



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXAME DE QUALIFICAÇÃO EM ANÁLISE

PGMAT - Doutorado em Matemática

17 de setembro de 2025

Candidato: _____

Parte I - Análise Real

Escolha 3 dentre estes 4 problemas para resolver.

Problema 1. Dado $n \geq 3$, resolva os itens abaixo:

a) Encontre uma solução fundamental (no sentido das distribuições) para o operador Laplaciano Δ . Justifique.

Demonstração. Sejam ω_n a medida da esfera unitária de $\mathbb{R}^n$ e $\mathcal{D}$ o conjunto das funções $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ de suporte compacto. Mostraremos que

$$\Gamma(x) = \frac{|x|^{2-n}}{\omega_n(2-n)}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},$$

é uma solução fundamental para Δ . Primeiro provaremos que Γ é uma distribuição regular. De fato, dado $R > 0$ usamos coordenadas polares para obter

$$\int_{B_R} |x|^{2-n} dx = \omega_n \frac{R^2}{2},$$

para toda bola aberta B_R de centro na origem. Logo, $\Gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Agora precisamos mostrar que $\Delta\Gamma$ é a distribuição δ_0 de Dirac na origem, ou seja, que Γ satisfaz

$$\langle \Delta\Gamma, \phi \rangle = \phi(0), \quad (1)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{D}$. Com efeito, pelo Teorema da Convergência Dominada temos

$$\langle \Delta\Gamma, \phi \rangle = \langle \Gamma, \Delta\phi \rangle = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{B_R} \Gamma(x) \Delta\phi(x) dx. \quad (2)$$

Ademais, dado $0 < \varepsilon < R$ usamos a integração por partes para encontrar

$$\begin{aligned} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \Gamma(x) \Delta\phi(x) dx &= - \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \nabla\Gamma(x) \cdot \nabla\phi(x) dx + \int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} \Gamma(x) (\nabla\phi(x) \cdot \nu(x)) dS \\ &= \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \Delta\Gamma(x) \phi(x) dx - \int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} \phi(x) (\nabla\Gamma(x) \cdot \nu(x)) dS \\ &\quad + \int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} \Gamma(x) (\nabla\phi(x) \cdot \nu(x)) dS, \end{aligned} \quad (3)$$

onde ν representa a normal interior sobre $\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)$. Para $R > 0$ suficientemente grande (dependendo do suporte de ϕ) temos

$$\int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} \phi(x) (\nabla\Gamma(x) \cdot \nu(x)) dS = \int_{\partial B_\varepsilon} \phi(x) (\nabla\Gamma(x) \cdot \nu(x)) dS \quad (4)$$

e

$$\int_{\partial(B_R \setminus B_\varepsilon)} \Gamma(x)(\nabla \phi(x) \cdot \nu(x)) dS = \int_{\partial B_\varepsilon} \Gamma(x)(\nabla \phi(x) \cdot \nu(x)) dS. \quad (5)$$

Levando em conta que

$$\partial_i \Gamma(x) = \frac{x_i}{\omega_n |x|^n} \quad \text{e} \quad \partial_{ii}^2 \Gamma(x) = \frac{1}{\omega_n} (|x|^{-n} - n|x|^{-n-2} x_i^2),$$

para todo $x \neq 0$, combinamos (3), (4) e (5) e usamos o Teorema da Convergência Dominada para obter

$$\int_{B_R} \Gamma(x) \Delta \phi(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{B_R \setminus B_\varepsilon} \Gamma(x) \Delta \phi(x) dx = \phi(0). \quad (6)$$

Finalmente, combinando (2) e (6) obtemos (1). $\square$

b) Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ache uma solução distribucional para a equação

$$\Delta u = f.$$

Justifique.

