Universidade Federal do Ceará
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Exame de Seleção 2026.1 - Mestrado em Matemática

Programa de Pós-graduação em Matemática (PGMAT)
Data: 19 de fevereiro de 2026

Nota

Número Inscrição: ________________

Assinale as 6 questões escolhidas:

( ) Questão 1 ( ) Questão 2 ( ) Questão 3 ( ) Questão 4
( ) Questão 5 ( ) Questão 6 ( ) Questão 7 ( ) Questão 8

Resolva 6 das 8 questões. Justifique todas as suas respostas.

Questão 1. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência em $\mathbb{R}$ satisfazendo a condição:

$$|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

(a) Prove que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

(b) Se trocarmos a condição por $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n}$, a sequência ainda converge obrigatoriamente?

Solução: **(a)** Vamos mostrar que (x_n) é uma sequência de Cauchy. Sejam $m > n$. Pela desigualdade triangular:

$$|x_m - x_n| = |(x_m - x_{m-1}) + (x_{m-1} - x_{m-2}) + \cdots + (x_{n+1} - x_n)| \leq \sum_{k=n}^{m-1} |x_{k+1} - x_k|.$$

Utilizando a hipótese dada:

$$|x_m - x_n| \leq \sum_{k=n}^{m-1} \frac{1}{2^k}.$$

Esta é uma soma geométrica parcial. Podemos majorá-la pela soma infinita a partir de n:

$$|x_m - x_n| < \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Dado $\epsilon > 0$, podemos escolher N tal que $\frac{1}{2^{N-1}} < \epsilon$. Assim, para todos $m > n \geq N$, temos $|x_m - x_n| < \epsilon$. Portanto, (x_n) é de Cauchy. Como $\mathbb{R}$ é completo, a sequência converge.

(b) Não. Considere a sequência das somas parciais da série harmônica: $x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. Temos que:

$$|x_{n+1} - x_n| = \left| \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right| = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}.$$

A condição $|x_{n+1} - x_n| \leq \frac{1}{n}$ é satisfeita. No entanto, sabe-se que a série harmônica diverge para $+\infty$. Portanto, (x_n) não converge.

Questão 2. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ contínua tal que $f(0) = f(1)$. Prove que existe $x \in [0, 1/2]$ tal que $f(x) = f(x + 1/2)$. Prove o resultado análogo com $1/3$ no lugar de $1/2$.

Solução: **Caso 1/2:** Defina a função auxiliar $g : [0, 1/2] \to \mathbb{R}$ por $g(x) = f(x + 1/2) - f(x)$. A função g é contínua, pois é soma de funções contínuas (note que $f(x + 1/2)$ é contínua pois é uma composição de duas funções contínuas). Vamos avaliar g nos extremos do intervalo:

$$g(0) = f(1/2) - f(0),$$
$$g(1/2) = f(1) - f(1/2).$$

Como $f(1) = f(0)$ por hipótese, temos $g(1/2) = -g(0)$. Se $g(0) = 0$, então $f(1/2) = f(0)$ e $x = 0$ é a solução. Se $g(0) \neq 0$, então $g(0)$ e $g(1/2)$ têm sinais opostos. Pelo Teorema do Valor Intermediário (TVI), existe $x \in (0, 1/2)$ tal que $g(x) = 0$, ou seja, $f(x + 1/2) - f(x) = 0 \implies f(x) = f(x + 1/2)$.

Caso 1/3: Queremos provar que existe x tal que $f(x + 1/3) = f(x)$, para alguem x tal que x e $x + 1/3$ esteja no domínio de f, ou seja, para $x \in [0, 2/3]$.

Defina $h : [0, 2/3] \to \mathbb{R}$ por $h(x) = f(x + 1/3) - f(x)$. Queremos mostrar que h tem uma raiz. Considere os pontos $x = 0$ e $x = 1/3$ e $x = 2/3$. Avaliamos a soma:

$$h(0) + h(1/3) + h(2/3) = [f(1/3) - f(0)] + [f(2/3) - f(1/3)] + [f(1) - f(2/3)].$$

A soma é telescópica e como $f(1) = f(0)$, temos:

$$h(0) + h(1/3) + h(2/3) = 0.$$

Se algum desses valores for zero, o problema está resolvido. Se não, não é possível que todos os três sejam estritamente positivos ou todos estritamente negativos (senão a soma não seria zero). Portanto, deve haver uma troca de sinal entre $h(0), h(1/3)$ e $h(2/3)$. Pelo TVI, existe x em $[0, 1/3]$ ou $[1/3, 2/3]$ tal que $h(x) = 0$, o que implica $f(x) = f(x + 1/3)$.

