frac{t_{n,k-1}}{t_{n,k}}-1}$$

Como

$$\frac{t_{n,k}}{t_{n,k-1}} \geq \frac{\binom{k}{2}\lfloor \frac{n}{k} \rfloor^2}{\binom{k-1}{2}\lceil \frac{n}{k-1} \rceil^2} \geq \frac{k}{k-2}\frac{\left(\frac{n}{k}-1\right)^2}{\left(\frac{n}{k-1}+1\right)^2} = \frac{(k-1)^2}{k(k-2)}\left(\frac{n-k}{n+k-1}\right)^2$$

$$= \frac{(k-1)^2}{k(k-2)}\left(1 - \frac{2k-1}{n+k-1}\right)^2.$$

Então

$$\frac{t_{n,k-1}}{t_{n,k}} - 1 \leq \frac{k(k-2)}{(k-1)^2}\left(1 - \frac{2k-1}{n+k-1}\right)^{-2} - 1 < 0$$

Assim,

$$r^{\frac{t_{n,k-1}}{t_{n,k}}-1} \leq (k^{k^2})^{\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}(1-\frac{2k-1}{n+k-1})^{-2}-1}.$$

Então é suficiente provarmos que

$$(k^{k^2})^{\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}(1-\frac{2k-1}{n+k-1})^{-2}} < k^{k^2-1} - 2.$$

Primeiramente, mostremos que

$$(k^{k^2})^{\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}} < k^{k^2-1} - 2.$$

Isto equivale a

$$k^{k^2-1-\frac{2k-1}{(k-1)^2}} < k^{k^2-1} - 2 \iff \frac{1}{k^{\frac{2k-1}{(k-1)^2}}} + \frac{2}{k^{k^2-1}} < 1.$$

Como $k^{-\frac{2k-1}{(k-1)^2}} < k^{-\frac{2}{k}}$, é suficiente mostrar que

$$k^{-\frac{2}{k}} + \frac{2}{k^{k^2-1}} < 1, \text{ ou ainda }, \frac{2}{k^{k^2-1}} < 1 - k^{-\frac{2}{k}}.$$

Pelo teorema do valor médio, existe $\theta \in \left(-\frac{2}{k}, 0\right)$ tal que

$$1 - k^{-\frac{2}{k}} = \frac{2}{k} k^{\theta} \log(k) > \frac{2\log(k)}{k} k^{-\frac{2}{k}} > \frac{2}{k^{k^2-1}}.$$

Finalmente, como $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2k-1}{n+k-1}\right)^{-2} = 1$, segue que, para todo n suficientemente grande, $n \geq n_0(k)$, vale

$$(k^{k^2})^{\frac{k(k-2)}{(k-1)^2}(1-\frac{2k-1}{n+k-1})^{-2}} < k^{k^2-1} - 2. \qquad \square$$

Observação 13. Se quisermos evitar todos os padrões de $\mathscr{F}$ com exatamente k vértices, então, para todo n suficientemente grande e $r \geq k^{k^2}$, o grafo maximal ainda não seria isomorfo ao $T_{n,k-1}$.

Definição 4.3. Para $t \in \mathbb{Z}_{>0}$, seja $\mathscr{C}_t$ o conjunto dos padrões completos com até t cores, isto é, dos padrões $\hat{F} = (F, C)$ com $|Im(C)| \leq t$.

Teorema 4.4. *$\mathscr{C}_5 \setminus \mathscr{F}$ é finito. Mais especificamente, se $\hat{F} \in \mathscr{C}_5$ com $k \geq 700$ vértices, então $\hat{F} \in \mathscr{F}$.*

Lema 4.5. *Se $\hat{F} = (F,C) \in \mathscr{C}_5 \setminus \mathscr{F}$, então $\hat{F}$ possui no máximo 20 vértices com exatamente duas cores incidentes.*

Demonstração. Com efeito, se existem pelo menos 21 vértices com exatamente duas cores incidentes, então, pelo Princípio da Casa dos Pombos, existem 3 vértices com o mesmo conjunto de duas cores incidentes, digamos azul e vermelho. Sejam u, v e w três vértices tal que as cores incidentes a cada um deles são, precisamente, azul e vermelho. Seja ainda X o conjunto dos demais $k-3$ vértices, onde $k \geq 21$ é a quantidade de vértices do padrão $\hat{F}$. Sejam agora $X = X_1 \cup X_2$, onde X_1 são os vértices de X com a cor azul incidente e X_2 são os vértices de X com a cor vermelha incidente.