Demonstração. Suponha inicialmente que $f \in \mathcal{D}$. Sabemos que $\Gamma * f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Assim, $\Gamma * f$ é uma distribuição regular e

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\Gamma * f), \phi \rangle &= \langle \Gamma * f, \Delta \phi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Gamma * f)(x) \Delta \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \Delta(\Gamma * f)(x) \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\delta_0 * f)(x) \phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \phi(x) dx \end{aligned} \quad (7)$$

para toda função $\phi \in \mathcal{D}$. Logo, $\Gamma * f$ é uma solução distribucional para a equação $\Delta u = f$.

Para o caso geral, usaremos a densidade de $\mathcal{D}$ em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Note que, pela desigualdade de Young, temos

$$\Gamma \chi_{B_1} * f \in L^1(\mathbb{R}^n) \quad \text{e} \quad \Gamma \chi_{B_1^c} * f \in L^p(\mathbb{R}^n)$$

para algum $1 < p < +\infty$ suficientemente grande, onde $B_1^c = \mathbb{R}^n \setminus B_1$. Seja (f_k) em $\mathcal{D}$ convergindo para f em $L^1(\mathbb{R}^n)$. Desde que

$$\Gamma * g = \Gamma \chi_{B_1} * g + \Gamma \chi_{B_1^c} * g, \quad \text{para todo } g \in L^1(\mathbb{R}^n),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
|\langle \Gamma * f, \phi \rangle - \langle \Gamma * f_k, \phi \rangle| &= |\langle \Gamma \chi_{B_1} * (f - f_k), \phi \rangle + \langle \Gamma \chi_{B_1^c} * (f - f_k), \phi \rangle| \\
&\leq (\|\phi\|_\infty \|\Gamma \chi_{B_1}\|_1) \|f - f_k\|_1 \\
&+ (\|\phi\|_{p/p-1} \|\Gamma \chi_{B_1^c}\|_p) \|f - f_k\|_1,
\end{aligned} \tag{8}$$

para toda $\phi \in \mathcal{D}$, onde usamos as desigualdades de Hölder e Young na última estimativa. Por (8) concluímos que $\Gamma * f_k$ converge para $\Gamma * f$ no sentido das distribuições. Então, segue de (7) e da continuidade do operador Laplaciano (na topologia das distribuições) que

$$\begin{aligned}
\Delta(\Gamma * f) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \Delta(\Gamma * f_k) \\
&= \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k \\
&= f,
\end{aligned}$$

onde usamos que f_k converge para f na topologia das distribuições na última igualdade. $\square$

Problema 2. Resolva os itens abaixo:

a) Dado $a > 0$ calcule a transformada de Fourier da função $\phi(x) = e^{-a|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Desde que $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$ podemos usar Fubini e obter

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}(\phi)(x) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ix \cdot y} \phi(y) dy \\
&= (2\pi)^{-n/2} \left(\prod_{k=1}^n \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_k y - ay^2} dy \right).
\end{aligned} \tag{9}$$

Dado $b \in \mathbb{R}$ note que

$$-iby - ay^2 = i(-b)y - ay^2 = -z^2 - \frac{b^2}{4a}, \quad \text{se } z = a^{1/2}y - \frac{(-b)}{2a^{1/2}}i. \tag{10}$$

Por (10) temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iby - ay^2} dy = \frac{e^{-b^2/4a}}{a^{1/2}} \int_{\mathcal{U}} e^{-z^2} dz = \frac{e^{-b^2/4a}}{a^{1/2}} \pi^{1/2}, \tag{11}$$

onde $\mathcal{U} = \left\{ z : \text{Im}(z) = \frac{b}{2a^{1/2}}i \right\}$. Combinando (9), (10) e (11) encontramos

$$\mathcal{F}(\phi)(x) = \frac{e^{-|x|^2/4a}}{(2a)^{n/2}}.$$

$\square$

b) Se $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função mensurável e $1 < p < +\infty$, mostre que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right)^p dx \right]^{1/p} \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy.$$

Demonstração. Podemos supor sem perda de generalidade que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy < +\infty. \quad (12)$$