Questão 3. Seja $f : X \to \mathbb{R}$ derivável num ponto interior $a \in X$. Prove que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = f'(a)$. Dê um exemplo de função f em que este limite existe, porém f não é derivável no ponto a.

Solução: Podemos reescrever a expressão adicionando e subtraindo $f(a)$ no numerador:

$$\frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h) - f(a) + f(a) - f(a-h)}{2h}$$

Separando em duas frações e ajustando o sinal do segundo termo:

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} + \frac{f(a) - f(a-h)}{h}\right]$$

Faça a substituição $k = -h$ no segundo termo. Quando $h \to 0$, $k \to 0$. O termo fica $\frac{f(a)-f(a+k)}{-k} = \frac{f(a+k)-f(a)}{k}$. Como f é derivável em a, sabemos que $\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$. Portanto, aplicando o limite:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[f'(a) + f'(a)\right] = \frac{2f'(a)}{2} = f'(a).$$

Exemplo: Considere $f(x) = |x|$ e o ponto $a = 0$. A função não é derivável em 0 (derivadas laterais são diferentes: 1 e -1). No entanto, vamos calcular o limite simétrico:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h) - f(0-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |-h|}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h| - |h|}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{2h} = 0.$$

O limite existe e é igual a 0, mas $f'(0)$ não existe.

Questão 4. Seja $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua. Suponha que para toda função contínua $g \in C^1[0,1]$ que satisfaz $g(0) = g(1) = 0$, tem-se $\int_0^1 f(x)g'(x)\,dx = 0$. Prove que f deve ser uma função constante. Dica: construa $g(x) = \int_0^x (f(t) - k)\,dt$ para uma escolha adequada de uma constante k.

Solução: Seguindo a dica, definamos a constante k como:

$$k = \int_0^1 f(t)\,dt,$$

motivados pelo fato de que essa é a única escolha que faz com que uma função da forma $g(x) = \int_0^x (f(t) - k)\,dt$ satisfaça $g(0) = g(1) = 0$. Então, definamos $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$g(x) = \int_0^x (f(t) - k)\,dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, como f é contínua, g é derivável e $g'(x) = f(x) - k$ é contínua.

Vamos verificar as condições de contorno de g: 1. $g(0) = \int_0^0 (f(t) - k)dt = 0$. 2. $g(1) = \int_0^1 (f(t) - k)dt = \int_0^1 f(t)dt - \int_0^1 k\,dt = k - k(1-0) = 0$.

Portanto, g é uma função teste válida para a hipótese do problema. A hipótese diz que $\int_0^1 f(x)g'(x)dx = 0$. Substituindo $g'(x) = f(x) - k$:

$$\int_0^1 f(x)(f(x) - k)\,dx = 0.$$

Observe que $\int_0^1 k(f(x) - k)\,dx = k\int_0^1 g'(x)dx = k[g(1) - g(0)] = 0$. Podemos subtrair essa integral (que vale 0) da equação anterior:

$$\int_0^1 f(x)(f(x) - k)\,dx - \int_0^1 k(f(x) - k)\,dx = 0,$$

logo,

$$\int_0^1 (f(x) - k)(f(x) - k)\,dx = 0,$$

donde

$$\int_0^1 (f(x) - k)^2\,dx = 0.$$

A função $h(x) = (f(x) - k)^2$ é contínua e não negativa ($h(x) \geq 0$). Se a integral de uma função contínua não negativa é zero, então a função deve ser identicamente nula. Logo, $(f(x) - k)^2 = 0 \implies f(x) = k$ para todo $x \in [0,1]$. Concluímos que f é constante.

Questão 5. Ache uma primitiva para a função $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x^4}}{x}$.