Como cada vértice de X é adjacente a v por uma aresta azul ou vermelha, então $X = X_1 \cup X_2$. E ainda, como o conjunto de vértices aos quais a cor azul é incidente é $\{u,v,w\} \cup X_1$ e o conjunto de vértices aos quais a cor vermelha é incidente é $\{u,v,w\} \cup X_2$, segue que

$$\begin{aligned}\left(\frac{k}{2}+1\right)+\left(\frac{k}{2}+1\right) &\geq |\{u,v,w\} \cup X_1| + |\{u,v,w\} \cup X_2| \\ &= 6 + |X_1| + |X_2| \\ &\geq 6 + |X| = k+3\end{aligned}$$

uma contradição. Segue o lema. □

Demonstração da afirmação 4.4: Assuma, por contradição, que existe $\hat{F} \in \mathscr{C}_5 \setminus \mathscr{F}$ com $k \geq 700$ vértices.

É claro que não existe um vértice com apenas uma cor incidente, caso contrário, essa cor seria incidente a todos os demais vértices, o que contradiz $\hat{F} \notin \mathscr{F}$. Além disso, pelo lema, existem pelo menos $k-20$ vértices com 3 ou mais cores incidentes.

Dentre as até 5 cores que aparecem em $\hat{F}$, sejam azul e vermelho duas delas. Dentre os vértices com pelo menos 3 cores incidentes, sejam A o conjunto dos vértices que possuem as cores azul e vermelho incidentes, B o conjunto dos vértices que possuem a cor azul incidente, mas não possuem a cor vermelha incidente, C o conjunto dos vértices que possuem a cor vermelha incidente, mas não possuem a cor azul incidente e D o conjunto dos vértices que não possuem

nem a cor azul incidente nem a cor vermelha incidente. Assim, sendo $|A| = \alpha$, $|B| = \beta$, $|C| = \gamma$ e $|D| = \theta$, temos:

$$\alpha+\beta \leq \frac{k}{2}+1, \quad \alpha+\gamma \leq \frac{k}{2}+1, \quad \alpha+\beta+\gamma+\theta \geq k-20 \quad (i)$$

Além disso, as cores incidentes a cada um dos vértices de D devem ser todas as três cores distintas de azul e vermelho. Portanto, em $A \cup B \cup C$, cada uma dessas três cores deve ser incidente a no máximo $\frac{k}{2}+1-\theta$ vértices. Como em cada vértice de $A \cup B \cup C$ devem haver pelo menos 3 cores incidentes, segue que

$$\alpha+\beta+\gamma = |A \cup B \cup C| \leq 3\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right) \quad (ii)$$

Assim, de (i) e (ii), obtemos

$$\frac{3k}{2}+3 \geq \alpha+\beta+\gamma+3\theta \geq k-20+2\theta \quad \Rightarrow \quad \theta \leq \frac{k}{4}+11.5 \quad (iii)$$

E de (i):

$$k-20-\theta \leq \alpha+\beta+\gamma \leq \frac{k}{2}+1+\gamma \quad \Rightarrow \quad \gamma \geq \frac{k}{2}-21-\theta \quad (iv)$$

Analogamente, $\beta \geq \frac{k}{2}-21-\theta$.