Por (12) concluímos que $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para quase todo $y \in \mathbb{R}^n$. Então, usamos o Teorema de Tonelli e a Desigualdade de Hölder para encontrar

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy \right) |g(x)| dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| |g(x)| dx \right) dy \\ &\leq \|g\|_{p/p-1} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)|^p dx \right)^{1/p} dy, \end{aligned} \quad (13)$$

para toda função $g \in L^{p/p-1}(\mathbb{R}^n)$. Ademais, desde que f é mensurável, segue do Teorema de Tonelli que a função

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^n} |f(x, y)| dy$$

é mensurável. Também podemos supor sem perda de generalidade que $\{x \in \mathbb{R}^n : F \neq 0\}$ possui medida não-nula e pode ser escrito como uma união crescente de conjuntos com medida finita. Assim, existe uma sequência (f_k) em $L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que

$$\|f_k\|_p \neq 0, \quad |f_k| \leq |F| \quad \text{e} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} f_k(x) = F(x). \quad (14)$$

Agora considere a sequência em $L^{p/p-1}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$g_k = \frac{|f_k|^{p-1} \text{sgn}(F)}{\|f_k\|_p^{p-1}},$$

onde $\text{sgn}(F) = F/|F|$ se $F \neq 0$ e $\text{sgn}(F) = 0$ se $F = 0$. Note que

$$\|g_k\|_{p/p-1} = 1 \quad \text{e} \quad \|f_k\|_p = \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) g_k(x)| dx. \quad (15)$$

Portanto, combinando (14), (15) e o Lema de Fatou, obtemos

$$\begin{aligned} \|F\|_p &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |f_k(x) g_k(x)| dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x) g_k(x)| dx. \end{aligned} \quad (16)$$

Finalmente, combinamos (13) e (16) para provar o resultado. $\square$

Problema 3. Se f é contínua e limitada em $\mathbb{R}^n$, use a Teoria $\mathcal{S}'$ da transformada de Fourier para encontrar uma função $u : \mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz pontualmente o seguinte problema de Dirichlet no semi-espço:

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = 0, & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), & \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (17)$$

O que podemos dizer quando $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < +\infty$? Justifique.

Demonstração. Usaremos a Teoria $\mathcal{S}'$ formalmente para encontrar um candidato u à solução de (17). Desde que $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$, assumamos que $f \in \mathcal{S}$ e aplique a Transformada de Fourier, na variável x , ao problema (17) para transformá-lo no problema de EDO abaixo:

$$\partial_t(\mathcal{F}u) + |x|^2 \mathcal{F}u = 0 \quad \text{e} \quad \mathcal{F}u(x, 0) = \mathcal{F}f(x). \quad (18)$$

Resolvendo o problema (18) obtemos

$$\mathcal{F}u(x, t) = e^{-|x|^2 t} \mathcal{F}f(x).$$

Então, usando o item a do Problema 2 e o item b do Problema 4 (basta a Teoria $\mathcal{S}$), encontramos

$$\begin{aligned} u &= \mathcal{F}^{-1} \left(e^{-|x|^2 t} \mathcal{F}f \right) \\ &= \mathcal{F}^{-1} \left[(2\pi)^{-n/2} \mathcal{F} \left(\mathcal{F}^{-1} \left(e^{-|x|^2 t} \right) * f \right) \right] \\ &= (K(x, t) * f), \end{aligned}$$

onde $K(x, t) = (4\pi t)^{-n/2} e^{-|x|^2/4t}$ e a convolução é realizada na variável x . Desde que $\{K_t\}_{t>0}$ é good kernels, onde $K_t = K(\cdot, t)$, podemos retornar ao caso f limitada e contínua (ou $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$). Note que

$$K(\cdot, t) \in \mathcal{S} \quad \text{e} \quad \partial_t K(x, t) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2} t^{n/2+1}} \left[e^{-|x|^2/4t} \left(-\frac{n}{2} + \frac{|x|^2}{4t} \right) \right], \quad (19)$$