Solução: Fazemos a substituição $u = x^2$, de movo que $du = 2xdx$:

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1+(x^2)^2}}{x^2} x\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du$$

Fazemos a substituição $u = \sinh(v) \Rightarrow du = \cosh(v)\,dv$ e usando $\cosh^2(v) - \sinh^2(v) = 1$ e o fato que $\cosh(v) > 0$ temos

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\,du = \frac{1}{2}\int \frac{\cosh^2 v}{\sinh(v)}\,dv = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sinh(v)}\,dv + \frac{1}{2}\int \sinh(v)\,dv \tag{1}$$

A primeira dessas sai da forma seguinte (na segunda igualdade abaixo tem a substituição $t = \cosh(v) \Rightarrow dt = \sinh(v)\ dv$):

$$\int \frac{1}{\sinh(v)}\ dv = \int \frac{\sinh(v)}{\cosh^2(v)-1}\ dv = \int \frac{1}{t^2-1}\ dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1}\ dt =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{|t-1|}{|t+1|}\right) + C = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\cosh(v)-1}{\cosh(v)+1}\right) + C$$

Substituindo em (1) chegamos a

$$\frac{1}{2}\int \frac{\sqrt{1+u^2}}{u}\ du = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\cosh(v)-1}{\cosh(v)+1}\right) + \frac{1}{2}\cosh(v) + C$$

Por outro lado $v = \text{arcsenh}(u) = \text{arcsenh}(x^2)$ e por isso

$$\cosh^2(v) = 1 + \sinh^2(v) = 1 + u^2 \Rightarrow \cosh(v) = \sqrt{1+u^2} = \sqrt{1+x^4}$$

Substituindo chegamos a formula final

$$\int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\ dx = \frac{1}{4}\ln\left(\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\sqrt{1+x^4}+1}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + C.$$

Solução Alternativa Faça $u = \sqrt{1+x^4}$. Dessa forma, $u^2 = 1 + x^4$ e, portanto, $2u\,du = 4x^3\,dx$. A primitiva desejaa é o resultado da integral

$$I = \int \frac{\sqrt{1+x^4}}{x}\ dx = \frac{1}{2}\int \frac{u}{u^2-1}\ du = \frac{1}{2}\int \left(1 + \frac{1}{u^2-1}\right)\ du.$$

Logo,

$$I = \frac{1}{2}\int 1\,du + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-1}\,du = \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{u^2-1}\,du.$$

A segunda integral acima pode ser resolvida por frações parciais:

$$\int \frac{1}{u^2-1}\ du = \int (\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1})\,du = \ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|.$$

Combinado os termos e lembrando que $u = \sqrt{1+x^4}$, obtemos o mesmo resultado da solução anterior.

Questão 6. Um intervalo em $\mathbb{R}$ é definido como um subconjunto $I \subset \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer $a, b \in I$ com $a < b$, todo $x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $a < x < b$ também pertence a I. Dizemos que um conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ é conexo quando ele não pode ser particionado em dois conjuntos não vazios A e B tais que $X = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Mostre que um subconjunto de $\mathbb{R}$ é conexo se e só se é um intervalo. Nota: $\overline{A}$ e $\overline{B}$ denotam o fecho de A e B, respectivamente.

Solução: Para provar a equivalência, demonstraremos as duas implicações separadamente.

($\Rightarrow$) Se X é conexo, então X é um intervalo. Faremos a prova pela contrapositiva. Suponha que X **não** seja um intervalo. Então existem $a, b \in X$ com $a < b$ e um $y \in (a, b)$ tal que $y \notin X$. Defina

$$A := X \cap (-\infty, y) \qquad B := X \cap (y, \infty)$$

Tem-se $X \subset \mathbb{R} \setminus \{y\} = (-\infty, y) \cup (y, \infty)$ e por isso $X = A \cup B$. Como $A \subset (-\infty, y)$ segue que $\overline{A} \subset \overline{(-\infty, y)} = (-\infty, y]$. Como $B \subset (y, \infty)$, é claro que $\overline{A} \cap B = \emptyset$. A justificativa que $A \cap \overline{B} = \emptyset$ é análoga.

($\Leftarrow$) Se X é um intervalo, então X é conexo. Vide Cap. 5, Seção 2, Teorema 5 do livro Análise Real Vol 1 (volume fino) do Elon Lages Lima.

Suponha, por contradição, que X seja um intervalo mas **não** seja conexo. Então existem conjuntos não vazios A e B tais que $X = A \cup B$, $\overline{A} \cap B = \emptyset$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Escolha $a \in A$ e $b \in B$. Sem perda de generalidade, assuma $a < b$. Como X é um intervalo, todo o segmento $[a, b]$ está contido em X. Defina o número real:

$$s = \sup(A \cap [a, b]).$$

Como $A \cap [a, b]$ é não vazio (contém a) e limitado superiormente (por b), o supremo s existe e $a \leq s \leq b$. Como $[a, b] \subseteq X$, temos $s \in X$. Portanto, s deve estar em A ou em B.