Vejamos agora as arestas entre B e C. Tais arestas não podem ser nem vermelhas nem azuis, aparecendo entre elas apenas as três cores restantes. Sendo ζ uma dessas cores, e x a quantidade de vértices em B com a cor ζ incidente e y a quantidade de vértices em C com a cor ζ incidente, então a quantidade de arestas entre B e C com a cor ζ é, no máximo,

$$xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} \leq \frac{\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right)^2}{4}.$$

O análogo vale para as demais duas cores. Portanto, a quantidade de arestas entre B e C é, no máximo, $3\frac{\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right)^2}{4}$, o que nos dá, por (iv),

$$\left(\frac{k}{2}-21-\theta\right)^2 \leq \beta\gamma \leq 3\frac{\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right)^2}{4}.$$

Como $\frac{k}{2}+1-\theta > \frac{k}{2}-21-\theta \geq \frac{k}{2}-21-\left(\frac{k}{4}+11.5\right) > 0$, então

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right) \geq \frac{k}{2}-21-\theta$$

$$\Longrightarrow \quad 22 \geq \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+1-\theta\right) \geq \left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\frac{k}{2}+1-\left(\frac{k}{4}+11.5\right)\right)$$

uma contradição para $k \geq 700$. □

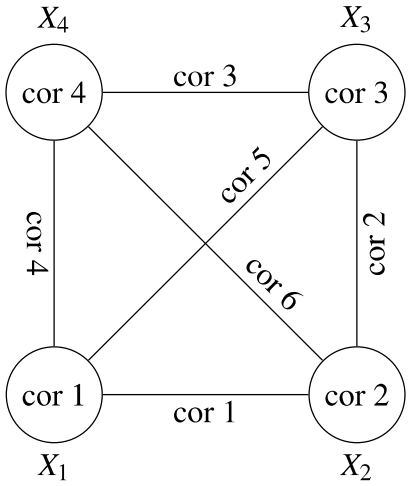
Observação 14. $\mathscr{C}_6 \setminus \mathscr{F}$ é infinito.

Com efeito, para cada inteiro positivo n, considere o padrão (K_{4n}, C) com 6 cores, tal que, sendo

$$X_i = \{(i-1)n + j : j \in [n]\}$$

para todo $i \in \{1,2,3,4\}$, (ver fig. 3) a cor das arestas com ambas as extremidades em X_i é igual a i. Ademais, a cor das arestas em $K_{4n}[X_1, X_2]$ é igual a 1, em $K_{4n}[X_2, X_3]$ é igual a 2, em $K_{4n}[X_3, X_4]$ é igual a 3, em $K_{4n}[X_4, X_1]$ é 4, em $K_{4n}[X_1, X_3]$ é 5, em $K_{4n}[X_2, X_4]$ é 6.

Figura 3 – Exemplo de padrão completo com 6 cores onde cada cor é incidente a metade dos vértices



Fonte: elaborado pelo autor.

Com isso, $(K_{4n}, C) \in \mathscr{C}_6 \setminus \mathscr{F}$, uma vez que cada uma das 4 cores é incidente a metade dos vértices de K_{4n}.

4.2 Uma nova cota inferior para $c_{r,S_k}(n)$

Aqui, iremos exibir uma cota inferior para $c_{r,S_k}(n)$, onde S_k é o padrão monocromático da k-estrela.

Lema 4.6. *Sejam $k < n$ inteiros positivos e seja G um grafo bipartido completo cujas batatas têm k e n vértices, respectivamente. Então, o número de n-colorações próprias de arestas de G é $L_{k\times n}$*

Demonstração. Sejam $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ e seja $[n]$ o conjunto das cores. Vamos colorir aleatoriamente as arestas de G. A partir da coloração, monte uma matriz $M =$

$(m_{i,j})_{(i,j)\in[k]\times[n]}$ tal que $m_{i,j}$ é a cor da aresta $\{a_i, b_j\}$.