para todo $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Portanto, levando em conta que $e^{-|x|^2}, |x|^2 e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ e (19), segue da Desigualdade de Hölder e do Teorema da Convergência Dominada que

$$\partial_t u = (\partial_t K * f) \quad \text{e} \quad \partial_{ii}^2 u = (\partial_{ii}^2 K * f), \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Logo, u satisfaz

$$\partial_t u - \Delta u = (\partial_t K - \Delta K) * f = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Para a condição de fronteira basta notarmos que $\{K_t\}_{t>0}$ é good kernels. Finalmente, para o caso $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ para $1 \leq p < +\infty$, lembre que $\{K_t\}_{t>0}$ ser good kernels implica que $u(\cdot, t)$ converge para f em L^p quando $t \rightarrow 0^+$. $\square$

Problema 4. Sejam $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi \in \mathcal{S}$. Resolva os itens abaixo:

a) Mostre que $u * \phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e

$$D^\alpha (u * \phi) = D^\alpha u * \phi = u * D^\alpha \phi,$$

para todo multi-índice α .

Demonstração. Dados $h > 0$ e $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ defina

$$T_h \phi(x) = \frac{\phi(x + h e_k) - \phi(x)}{h}, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^n,$$

onde e_k representa o k -ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{R}^n$. Por indução sobre $|\alpha|$ podemos supor que $\alpha = e_k$ para algum $k \in \{1, \dots, n\}$. Primeiro provaremos que

$$T_h \phi \rightarrow \partial_k \phi \quad \text{na topologia de } \mathcal{S} \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \quad (20)$$

Pela continuidade dos operadores $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ e $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ basta provarmos que

$$\mathcal{F}(T_h \phi - \partial_k \phi) \rightarrow 0 \quad \text{na topologia de } \mathcal{S} \text{ quando } h \rightarrow 0^+. \quad (21)$$

De fato, dado $x \in \mathbb{R}^n$ temos

$$\mathcal{F}(T_h \phi - \partial_k \phi)(x) = \psi_h(x) \mathcal{F}\phi(x), \quad \text{onde } \psi_h(x) = \left(\frac{e^{ihx_k} - 1}{h} - ix_k \right). \quad (22)$$

Usando a série de Taylor obtemos

$$|D^\beta \psi_h(x)| \leq \begin{cases} hx_k^2, & \text{se } |\beta| = 0, \\ h|x_k|, & \text{se } |\beta| = 1, \\ h^{|\beta|-1}, & \text{se } |\beta| \geq 2. \end{cases} \quad (23)$$

Então, dados σ e γ multi-índices usamos (23) e a fórmula de Leibniz para estimar

$$\begin{aligned} |x^\sigma D^\gamma (\psi_h \mathcal{F}\phi)(x)| &\leq \sum_{\beta \leq \gamma} \binom{\gamma}{\beta} |x^\sigma D^\beta \psi_h(x) D^{\gamma-\beta} \mathcal{F}\phi(x)| \\ &\leq h |x^{\sigma+2e_k} D^\gamma \mathcal{F}\phi(x)| + h \sum_{\beta \leq \gamma, |\beta|=1} \binom{\gamma}{\beta} |x^{\sigma+e_k} D^{\gamma-\beta} \mathcal{F}\phi(x)| \\ &\quad + h \sum_{\beta \leq \gamma, |\beta| \geq 2} \binom{\gamma}{\beta} h^{|\beta|-2} |x^\sigma D^{\gamma-\beta} \mathcal{F}\phi(x)|. \end{aligned} \quad (24)$$

