UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

PGMAT - Doutorado em Matemática

PROVA ESPELHO

19 de Janeiro de 2026

Número de inscrição: ____

NÃO COLOCAR O SEU NOME NAS PÁGINAS DO EXAME.

<u>Resolva as 5 questões a seguir</u>

Questão 1. Seja $f\colon U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se para algum $a \in U$, a derivada $f'(a)\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é injetiva, prove que existem $\delta > 0$ e $c > 0$ tais que $B = B(a;\delta) = \{x \in \mathbb{R}^m; |x-a| < \delta\} \subset U$ e, para quaisquer $x, y \in B$ tem-se $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$. Conclua que a restrição $f|_B$ é injetiva.

Solução: A função $u \mapsto |f'(a)\cdot u|$ é positiva em todos os pontos u da esfera unitária $\mathbb{S}^{m-1}$, a qual é compacta. Pelo Teorema de Weierstrass, existe $c > 0$ tal que $|f'(a)\cdot u| \geq 2c$ para todo $u \in \mathbb{S}^{m-1}$. Por linearidade, decorre que $|f'(a)\cdot v| \geq 2c \cdot |v|$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Agora, para todo $x \in U$, definimos

$$r(x) := f(x) - f(a) - f'(a)(x-a).$$

Então, para $x, y \in U$ quaisquer, segue que

$$f(x) - f(y) = f'(a)\cdot(x-y) + r(x) - r(y).$$

Levando em consideração que $|u+v| \geq |u| - |v|$, temos que

$$|f(x) - f(y)| \geq |f'(a)\cdot(x-y)| - |r(x) - r(y)| \geq 2c\cdot|x-y| - |r(x)-r(y)|.$$

Observemos que a aplicação r, acima definida, é de classe C^1, com $r(a) = 0$ e $r'(a) = 0$. Pela continuidade de r', existe $\delta > 0$ tal que $|x-a| < \delta$ implica que $x \in U$ e $|r'(x)| < c$. A Desigualdade do Valor Médio, aplicada a r no conjunto convexo $B = B(a;\delta)$ nos assegura que se $x, y \in B$ então $|r(x) - r(y)| \leq c|x-y|$. Consequentemente,

$$x, y \in B \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geq 2c|x-y| - c|x-y|,$$

isto é, $|f(x) - f(y)| \geq c|x-y|$. Neste caso, dados $x, y \in B$, se $f(x) = f(y)$, então

$$f(x) - f(y) = 0 \Rightarrow c|x-y| \leq |f(x) - f(y)| = 0 \Rightarrow |x-y| = 0 \Rightarrow x = y,$$

pois $c > 0$. Portanto, $f|_B$ é injetiva.

Questão 2. Sejam $\varphi\colon U \to \mathbb{R}^m$ de classe C^1 no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$ e $c \in [0,1)$ tais que $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq c|x-y|$, para quaisquer $x, y \in U$. Prove que $f\colon U \to \mathbb{R}^m$, dada por $f(x) = x + \varphi(x)$, é um difeomorfismo de U sobre o aberto $V = f(U) \subset \mathbb{R}^m$. Se $U = \mathbb{R}^m$, prove que $f(U) = \mathbb{R}^m$.

Solução: Inicialmente, afirmamos que $|\varphi'(x)| \leq c$, para todo $x \in U$. Com efeito, suponhamos, por absurdo, que $|\varphi'(x)| > c$, isto é, $|\varphi'(x)| > c + \varepsilon$, para algum $x \in U$. Como $|\varphi'(x)|$ é o máximo de $|\varphi'(x)\cdot u|$ para $|u| = 1$ e $\mathbb{S}^{m-1}$ é compacta, existiria $u \in \mathbb{R}^m$ com norma

1, tal que $|\varphi'(x) \cdot u| = c + \varepsilon$. Pela definição de diferenciabilidade, a este ε corresponde $\delta > 0$ tal que

$$0 < t < \delta \Rightarrow |\varphi(x + tu) - \varphi(x)| = |\varphi'(x) \cdot tu + r(tu)| \geq t|\varphi'(x) \cdot u| - |r(tu)|,$$

com $|r(tu)| < t\varepsilon$. Então

$$0 < t < \delta \Rightarrow |\varphi(x + tu) - \varphi(x)| > t(c + \varepsilon) - t\varepsilon = t \cdot c.$$

Escolhendo $v = tu$, temos $|v| = t$. Portanto, $|\varphi(x + v) - \varphi(x)| > c \cdot |v|$, uma contradição. Logo, $|\varphi'(x)| \leq c$, para todo $x \in U$.