Veja que tal coloração é própria em G se, e somente se, M é um retângulo latino $k \times n$. O resultado segue. □

Teorema 4.7. *Vale que*

$$b_{r,S_k} \geq L_r^{\frac{k-1}{2r}} \geq \left(2\pi r \left(\frac{r}{e^2}\right)^r\right)^{\frac{(k-1)}{2}}.$$

Demonstração. Considere um grafo G de n vértices. Divida os n vértices em $k\lfloor\frac{n}{kr}\rfloor$ conjuntos de r vértices e ignore os demais vértices. Sejam $A_{i,j}$ tais conjuntos, com $1 \leq i \leq l$ e $1 \leq j \leq k$, onde $l = \lfloor\frac{n}{kr}\rfloor$. Agora tome

$$E(G) = \bigcup_{1\leq i\leq l} \bigcup_{1\leq j_1<j_2\leq k} A_{i,j_1} \times A_{i,j_2}.$$

Agora, iremos colorir aleatoriamente as arestas de G com as r cores de modo que as arestas em $A_{i,j_1} \times A_{i,j_2}$ sejam coloridas de maneira própria para cada tripla (i, j_1, j_2) com $1 \leq i \leq l$ e $1 \leq j_1 < j_2 \leq k$. Note, portanto, que qualquer uma dessas colorações evita S_k monocromático. Daí,

$$c_{r,S_k}(n) \geq L_r^{l\binom{k}{2}} = L_r^{\lfloor\frac{n}{kr}\rfloor\binom{k}{2}}.$$

Usando a cota $L_r \geq \frac{r!^{2r}}{r^{r^2}}$, obtemos

$$c_{r,S_k}(n) \geq \left(\frac{r!^{2r}}{r^{r^2}}\right)^{\lfloor\frac{n}{kr}\rfloor\binom{k}{2}},$$

que nos dá

$$b_{r,S_k} \geq \left(\frac{r!^{2r}}{r^{r^2}}\right)^{\frac{1}{kr}\binom{k}{2}} = \left(\frac{r!^2}{r^r}\right)^{\frac{k-1}{2}}.$$

Ora,

$$\frac{r!^2}{r^r} \geq \frac{2\pi r\left(\frac{r}{e}\right)^{2r}}{r^r} = \frac{2\pi r^{r+1}}{e^{2r}} = 2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r.$$

E assim,

$$b_{r,S_k} \geq L_r^{\frac{k-1}{2r}} \geq \left(2\pi r \left(\frac{r}{e^2}\right)^r\right)^{\frac{(k-1)}{2}}.$$

□

Em particular, para $k=2$, obtemos $b_{r,P_2} \geq \left(\frac{r!^2}{r^r}\right)^{\frac{1}{2}}$, que, se $r \geq 6$, melhora a cota inferior do teorema 3.28. Com efeito, lá tínhamos que $b_{r,P_2} \geq 3^{\frac{r}{6}}$ e temos que

$$\left(\frac{r!^2}{r^r}\right)^{\frac{1}{2}} > 3^{\frac{r}{6}} \iff \frac{r!^2}{r^r} > 3^{\frac{r}{3}}.$$

E assim o resultado segue para $r \geq \lceil e^2\sqrt[3]{3}\rceil = 11$, pois

$$\frac{r!^2}{r^r} \geq 2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r > \left(\frac{r}{e^2}\right)^r > 3^{\frac{r}{3}}.$$

E computacionalmente verifica-se para $6 \leq r \leq 10$.

Veja que, com isso e com teorema 3.28, temos as seguintes cotas:

$$\sqrt{2\pi r}\left(\frac{r}{e^2}\right)^{\frac{r}{2}} \leq b_{r,P_2} \leq r!^{\frac{1}{2}} \sim \sqrt[4]{2\pi r}\left(\frac{r}{e}\right)^{\frac{r}{2}}.$$

Bem, essa cota inferior não é, de certa forma, apertada. Podemos melhorá-la levemente trocando a ideia do quadrado latino $r \times r$ por um retângulo latino $k \times r$, isto é, considere um grafo G de n vértices, dividindo os n vértices em $\lfloor \frac{n}{r+k} \rfloor$ conjuntos de $r+k$ vértices, ignorando os vértices restantes. Em cada um desses conjuntos com $r+k$ vértices, construa um grafo bipartido completo cujas partes têm r e k vértices. Assim,

$$c_{r,P_2}(n) \geq L_{k\times r}^{\lfloor \frac{n}{k+r} \rfloor}$$

e, portanto,

$$b_{r,P_2} \geq L_{k\times r}^{\frac{1}{k+r}} \geq \left(\frac{r!^{r+k}}{(r-k)!^r r^{rk}}\right)^{\frac{1}{k+r}}.$$