Portanto, segue de (24) que

$$\begin{aligned} w_{\sigma\gamma}(\psi_h \mathcal{F}\phi) &\leq h w_{(\sigma+2e_k)\gamma}(\mathcal{F}\phi) + h \sum_{\beta \leq \gamma, |\beta|=1} \binom{\gamma}{\beta} w_{(\sigma+e_k)(\gamma-\beta)}(\mathcal{F}\phi) \\ &\quad + h \sum_{\beta \leq \gamma, |\beta| \geq 2} \binom{\gamma}{\beta} h^{|\beta|-2} w_{\sigma(\gamma-\beta)}(\mathcal{F}\phi), \end{aligned}$$

o que implica (21). Dado $x \in \mathbb{R}^n$, denotamos por R e τ_{-x} as distribuições reflexão e translação em $-x$, respectivamente. Usamos (20) e a continuidade da distribuição $R\tau_{-x}u$ para encontrar

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0^+} T_h(u * \phi)(x) &= \lim_{h \rightarrow 0^+} (u * T_h \phi)(x) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle R\tau_{-x}u, T_h \phi \rangle \\ &= (u * \partial_k \phi)(x),\end{aligned}$$

ou seja, $D^\alpha(u * \phi) = u * D^\alpha \phi$. Para a outra igualdade, note que

$$\begin{aligned}(D^\alpha u * \phi)(x) &= \langle D^\alpha u, \tau_x R \phi \rangle \\ &= (-1)^{|\alpha|} \langle u, D^\alpha(\tau_x R \phi) \rangle \\ &= \langle u, \tau_x R D^\alpha \phi \rangle \\ &= (u * D^\alpha \phi)(x).\end{aligned}$$

□

b) Prove que $\mathcal{F}(u * \phi) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}u)(\mathcal{F}\phi)$, onde $\mathcal{F}$ denota a transformada de Fourier.

Demonstração. Dados $u \in \mathcal{S}'$ e $\phi, \psi \in \mathcal{S}$, basta provarmos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi)(x) \psi(x) dx = \langle u, R\phi * \psi \rangle. \quad (25)$$

De fato, temos

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(u * \phi), \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle &= \langle (u * \phi), \psi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi)(x) \psi(x) dx.\end{aligned} \quad (26)$$

Por outro lado, usamos a Teoria $\mathcal{S}$ para obter

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}u, R\phi * \psi \rangle &= \langle \mathcal{F}u, \mathcal{F}^{-1}(R\phi * \psi) \rangle \\ &= \langle \mathcal{F}u, (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}\phi\mathcal{F}^{-1}\psi \rangle \\ &= \langle (2\pi)^{n/2}\mathcal{F}u\mathcal{F}\phi, \mathcal{F}^{-1}\psi \rangle.\end{aligned} \quad (27)$$

Portanto, se a igualdade (25) é verdadeira, combinamos (26) e (27) e levamos em conta a arbitrariedade de $\psi \in \mathcal{S} = \mathcal{F}(\mathcal{S})$ para obter $\mathcal{F}(u * \phi) = (2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}u)(\mathcal{F}\phi)$.

Provaremos (25) em duas etapas:

1. Etapa 1: $\phi, \psi \in \mathcal{D}$.

Dado $h > 0$ escreva $\mathbb{R}^n = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^n} \mathcal{R}_h^k$ como uma união quase-disjunta de quadrados com volume h^n . Considere a soma de Riemann de $(R\phi) * \psi$ dada por

$$r_h(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} (R\phi)(x - kh) \psi(kh) c_{k,h,\psi}, \quad \text{onde } c_{k,h,\psi} = |\mathcal{R}_h^k \cap \text{supp}(\psi)|.$$

Da Teoria das Distribuições, sabemos que

$$r_h \rightarrow R\phi * \psi \text{ na topologia de } \mathcal{D} \text{ quando } h \rightarrow 0^+.$$

Dado $x \in \mathbb{R}^n$, note que $(\tau_{kh}R\phi)(x) = R\phi(x - kh)$ e por definição temos

$$(u * \phi)(kh) = \langle u, \tau_{kh}R\phi \rangle.$$

Portanto, desde que u restrita a $\mathcal{D}$ é uma distribuição e para $h > 0$ fixado a soma na definição de r_h é finita, encontramos

$$\begin{aligned} \langle u, (R\phi) * \psi \rangle &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \langle u, r_h \rangle \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^+} \sum_{k \in \mathbb{Z}^n} \langle u, \tau_{kh}R\phi \rangle \psi(kh) c_{k,h,\psi} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi)(x) \psi(x) dx. \end{aligned} \tag{28}$$