Consequentemente, $|\varphi'(x) \cdot v| < c|v| < v$, para todos $x \in U$ e $v \in \mathbb{R}^m \setminus \{0\}$. Desse modo,

$$|f'(x) \cdot v| = |v + \varphi'(x) \cdot v| \geq |v| - |\varphi'(x) \cdot v| > 0,$$

se $v \neq 0$. Assim, $f'(x) \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, para todo $x \in U$. Pelo Teorema da Função Inversa, f é um difeomorfismo local, portanto transforma cada aberto $A \subset U$ em um aberto $f(A) \subset \mathbb{R}^m$. Além disso,

$$y \in U \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |x - y + \varphi(x) - \varphi(y)| \geq |x - y| - c|x - y| = (1 - c)|x - y|.$$

Portanto, f é injetiva. Logo, f é um difeomorfismo de U sobre o aberto $f(U)$. Suponhamos agora $U = \mathbb{R}^m$. Para provar que $f(\mathbb{R}^m)$ é fechado, seja (x_k) uma sequência tal que $\lim f(x_k) = y \in \mathbb{R}^m$. Como $|x_k - x_r| \leq \frac{1}{1-c}|f(x_k) - f(x_r)|$, segue que (x_k) é de Cauchy e, portanto, é convergente. Se $\lim x_k = x$, então $f(x) = \lim f(x_k) = y \in f(\mathbb{R}^m)$. Desse modo, $f(\mathbb{R}^m)$ é aberto e fechado. Finalmente, como $\mathbb{R}^m$ é conexo, concluímos que $f(\mathbb{R}^m) = \mathbb{R}^n$.

Questão 3. Dada uma função $F \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ contínua, suponha que existam n funções de classe C^1, $g_1, \ldots, g_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, tais que $g_1 \circ F, \ldots, g_n \circ F$ sejam de classe C^1. Mostre que se $dg_1(F(x)), \ldots, dg_n(F(x))$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathbb{R}^m$, então a função F é de classe C^1.

Solução: Seja $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrário. É suficiente mostrarmos que F é de classe C^1 numa vizinhaça de x. Definimos a função $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ dada por: $G(y) = (g_1(y), \ldots, g_n(y))$, em particular:

$$G(F(x)) = (g_1(F(x)), g_2(F(x)), \ldots, g_n(F(x))),$$

onde $F(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Notemos que a matriz jacobiana de G em $F(x)$ é tal que

$$JG(F(x)) = \begin{vmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(F(x)) & \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(F(x)) & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(F(x)) \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1}(F(x)) & \frac{\partial g_2}{\partial x_2}(F(x)) & \cdots & \frac{\partial g_2}{\partial x_n}(F(x)) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1}(F(x)) & \frac{\partial g_n}{\partial x_2}(F(x)) & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n}(F(x)) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} dg_1(F(x)) \\ dg_2(F(x)) \\ \vdots \\ dg_n(F(x)) \end{vmatrix} \neq 0,$$

pois $dg_1(F(x), \ldots, dg_n(F(x))$ são linearmente independentes para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Assim, como $G \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é de classe C^1 (pois g_i é de classe C^1 para cada i, $1 \leq i \leq n$) e

$JG(F(x)) \neq 0$, segue pelo Teorema da Função Inversa que existem abertos $U, V \subset \mathbb{R}^n$, $F(x) \in U$, $G(F(x)) \in V$, $G|_U\colon U \to V$ é bijetora e $G|_U{}^{-1}\colon V \to U$ é de classe C^1. Assim, em U, temos que $F = G|_U{}^{-1} \circ (G \circ F)$, com $G|_U{}^{-1}$ de classe C^1 e, por hipótese, $G \circ F$ também de classe C^1. Portanto, pela regra da cadeia, F é de classe C^1 em U.

