UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

19 de Junho de 2026

Número de inscrição do candidato: ______________________________

Questão 1. Resolva os itens abaixo:

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Use que $\mathbb{R}$ é não-enumerável para mostrar que o intervalo aberto $I = (a, b)$ é não-enumerável.

Demonstração. Seja $f : (0,1) \to (a,b)$ definida por

$$f(t) = a(1-t) + tb.$$

Note que $f(t) = a + t(b-a)$ está bem definida, pois $t(b-a) > 0$ e $t(b-a) < b-a$ permitem concluirmos que

$$a < f(t) < b.$$

Ademais, $(b-a) \neq 0$ implica que f é injetiva. Dado $y \in (a,b)$ temos

$$t_y = \frac{y-a}{b-a} \in (0,1) \quad \text{e} \quad f(t_y) = y,$$

ou seja, f é sobrejetiva. Então podemos inferir que existe um bijeção $h : (-1,1) \to (a,b)$. Agora considere $g : \mathbb{R} \to (-1,1)$ dada por

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Como

$$|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$$

concluímos que g está bem definida. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ temos $\sqrt{1+x^2} > 0$ e $\sqrt{1+y^2} > 0$, então

$$g(x) = g(y)$$

permite deduzirmos que $x^2 - y^2 = 0$ com x e y possuindo o mesmo sinal, isto é, $x = y$. Finalmente, dado $z \in (-1,1)$ temos

$$g\left(\frac{z}{\sqrt{1-z^2}}\right) = z.$$

Logo g é bijetiva. Agora assuma por contradição que (a,b) é enumerável. Então $h \circ g : \mathbb{R} \to (a,b)$ seria uma bijeção entre um enumerável e $\mathbb{R}$, o que é uma contradição, pois $\mathbb{R}$ é não-enumerável. $\square$

b) Use o item a) para provar que todo intervalo aberto não-degenerado possui um número racional e um número irracional.

Demonstração. Pelo item a) sabemos que I é não-enumerável. Então $I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset$. Ademais, se $c = \frac{a+b}{2}$ e $d = \frac{c+b}{2}$ temos $[c, d] \subset I$. Se $\{c, d\} \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ o resultado está provado. Caso a e b sejam irracionais, escolha $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < d - c$ e use o princípio da boa ordenação para escrever

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} \left[\frac{m}{n}, \frac{m+1}{n} \right].$$

Portanto existe $m \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\frac{m}{n} < c < \frac{m+1}{n} < d,$$

ou seja, $\dfrac{m+1}{n} \in I$. □

Questão 2. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, a é o limite de uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos.

Demonstração. Seja $a \in X'$. Existe $x_1 \in X$ tal que

$$0 < |x_1 - a| < \varepsilon_1, \quad \text{onde } \varepsilon_1 = 1.$$

Assuma que existem $x_1, \ldots, x_{n+1} \in X \setminus \{a\}$ e $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n+1} > 0$ satisfazendo

$$0 < |x_{i+1} - a| < \varepsilon_{i+1}, \quad \text{onde } \varepsilon_{i+1} = \min \left\{ |x_i - a|, \frac{1}{i+1} \right\},$$

para $i = 1, \ldots, n$. Faça $\varepsilon_{n+2} = \min \left\{ |x_{n+1} - a|, \frac{1}{n+2} \right\}$. Como $a \in X'$ existe $x_{n+2} \in X$ tal que

$$0 < |x_{n+2} - a| < \varepsilon_{n+2}.$$

Então, por construção temos (x_n) em $X \setminus \{a\}$ com

$$0 < |x_{n+1} - a| < \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad |x_{n+1} - a| < |x_n - a|, \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Logo $\lim x_n = a$. Ademais, dado $n \in \mathbb{N}$ usamos o princípio da indução e (1) para inferirmos que $x_{n+p} \neq x_n$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Reciprocamente, suponha que existe (x_n) em X dois a dois distintos com $\lim x_n = a$. Então temos duas possibilidades:

1. A sequência (x_n) satisfaz $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e podemos concluir que $a \in X'$.
2. Existe n_0 tal que $x_{n_0} = a$. Como $x_n \neq x_m$ para $m \neq n$ concluímos que $y_n = x_{n+n_0} \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\lim y_n = a$. Portanto $a \in X'$.

□

Questão 3. Resolva os itens abaixo:

a) Mostre que não existe $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua que transforme todo número racional em um irracional e vice-versa.