2. Etapa 2: $\phi, \psi \in \mathcal{S}$.

Nesta etapa usamos a densidade de $\mathcal{D}$ em $\mathcal{S}$ na topologia de $\mathcal{S}$. De fato, sejam (ϕ_k) e (ψ_k) em $\mathcal{D}$ tais que

$$\phi_k \rightarrow \phi \quad \text{e} \quad \psi_k \rightarrow \psi \quad \text{na topologia de } \mathcal{S} \text{ quando } k \rightarrow +\infty.$$

Note que a sequência $(\phi_k * \psi_k)$ converge para $(\phi * \psi)$ em $\mathcal{S}$ e satisfaz as condições do Teorema da Convergência Dominada. Portanto, segue de (28) e da continuidade das aplicações $R : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ e $u : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi)(x) \psi(x) dx &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^n} (u * \phi_k)(x) \psi_k(x) dx \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} \langle u, R\phi_k * \psi_k \rangle \\ &= \langle u, R\phi * \psi \rangle. \end{aligned}$$

□

Parte II - Análise Funcional

Escolha 3 dentre estes 4 problemas para resolver.

Problema 5. Sejam $(E, \|\cdot\|_E)$ e $(F, \|\cdot\|_F)$ espaços de Banach.

- (i) Mostre que se $f \in E^*$, então $\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} f(x)$.
- (ii) Mostre que os espaços $E^* \times F^*$ e $(E \times F)^*$ são isomorfos, considerando $E \times F$ munido com a norma $\|(x, y)\|_\infty := \max\{\|x\|_E, \|y\|_F\}$, com $x \in E$ e $y \in F$, e $E^* \times F^*$ munido com a norma $\|(f, g)\|_1 := \|f\|_{E^*} + \|g\|_{F^*}$, com $f \in E^*$ e $g \in F^*$.

Solução (i). Da definição de $\|f\|_{E^*}$ segue-se diretamente que

$$\|f\|_{E^*} = \sup_{x \in B_E} |f(x)| \geq \sup_{x \in B_E} f(x).$$

Agora, fixado qualquer $\varepsilon \in (0, 1)$, existe $x_\varepsilon \in B_X$ tal que

$$\sup_{x \in B_E} |f(x)| - \varepsilon < |f(x_\varepsilon)| = f(\text{sinal}(x_\varepsilon) \cdot x_\varepsilon) \leq \sup_{x \in B_E} f(x),$$

uma vez que $\text{sinal}(x_\varepsilon) \cdot x_\varepsilon \in B_E$ para qualquer $\varepsilon \in (0, 1)$. Fica então provado que

$$\sup_{x \in B_E} |f(x)| - \varepsilon < \sup_{x \in B_E} f(x) \quad \forall \varepsilon \in (0, 1).$$

Tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtém-se o resultado (i).

Solução (ii). Defina a aplicação linear $T: E^* \times F^* \rightarrow (E \times F)^*$ pondo:

$$T(f, g)(x, y) = f(x) + g(y), \quad \forall (x, y) \in E \times F.$$

Um cálculo direto, usando as definições das normas $\|(\cdot, \cdot)\|_\infty$ e $\|(\cdot, \cdot)\|_1$, mostra que T está bem definida e satisfaz $\|T(f, g)\|_{(E \times F)^*} \leq \|(f, g)\|_1$ para todo $(f, g) \in E^* \times F^*$. Mostra-se também de forma direta que T é injetiva. Para mostrar que T é sobrejetiva, note que dado qualquer funcional $h \in (E \times F)^*$ podemos considerar os funcionais $f(x) = h(x, 0)$ com $x \in E$, e $g(y) = h(0, y)$ com $y \in F$. No caso, observemos ainda que para todo $x \in E$ se tem $|f(x)| \leq \|h\|_{(E \times F)^*} \|(x, 0)\|_1 = \|h\|_{(E \times F)^*} \|x\|$, e isso mostra que $f \in E^*$. Analogamente, mostra-se que $g \in F^*$. Portanto, da definição de T , tem-se que

$$T(f, g)(x, y) = f(x) + g(y) = h(x, 0) + h(0, y) = h(x, y) \quad \forall (x, y) \in E \times F \quad \Rightarrow \quad T(f, g) = h.$$