Questão 4. Sejam ω a forma volume de $\mathbb{R}^3$ e $F = (f_1, f_2, f_3)$ um campo de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$. Considere a 1-forma $\hat{F} = f_1dx + f_2dy + f_3dz$. Mostre que $d\hat{F}$ é a 2-forma $\omega(\nabla \times F, \cdot, \cdot)$. Sabendo que dado um campo X de classe C^∞, temos que a 2-forma $\omega(X, \cdot, \cdot)$ restrita a S é a 2-forma $\langle X, n\rangle\tilde{w}$, conclua que $\displaystyle\int_{\partial S} \hat{F} = \int_S \langle(\nabla \times F), n\rangle\tilde{w}$, onde S é uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$ orientada por um vetor unitário n, ∂S é o bordo de S com orientação induzida e $\hat{W}$ é a 2-forma volume de S.

Solução: Para a 1-forma $\hat{F} = f_1dx + f_2dy + f_3dz$, temos que

$$d\hat{F} = \frac{\partial f_1}{\partial y}dy \wedge dx + \frac{\partial f_1}{\partial z}dz \wedge dx + \frac{\partial f_2}{\partial x}dx \wedge dy + \frac{\partial f_2}{\partial z}dz \wedge dy + \frac{\partial f_3}{\partial x}dx \wedge dz + \frac{\partial f_3}{\partial y}dy \wedge dz,$$

isto é,

$$d\hat{F} = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right) dx \wedge dy + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}\right) dx \wedge dz + \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}\right) dy \wedge dz.$$

Desse modo,

$$\nabla \times F = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y}\right).$$

Consequentemente,

$$\omega(\nabla \times F, e_1, e_2) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} = d\hat{F}(e_1, e_2);$$

$$\omega(\nabla \times F, e_2, e_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} = d\hat{F}(e_2, e_3);$$

$$\omega(\nabla \times F, e_1, e_3) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} = d\hat{F}(e_1, e_3).$$

Portanto, $d\hat{F} = \omega(\nabla \times F, \cdot, \cdot)$.

Pelo Teorema de Stokes, se ω é uma forma diferencial de classe C^1, de grau m, com suporte compacto, em uma superfície orientada M, de dimensão $m+1$, cujo bordo ∂M é munido de orientação induzida, então $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$. Aplicando o Teorema de Stokes para a 1-forma $\hat{F}$, e assumindo que a 2-forma $\omega(\nabla \times F, \cdot, \cdot)$ restrita a S é a 2-forma $\langle \nabla \times F, n\rangle \tilde{w}$, podemos concluir que

$$\int_{\partial S} \hat{F} = \int_S d\hat{F} = \omega(\nabla \times F, \cdot, \cdot) = \int_S \langle (\nabla \times F), n\rangle \tilde{w}.$$

Questão 5. Seja $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação lipschitziana em $X \subset \mathbb{R}^n$. Prove que se X tem medida n-dimensional nula, então $f(X)$ também tem medida n-dimensional nula.

Solução: Adotemos em $\mathbb{R}^n$ a norma do máximo. Assumindo que a aplicação $f\colon X \to \mathbb{R}^n$ é lipschitziana, existe $c > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$, para quaisquer $x, y \in X$. Se X tem medida n-dimensional nula, para todo $\varepsilon > 0$, arbitrário, existe uma cobertura $X \subset C_1 \cup \cdots \cup C_K \cup \cdots$, onde cada C_k é um cubo cuja aresta mede a_k, com

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } C_k = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^n < \frac{\varepsilon}{c^n}.$$

Se $x, y \in C_k \cap X$, então $|x - y| \leq a_k$ e, assim, $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot a_k$, o que significa que, para quaisquer $i = 1, \ldots, n$, as i-ésimas coordenadas de $f(x)$ e $f(y)$ pertencem a um intervalo J_i de comprimento $c \cdot a_k$. Portanto, $f(C_k \cap X)$ está contido no cubo $\prod_{i=1}^{n} J_i = C'_k$, de aresta $c \cdot a_k$. Desse modo, vol $C'_k = c^n \cdot (a_k)^n$.

Portanto, $f(X) = \bigcup_{k=1}^{\infty} f(C_k \cap X) \subset C'_1 \cup \cdots C'_k \cup \cdots$, onde

$$\sum_{k=1}^{\infty} \text{vol } C'_k = c^n \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (a_k)^n < c^n \cdot \frac{\varepsilon}{c^n} = \varepsilon.$$

Logo, $f(X)$ tem medida n-dimensional nula.