E, por exemplo, para $k = r - \lfloor\sqrt{r}\rfloor$, obtemos

$$b_{r,P_2} \geq \frac{r!}{r^{\frac{r}{2}}}\left(\frac{e^{\lfloor\sqrt{r}\rfloor}}{\sqrt{2\pi\sqrt{r}}(1+o(1))}\right)^{\frac{r}{2r-\lfloor\sqrt{r}\rfloor}} \ggg \left(\frac{r!^2}{r^r}\right)^{\frac{1}{2}}$$

para r suficientemente grande.

Entretanto, isso não é suficiente para encontrar uma constante $c > \frac{1}{e^2}$ tal que $b_{r,P_2} \geq (cr)^{\frac{r}{2}}$ para todo r suficientemente grande.

Finalmente, iremos verificar agora que o teorema 4.7 melhora o proposição 3.34, isto é, vamos verificar que

$$\left(2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r\right)^{\frac{(t-1)}{2}} \ggg c_{r,S_t}(T_{2t,2})^{\frac{1}{2t}}.$$

Para tal, note que

$$c_{r,S_t}(T_{2t,2})^{\frac{1}{t}} < \left(2r^{t^2} + (r-1)r^{t^2} + r^{t^2+1}\sum_{g=0}^{t}\binom{t}{g}\right)^{\frac{1}{t}} = \left(r^{t^2+1}\left(1+\frac{1}{r}+2^t\right)\right)^{\frac{1}{t}} < r^{\frac{t^2+1}{t}}2^{\frac{t+1}{t}} < 4r^{t+1}$$

$$\lll \left(2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r\right)^{t-1}.$$

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nesta dissertação, revisamos alguns resultados já conhecidos, tais como:

1. Dado um padrão $\hat{F}$ completo, para cada inteiro positivo n, existe um grafo multipartido completo G de n vértices tal que $c_{r,\hat{F}}(G) = c_{r,\hat{F}}(n)$, utilizando uma ideia de simetrização. Revisamos também que, se $\hat{F}$ não for monocromático e for distinto de dois padrões específicos, então tal igualdade ocorre apenas para padrões multipartidos completos.
2. Utilizando regularidade e estabilidade, mostramos que, se $\hat{F}$ for monocromático, então $c_{r,F}(n) = r^{t_{n,|V(F)|-1}}$ para n suficientemente grande, desde que $r \in \{2,3\}$, com igualdade ocorrendo apenas nos grafos isomorfos a $T_{n,|V(F)|-1}$, e apresentamos contraexemplos para casos com $r \geq 4$.
3. Se $\hat{F}$ é um padrão rainbow, então, para todo $r \geq 2$, existe um inteiro positivo $n_0(r)$ tal que, para $n \geq n_0(r)$, vale que $c_{r,\hat{F}}(n) = r^{t_{n,|V(F)|-1}}$.
4. Se $\mathbf{k} \in \mathbb{N}^s$ e $\mathbf{k}$ tiver a propriedade de extensão forte, então todo grafo suficientemente grande que evita $K_{\mathbf{k}}$ é multipartido completo, cujo tamanho das batatas pode ser encontrado através de um problema de otimização.
5. Se $\hat{F}$ é um padrão conexo monocromático com número de Turán linear, então temos que $c_{r,F}(n) \ggg r^{ex(n,F)}$ desde que $r \geq 4$. Além disso, para qualquer $r \geq 2$, vimos que existe o limite
$$b_{r,F} := \lim_{n\to\infty} c_{r,F}(n)^{\frac{1}{n}}.$$
6. Quanto às estrelas, temos que $b_{r,S_t} \leq \sqrt{\chi_{r,t}}$.