1. **Onde está s?** Por definição de supremo, s é um ponto aderente de $A \cap [a, b]$, logo $s \in \overline{A}$. Como assumimos $\overline{A} \cap B = \emptyset$, conclui-se que $s \notin B$. Sendo $X = A \cup B$, obrigatoriamente $s \in A$.

2. **A contradição:** Como $s \in A$ e $A \cap \overline{B} = \emptyset$, temos que $s \notin \overline{B}$. Logo, existe ϵ tal que $(s - \epsilon, s + \epsilon) \cap B = \emptyset$. Ademais, $s \notin \overline{B} \implies s \notin B \implies s \neq b \implies s < b$. Assim, podemos escolher $\delta < epsilon$ tal que $a \leq s < s + \delta < b$. Logo, $[s, s + \delta) \subset [a, b]$ e $[s, s + \delta) \cap B = \emptyset$. O que implica que $[s, s + \delta) \subseteq A$. Isso contradiz o fato de s ser supremo de A.

A suposição de que X é desconexo é falsa. Portanto, se X é um intervalo, X é conexo.

Questão 7. Seja $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ a seguinte sequência de funções $f_n(x) = \dfrac{\text{sen}(nx)}{1 + nx}$

(a) Mostre que f_n converge pontualmente a uma função contínua f.

(b) Mostre que f_n não converge uniformemente para f.

Solução: (a). Para $x = 0$ tem-se $f_n(x) = 0$ para todo n então

$$\lim_{n \to \infty} f_n(0) = 0$$

Em geral para $x \geq 0$

$$\left| \frac{\text{sen}(nx)}{1 + nx} \right| \leq \frac{1}{1 + nx}$$

Como $\frac{1}{1+nx}$ converge pra 0 para $x > 0$ segue que $f_n(x)$ converge pontualmente para a função nula para todo $x \geq 0$.

(b) Suponha que f_n converge uniformemente para f. Por definição isso quer dizer que dado $\epsilon > 0$ existe $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon, \qquad \forall n \geq n_0(\epsilon), \ \forall x \geq 0$$

Observe que

$$f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right) = \frac{1}{1 + \pi/2}. \tag{2}$$

Se escolhermos $\epsilon < \frac{1}{1+\pi/2}$ e $n > n_0(\epsilon)$ em (2) teremos, devido a definição de convergencia uniforme, que

$$\frac{1}{1 + \pi/2} = |f_n\left(\frac{\pi}{2n}\right)| < \epsilon < \frac{1}{1 + \pi/2}.$$

O que é uma contradição.

Questão 8. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função convexa.

(a) Mostre que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ implica $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

(b) Dê exemplo de uma função de classe C^2, estritamente convexa, ou seja, tal que $f'' > 0$, que satisfaz a propriedade de que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Solução: Para (a) iremos utilizar as desigualdades que define uma função convexa. Para quaisquer triplo $a < x < b$ tem-se

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x}$$

Usamos isso para $x = 0$ em cujo caso $a < 0$ e $b > 0$. Substituindo na primeira e na terceira fração chegamos a

$$\frac{f(0) - f(a)}{-a} \leq \frac{f(b) - f(0)}{b} \Rightarrow f(0) - f(a) \leq \frac{-a}{b}(f(b) - f(0))$$

Pega agora $b > 0$ e $a = -b < 0$ para concluir que

$$f(0) - f(-b) \leq f(b) - f(0)$$

ou seja

$$-f(-b) \leq f(b) - 2f(0) \tag{3}$$

Se deixar $b \to \infty$ certamente $-b \to -\infty$ e por isso $\lim_{b\to\infty} f(-b) = -\infty$, pela hipotese dada. Concluimos de (3) que

$$\lim_{b\to\infty} f(b) - 2f(0) = \infty$$

Obviamente isso implica que

$$\lim_{b\to\infty} f(b) = (\lim_{b\to\infty} f(b) - 2f(0)) + 2f(0) = \infty.$$

Para (b) considere a função $f(x) = x + e^x$. Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é estritamente convexa se $f''(x) > 0$ para todo x. No caso

$$f''(x) = e^x > 0$$

Por outro lado, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ e por isso $\lim\limits_{x\to-\infty} x + e^x = -\infty$.