UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação do Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

15 de Setembro de 2025

Nome: ____

Questão 1. Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e conexo. Um caminho contínuo $\gamma : [0,1] \to A$ é dito linear por partes se existe uma partição $\{p_0, \dots, p_k\}$ de $[0,1]$ tal que a restrição $\gamma \mid_{[p_i, p_{i+1}]}$ de γ ao subintervalo $[p_i, p_{i+1}]$ é um segmento de reta, para todo $i = 0, 1, \dots, k-1$. Dados $x, y \in A$, prove que existe um caminho contínuo $\gamma : [0,1] \to A$, linear por partes, tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Questão 2. Sejam $K \subset U$ subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que K é compacto e U aberto. Prove que existe $\varepsilon > 0$ tal que se $x \in K$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $|x - y| < \varepsilon$, então o segmento de reta que liga x e y está contido em U.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função contínua, possuindo todas as derivadas direcionais em qualquer ponto de $\mathbb{R}^3$. Suponha que

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) > 0, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } |u| = 3$$

e

$$\frac{\partial f}{\partial u}(u) < 0, \text{ para todo } u \in \mathbb{R}^3 \text{ tal que } |u| = 2.$$

Mostre que existem ao menos dois pontos distintos $a, b \in \mathbb{R}^3$ tais que $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = 0 = \frac{\partial f}{\partial v}(b)$, para todo $v \in \mathbb{R}^3$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua, positiva, tal que

$$\int_0^1 f(x)dx = 1 = \int_1^2 f(x)dx.$$

Para cada $x \in [0,1]$, mostre que existe um único $g(x) \in [1,2]$ tal que

$$\int_x^{g(x)} f(t)dt = 1.$$

Mostre que a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ assim definida é de classe C^1.

Questão 5. Uma função $f : [0,1] \to [0,1]^2$ é dita α-Hölder se existe $C > 0$ tal que

$$d(f(x), f(y)) \leq C|x-y|^\alpha, \text{ para todos } x, y \in [0,1],$$

onde d representa a distância Euclidiana em $\mathbb{R}^2$. Quando $\alpha = 1$, diz-se que f é Lipschitziana.

(a) Prove que não existe função Lipchitziana $f : [0,1] \to [0,1]^2$ sobrejetiva.

(b) Prove que se $f : [0,1] \to [0,1]^2$ é α-Hölder e sobrejetiva, então $\alpha \leq 0,5$.

Questão 6. Seja $X = (a_0, \ldots, a_m)$ um campo de vetores de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+1}$, onde $a_i : U \to \mathbb{R}$ são as funções que representam as coordenadas de X. Sejam $K \subset U$ um domínio compacto com fronteira regular de classe C^k ($k \geq 1$). A função div $X : U \to \mathbb{R}$ é definida por

$$\text{div } X(x) = \frac{\partial a_0}{\partial x_0}(x) + \ldots + \frac{\partial a_m}{\partial x_m}(x).$$

(a) Prove que existe $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^{m+1}$ campo de vetores unitários e perpendiculares a ∂K que é contínuo.

(b) Enuncie o Teorema de Stokes no contexto de formas diferenciais.

(c) Use o Teorema de Stokes no contexto de formas diferenciais para relacionar a integral de superfícies de $\langle X, \nu \rangle dV_{\partial K}$ sobre ∂K e a integral da função div X sobre o domínio K, onde $dV_{\partial K}$ representa a forma elemento de volume de ∂K.