Um cálculo direto mostra que $(E^* \times F^*, \|(\cdot, \cdot)\|_1)$ é de Banach. Como espaços duais são sempre de Banach, segue-se do Teorema da Aplicação Inversa (*contínua*) que T^{-1} é limitada. Segue portanto que T é um isomorfismo.

Problema 6. Seja $1 < p < \infty$ e considere o espaço de Lebesgue $L_p[a, b]$. Mostre que se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset L_p[a, b]$ ($a < b$) é limitada e $f \in L_p[a, b]$, então $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge fracamente para f em $L_p[a, b]$ se, e somente se,

$$\int_a^x f_n(t) dt \rightarrow \int_a^x f(t) dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Solução. Se $\{f_n\}_n$ converge fracamente para f em $L_p[a, b]$, então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \cdot g dt = \int_a^b f \cdot g dt \quad \forall g \in L_q[a, b] \quad (p^{-1} + q^{-1} = 1)$$

Fixado $x \in [a, b]$ e considerando $g = \chi_{[a, x]}$ segue diretamente desta igualdade que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^x f_n dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n \cdot \chi_{[a, x]} dt = \int_a^b f \cdot \chi_{[a, x]} dt = \int_a^x f dt$$

Reciprocamente, como $\{f_n\}$ é limitada, alguma subsequência $\{f_{n_k}\}$ converge fracamente para alguma função $g \in L_p[a, b]$. Isso se deve à reflexividade do espaço $L_p[a, b]$. Portanto, usando a definição de convergência fraca e replicando o argumento acima, temos que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^x f_{n_k} dt = \int_a^x g dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Por outro lado, da hipótese, inferimos que:

$$\int_a^x f dt = \int_a^x g dt \quad \forall x \in [a, b].$$

Uma consequência imediata desta igualdade é que, para quaisquer $x < y$ em $[a, b]$, tem-se:

$$\int_x^y f dt = \int_a^y f dt - \int_a^x f dt = \int_a^y g dt - \int_a^x g dt = \int_x^y g dt.$$

Segue do Teorema de Diferenciação de Lebesgue que $f \equiv g$ q.t.p. em $[a, b]$. Ou seja, $f = g$ em $L_p[a, b]$. Agora, um argumento simples mostra que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ deve convergir fracamente para f .

Problema 7. Seja $\mathcal{H} = \ell_2$ o espaço de Hilbert munido com a norma usual induzida pelo produto interno

$$\langle \xi, \zeta \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \zeta_n, \quad \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty}, \quad \zeta = (\zeta_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

- (i) Mostre que se $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ é um operador linear autoadjunto, então seu espectro residual é vazio.
- (ii) Determine o espectro pontual, residual e contínuo do operador $T: \ell_2 \rightarrow \ell_2$ dado por

$$T(\xi) = \left(\frac{\xi_n}{\sqrt{n}} \right)_{n=1}^{\infty}, \quad \xi = (\xi_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2.$$