Apresentamos também dois resultados novos, que são:

- Se $\hat{F}$ é um padrão com pelo menos 700 vértices e no máximo 5 cores, então, para r suficientemente grande, $c_{r,\hat{F}}(n) > r^{t_{n,|V(F)|-1}}$ para todo $n \geq n_0(r)$.
- Quanto às estrelas, temos que $b_{r,S_t} \geq \left(2\pi r\left(\frac{r}{e^2}\right)^r\right)^{\frac{t-1}{2}}$. Usando a ideia de retângulos latinos, melhoramos um pouco a cota para $t = 2$, obtendo
$$b_{r,P_2} \geq \frac{r!}{r^{\frac{r}{2}}}\left(\frac{e^{\lfloor\sqrt{r}\rfloor}}{\sqrt{2\pi\sqrt{r}}(1+o(1))}\right)^{\frac{r}{2r-\lfloor\sqrt{r}\rfloor}}.$$

O primeiro desses resultados generaliza o item (2), no qual o mesmo valia apenas para $\hat{F}$ monocromático. Além disso, (3) mostra que o mesmo resultado não vale para padrões rainbow.

O segundo resultado nos dá uma cota inferior para b_{r,P_2}. Essa nova cota, juntamente com (6), nos dá que

$$\frac{1}{e} \leq \frac{b_{r,P_2}^{\frac{1}{r}}}{\sqrt{r}} \leq \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

A nossa conjectura é que existe o limite

$$\lim_{r\to\infty} \frac{b_{r,P_2}^{\frac{1}{r}}}{\sqrt{r}}.$$

Caso tal limite exista, ele deverá estar entre $\frac{1}{e}$ e $\frac{1}{\sqrt{e}}$.

REFERÊNCIAS

ALON, N.; BALOGH, J.; KEEVASH, P.; SUDAKOV, B. The number of edge colorings with no monochromatic cliques. **Journal of the London Mathematical Society**, [*s.l.*], v. 70, n. 2, p. 273-288, 2004.

ALON, N.; SPENCER, J. H. **The probabilistic method**. [*S.l.*]: John Wiley & Sons, 2016.

BENEVIDES, F. S.; HOPPEN, C.; SAMPAIO, R. M. Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring. **Discrete Mathematics**, [*s.l.*], v. 340, n. 9, p. 2143-2160, 2017.

BOTLER, F. H.; COLLARES, M.; MARTINS, T.; MENDONÇA, W.; MOTA, G. O. **Combinatória**. Rio de Janeiro: IMPA, 2022.

COLUCCI, L.; GYORI, E.; METHUKU, A. Edge colorings of graphs without monochromatic stars. **Discrete Mathematics**, [*s.l.*], v. 343, n. 12, p. 112140, 2020.

ERDÖS, P. Some of my favourite problems in various branches of combinatorics. **Le Matematiche**, [*s.l.*], v. 47, n. 2, p. 231-240, 1992.

HABIB, M.; MCDIARMID, C.; RAMIREZ-ALFONSIN, J.; REED, B. **Probabilistic methods for algorithmic discrete mathematics**. [*S.l.*]: Springer Science & Business Media, 2013. v. 16.

HOPPEN, C.; KOHAYAKAWA, Y.; LEFMANN, H. Edge-colorings of graphs avoiding fixed monochromatic subgraphs with linear Turán number. **European Journal of Combinatorics**, [*s.l.*], v. 35, p. 354-373, 2014.

HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; NOLIBOS, D. An extension of the rainbow Erdös-Rothschild problem. **Discrete Mathematics**, [*s.l.*], v. 344, n. 8, p. 112443, 2021.

LINT, J. H. V.; WILSON, R. M. **A course in combinatorics**. [*S.l.*]: Cambridge university press, 2001.

PIKHURKO, O.; STADEN, K. Exact solutions to the Erdös-Rothschild problem. **Forum of Mathematics, Sigma**, [*s.l.*], v. 12, p. e8 1-45, 2024.

PIKHURKO, O.; STADEN, K.; YILMA, Z. B. The Erdös-Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, [*s.l.*], v. 163, n. 2, p. 341-356, 2017.

WEST, D. B. et al. **Introduction to graph theory.** [*S.l.*]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001. v. 2.