UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

Prova espelho

Questão 1. Seja $f : [0,1] \to [0,1]^2$ uma função continua.

(a) Prove que f não pode ser uma bijeção.

(b) Dê um exemplo de função $f : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$ sobrejetiva.

Demonstração. (a) Se f for uma bijeção então f^{-1} está definida. Todo fechado em $F \subset [0,1]$ é compacto. Logo, temos que $f(F)$ é compacto. Portanto, f^{-1} é continua e temos, que dado $0 < x < 1$, $f^{-1}([0,1]^2 \setminus \{f(x)\}) = [0,x) \cup (x,1]$ deveria ser conexo. Contradição.

(b) Um exemplo é dado pela curva de Peano: Escreva $x \in [0,1]$ como $x = 0, x_1 x_2 \dots$ com $x_i \in \{0,1\}$. Defina $f(x) = (0, x_1 x_3 x_5 \dots ; 0, x_2 x_4 x_6 \dots)$.

□

Questão 2. Prove que se existe $f : [0,1]^m \to [0,1]^n$, de classe C^1 e sobrejetiva, então $n \leq m$.

Demonstração. Se f for C^1, como o domino é compacto temos derivada limitada, logo f é Lipchitz. Isto implica que $f([0,1]^m)$ tem medida nula se $m < n$. Contradição. □

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferenciável com $\|Df(x)\| \leq 0,9$. Prove que f tem um único ponto fixo, isto é um único ponto p tal que $f(p) = p$.

Demonstração. Pela desigualdade do valor médio temos que $\|f(x) - f(y)\| \leq 0,9\|x - y\|$. Seja $x \in \mathbb{R}^n$ e defina $x_n = f^n(x)$. Temos $\|x_{n+1} - x_n\| \leq \|Df^n\| \|x_1 - x\|$. Assim, pela desigualdade triangular, segue que

$$\|x_n - x_m\| \leq \sum_{j=m+1}^{n} 0,9^j \|x_1 - x\| \leq \frac{0,9^m}{0,1} \|x_1 - x\|,$$

o que implica que a sequencia é de Cauchy e ,portanto, converge para um ponto p. Como $f(x_n) = x_{n+1}$, fazendo $n \to \infty$, deduzimos que $f(p) = p$. Finalmente, se existe $q \neq p$ tal que $q = f(q)$, então

$$|p - q| = \|f(p) - f(q)\| \leq 0,9\|p - q\| < |p - q|.$$

Contradição. Logo, p é o único ponto fixo. □

Questão 4. Seja A uma matriz $n \times n$. Mostre que o vetor $v \in S^{n-1}$ em que $\|Av\|$ atinge seu máximo é um autovetor de $A^T A$.

Demonstração. Defina $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ como $f(v) = \langle Av, Av\rangle$. Como f é continua e a esfera é compacta temos que f atinge seu máximo. Pelo método dos multiplicadores de Lagrange esse máximo tem que ser atingido num ponto em que $\nabla(f)$ seja múltiplo do vetor normal à esfera. Temos que $\nabla(f)(v) = 2A^T Av$ e o normal a esfera em v é o próprio v. Logo $2A^T Av = \lambda v$ implicando que v é um autovetor de $A^T A$. □

Questão 5. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma superfície. Prove que seu fibrado tangente

$$TM = \{(x, v); x \in M; v \in T_x M\} \subset \mathbb{R}^{2n}$$

é uma superfície orientável.

Demonstração. Seja $\varphi : U \subset \mathbb{R}^m \to M$ uma carta da variedade, definimos

$$\begin{aligned} \widehat{\varphi} : U \times \mathbb{R}^m &\to TM \\ (x, v) &= (\varphi(x), D\varphi(x)v). \end{aligned}$$

Logo dado $\mathcal{A}$ um atlas de M definimos $\widehat{\mathcal{A}} = \{\widehat{\varphi}; \varphi \in \mathcal{A}\}$. Isto é um atlas de TM, pois se temos $(p, v) \in \widehat{\varphi}(U) \cap \widehat{\psi}(V)$ a mudança de cartas é

$$\widehat{\varphi}^{-1} \circ \widehat{\psi}(x, v) = (\varphi^{-1} \circ \psi(x), D(\varphi^{-1} \circ \psi)(x)v).$$

Isto é um difeomorfismo local C^∞. Alem disso sua derivada é dada por

$$\begin{pmatrix} D(\varphi^{-1} \circ \psi)(x) & 0 \\ B & D(\varphi^{-1} \circ \psi)(x) \end{pmatrix}.$$

Logo o Jacobiano é $\det(D(\varphi^{-1} \circ \psi)(x))^2 > 0$. Ou seja, o atlas é coerente, Segue então que TM é orientavel. □

Questão 6. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies compactas conexas e de classe C^k. Seja $f : M \to N$ tal que para todo $x \in M$ a derivada $Df(x) : T_x M \to T_{f(x)} N$ é um isomorfismo.

(a) Mostre que f é sobrejetiva.

(b) Mostre que para todo $y \in N$, $\#f^{-1}(y)$ é finito.

(c) Prove que a $\#f^{-1}(y)$ é uma função localmente constante.

(d) Conclua que $\#f^{-1}(y)$ é constante.

Demonstração. (a) Como $Df(x)$ é um isomorfismo temos que f é uma aplicação aberta. Como M é compacta temos que $f(M) \subset N$ é aberto e fechado em N. Como N é conexa, temos que $f(M) = N$.

(b) Pela parte anterior, para todo $y \in N$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$. Vamos provar agora que para todo $y \in N$, $f^{-1}(y)$ é finito. Suponha que este não seja o caso. Como M é compacta, podemos tomar uma sequencia de pontos $x_n \in f^{-1}(y)$, $x_k \neq x_j$ para $i \neq j$, convergindo para x. Por continuidade $f(x) = y$. Pelo teorema da aplicação inversa, existe uma vizinhança de x onde f é um difeomorfismo. Mas, para n grande x_n deve estae nesta vizinhança, contradição.

(c) Vamos mostrar que para todo $y \in N$ existe $\delta > 0$ tal que $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$ para todo $z \in B_\delta(y)$. Seja $x \in f^{-1}(y)$. Então, pelo teorema da aplicação inversa, existe um $\alpha > 0$ tal que f restrito a $B_\alpha(x)$ é um difeomorfismo. Tomando α suficientemente pequeno de modo que as bolas $B_\alpha(x)$ sejam disjuntas, tem-se que $\cup_{x\in f^{-1}(y)} f(B_\alpha(x))$ é um aberto que contem y. Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y)$ tem pelo menos $\#f^{-1}(y)$ pré-imagens. Agora vamos mostrar que podemos se δ é suficientemente pequeno, todo ponto em $B_\delta(y)$ tem exatamente a mesma quantidade de pré-imagens: Se isto não acontece, então podemos encontrar um sequencia $(z_n)_{n\geq 1}$ tal que

$$z_n \notin \cup_{x\in f^{-1}(y)} B_\alpha(x), \quad d(z_n, y) \leq 1/n.$$

Como $M \setminus \cup_{x\in f^{-1}(y)} B_\alpha(x)$ é compacto, a menos de refução a uma sub-sequencia, temos que $z_n \to z$ e por, continuidade $f(z) = y$. Contradição.

(d) Pelo item anterior para cada $k \in \mathbb{N}$ o conjunto de pontos tais que $\#f^{-1}(y) = k$ é aberto. Já que N é conexo, só um deles pode ser diferente de vazio. $\square$