Demonstração. Suponha por contradição que tal f existe. Note que f não é constante, pois

$$f(\mathbb{Q}) \neq \emptyset,\ \ f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \neq \emptyset \text{ e } f(\mathbb{Q}) \cap f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) = \emptyset.$$

Então $f(\mathbb{R})$ é um intervalo não-degenerado e satisfaz

$$f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{Q}) \cup f(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \subset f(\mathbb{Q}) \cup \mathbb{Q}.$$

Logo $f(\mathbb{R})$ seria enumerável, o que é uma contradição. $\square$

b) Prove que a série harmônica diverge. Conclua que a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ também diverge.

Demonstração. Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Provaremos por indução que

$$s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, temos

$$s_2 = 1 + \frac{1}{2}.$$

Ademais, supondo que $s_{2^n} \geq 1 + \frac{n}{2}$ obtemos

$$\begin{aligned} s_{2^{n+1}} &= s_{2^n} + \sum_{k=1}^{2^n} \frac{1}{2^n + k} \\ &\geq \left(1 + \frac{n}{2}\right) + \frac{2^n}{2^{n+1}} \\ &= 1 + \frac{(n+1)}{2}. \end{aligned}$$

Como (s_n) é não-decrescente concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \lim s_n = \infty.$$

Analogamente, provamos por indução que

$$\sum_{n=2}^{2^n} \frac{1}{n \ln n} \geq \frac{1}{2 \ln 2} s_n,$$

onde s_n representa a soma parcial da série harmônica para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, pelo princípio de comparação, temos $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ divergente. □

Questão 4. Considere a sequência

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + nx^2}, \quad \text{para } x \in [0, 1]\,.$$

a) Determine o limite pontual de (f_n).

Demonstração. Fixado $x \in (0, 1]$ temos

$$0 \leq |f_n(x)| \leq \frac{1}{nx} \tag{2}$$

e pelo Teorema do Sanduíche para sequências de números reais obtemos $\lim f_n(x) = 0$. Ademais, $f_n(0) = 0$ implica que $\lim f_n(0) = 0$. Logo (f_n) converge pontualmente para 0. □

b) Verifique se a convergência é uniforme.

Demonstração. Dado $x \in [0, 1]$ temos

$$f_{n+1}(x) = \frac{x}{1 + (n+1)x^2} \leq \frac{x}{1 + nx^2} = f_n(x),$$

ou seja, $(f_n(x))$ é não-crescente e convergente (pelo item a)). Ademais, f_n e 0 são funções contínuas no compacto $[0, 1]$. Então, pelo Teorema de Dini, a sequência (f_n) converge uniformemente para 0. □

c) Calcule

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx.$$

Demonstração. Como f_n converge uniformemente para 0 obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right) dx = 0.$$

□

Questão 5. Resolva os itens abaixo:

a) Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ com $a < b$. Use o princípio dos intervalos encaixados para provar diretamente (sem usar o Teorema do valor médio) que se $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ é derivável, com $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, então f é constante.

Demonstração. Suponha por contradição que existem $x_0, y_0 \in (a, b)$ tais que $\mu = |f(y_0) - f(x_0)| > 0$. Então, pela desigualdade triangular de números reais, em pelo menos uma das metades de $[x_0, y_0]$, digamos $[x_1, y_1]$, temos $|f(y_1) - f(x_1)| > \frac{\mu}{2}$. Assim, podemos construir indutivamente intervalos $[x_{n-1}, y_{n-1}]$ tais que

$$[x_{n-1}, y_{n-1}] \supset [x_n, y_n], \quad y_n - x_n = \frac{y_0 - x_0}{2^n} \quad \text{e} \quad |f(y_n) - f(x_n)| > \frac{\mu}{2^n}, \tag{3}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema dos intervalos encaixados existe $\theta \in \mathbb{R}$ com $x_n \leq \theta \leq y_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$. Logo

$$|f'(\theta)| = \lim \frac{|f(y_n) - f(x_n)|}{y_n - x_n} \geq \frac{\mu}{y_0 - x_0} > 0, \tag{4}$$

o que é uma contradição. □

b) Suponha que $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaz $f''(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f tem no máximo um mínimo global.

Demonstração. Como $f \in C^2(\mathbb{R})$ satisfaz $f''(x) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ concluímos que f' é estritamente crescente. Caso exista $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(c)$ é um valor extremo global de f, devemos ter $f'(c) = 0$. Então c é o único real tal que $f'(c) = 0$, pois f' é estritamente crescente. Ademais, $f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f''(c) \geq 1$, ou seja, $f(c)$ é um mínimo global. □