Solução (i). Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $R(T - \lambda I)$ não é denso em ℓ_2 . Pelo Teor. Hahn-Banach, existe $f \in \ell_2^* \setminus \{0\}$ tal que $R(T - \lambda I) \subset N(f)$, ou seja,

$$f(\xi) = 0 \quad \forall \xi \in R(T - \lambda I).$$

Portanto, como por hipótese T é auto-adjunto, tem-se que

$$\begin{aligned} \forall \xi \in \ell_2, \langle f, (T - \lambda I)(\xi) \rangle = 0 &\Leftrightarrow \langle (T - \lambda I)^*(f), \xi \rangle = 0 \quad \forall \xi \in \ell_2 \\ &\Leftrightarrow (T^* - \lambda I)(f) = 0 \Rightarrow f \in N(T^* - \lambda I) \\ &\Rightarrow \lambda \in \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T) \Rightarrow \sigma_r(T) = \emptyset \end{aligned}$$

Solução (ii). É fácil mostrar que T é um operador linear compacto e auto-adjunto. Logo, por (i), $\sigma_r(T) = \emptyset$. Segue então do Teorema Espectral que $\sigma(T) = \sigma_p(T) \cup \{0\}$. Agora, observe que $T(\xi) = 0$ se, e somente se, $\xi = 0$. Portanto, 0 não é um auto-valor de T e, assim, tem-se que $\sigma_c(T) = \{0\}$. Um cálculo direto, mostra que $(1/\sqrt{j})_{j=1}^{\infty}$ constitui os auto-valores de T associados aos auto-vetores $e_j = (\delta_{ij})_{i \in \mathbb{N}}$. Segue que $\sigma_p(T) = \{1/\sqrt{j} : j \in \mathbb{N}\}$.

Problema 8. Seja $1 < p < \infty$ e considere os espaços de Lebesgue $L_p[0, 1]$ e $L_1[0, 1]$. Mostre que se $T: L_p[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ é um operador linear limitado, então T não pode ser sobrejetivo.

Solução 1. Suponha que exista uma tal aplicação linear T . Então, podemos concluir facilmente que a adjunta $T^*: L_1^*[0, 1] \rightarrow L_p^*[0, 1]$ é linear, limitada e injetiva. Como $L_p^*[0, 1]$ é separável, *dual de um espaço reflexivo*, a imagem $T^*(L_1^*[0, 1])$ (*subespaço de um espaço separável*) também é separável. Então $T^*(L_1^*[0, 1])$ contém um conjunto enumerável e denso, digamos $\{T^*(f_n): n \in \mathbb{N}\}$. Acontece que a injetividade e continuidade de T^* implicam facilmente que $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$ é denso em $L_1^*[0, 1]$. Com efeito, se $f \in L_1^*[0, 1]$ então $T^*(f) \in T^*(L_1^*[0, 1])$. Portanto, $T^*(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^*(f_{n_k})$ (para alguma subsequência $\{f_{n_k}: k \in \mathbb{N}\}$ de $\{f_n: n \in \mathbb{N}\}$), donde segue que

$$T^*(f) = \lim_{k \rightarrow \infty} T^*(f_{n_k}) = T^*\left(\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}\right) \Rightarrow f = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}$$

Acontece que $L_1^*[0, 1]$ não pode ser separável uma vez que $L_1^*[0, 1] \approx L_\infty[0, 1]$.

Solução 2. Sabe-se que se E é um espaço normado reflexivo e M é um subespaço fechado de E , então o espaço quociente E/M também é reflexivo. No caso da questão, se existisse uma aplicação linear, limitada e sobrejetiva $T: L_p[0, 1] \rightarrow L_1[0, 1]$ poderíamos então concluir que o espaço quociente $L_p[0, 1]/\text{Ker}(T)$ é reflexivo. Acontece que T induz naturalmente um isomorfismo entre $L_p[0, 1]/\text{Ker}(T)$ e $L_1[0, 1]$. Com efeito, mostra-se facilmente que a aplicação linear $\hat{T}: L_p[0, 1]/\text{Ker}(T) \rightarrow L_1[0, 1]$ definida por $\hat{T}(f + \text{Ker}(T)) = T(f)$ é um isomorfismo. Consequentemente, como reflexividade é invariante por isomorfismo, teríamos que $L_1[0, 1]$ é reflexivo. Acontece que isso não é verdade, um fato classicamente bem conhecido.