UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção do Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

25 de Julho de 2025

Número de Inscrição: ____

Resolva as 6 questões abaixo.

Questão 1. Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge e $a_n \geq 0$ para todo n, mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ também converge. Dê um exemplo para mostrar que a condição $a_n \geq 0$ não pode ser dispensada.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \quad \text{para todos } x, y \in \mathbb{R}.$$

(a) Suponha que f é contínua. Prove que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) O resultado do item (a) continua válido se assumirmos apenas que f é contínua em um único ponto? Justifique.

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em todos os pontos e tal que:

- $f(0) = 0$,
- $|f'(x)| \leq |f(x)|$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Prove que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

($\star$) **Dica:** **Estude as funções** $g(x) = f(x)^2 \cdot e^{\pm 2x}$.

Questão 4. Seja $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 tal que

$$\lim_{x \to \infty} f'(x) = \alpha.$$

Mostrar que

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \alpha.$$

Questão 5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real.

1. Mostre que se f é derivável em $a \in \mathbb{R}$, então

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a).$$

2. Mostre, por meio de um exemplo, que o fato de o limite acima existir em $a \in \mathbb{R}$, **não implica** que f seja derivável neste dito ponto $a \in \mathbb{R}$.

Questão 6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(y)\, dy = f(x).$$

Soluções

Solução - Questão - 1

Parte 1 – Convergência de $\sum a_n^2$ sob $a_n \geq 0$:
Como $a_n \geq 0$ e $\sum a_n$ converge, temos $a_n \to 0$. Logo, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq N$,

$$0 \leq a_n < 1 \Rightarrow a_n^2 < a_n.$$

Assim, para $n \geq N$,

$$0 \leq a_n^2 < a_n,$$

e portanto, a série $\sum_{n=N}^{\infty} a_n^2$ converge por comparação com a cauda $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$, que converge. Os termos iniciais até $n = N - 1$ não afetam a convergência, e concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \text{ converge.}$$

Parte 2 – Contraexemplo sem $a_n \geq 0$:

Considere $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$. Então:

- A série $\sum a_n$ converge pelao Teorema da *Série Alternada de Leibniz*:
  - $a_n \to 0$,
  - $|a_n|$ é decrescente.
- No entanto:
$$\sum a_n^2 = \sum \frac{1}{n},$$
  que é a série harmônica, e **diverge**.

Portanto, a condição $a_n \geq 0$ é essencial.

Solução - Questão - 2

(a) Suponha que f é contínua em $\mathbb{R}$. Mostraremos que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$, em três etapas:

1. *Linearidade em* $\mathbb{Q}$. Temos:
$$f(0) = 0, \quad f(n) = nf(1) \text{ para } n \in \mathbb{Z}, \quad f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}f(1) \text{ para } \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}.$$
   Logo, $f(q) = qf(1)$ para todo $q \in \mathbb{Q}$.

2. *Extensão por continuidade.* Como $\mathbb{Q}$ é denso e f é contínua, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ com $q_n \to x$, e

$$f(x) = \lim f(q_n) = \lim q_n f(1) = x f(1).$$

3. *Conclusão.* Portanto, $f(x) = ax$, com $a = f(1) \in \mathbb{R}$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

(b) Suponha agora que f é contínua em um único ponto $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostraremos que o mesmo resultado vale.

1. *Continuidade global.* Para qualquer $x, h \in \mathbb{R}$, temos:

$$f(x+h) = f(x) + f(h) \Rightarrow f(x+h) - f(x) = f(h).$$

   Como $f(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) \to 0$ (pela continuidade em x_0), segue que $f(x+h) \to f(x)$. Assim, f é contínua em todo ponto de $\mathbb{R}$.

2. *Redução ao item (a).* Como f é agora aditiva e contínua em toda $\mathbb{R}$, aplica-se o item (a), e concluímos que $f(x) = ax$, com $a = f(1)$.

Solução - Questão - 3

Defina $g(x) := f(x)^2$. Como f é derivável, g também é derivável, com

$$g'(x) = 2f(x)f'(x),$$

e pela hipótese,

$$|g'(x)| = 2|f(x)f'(x)| \leq 2f(x)^2 = 2g(x).$$

Caso $x \geq 0$
Definimos $h(x) := g(x)e^{-2x}$. Então,

$$h'(x) = e^{-2x}(g'(x) - 2g(x)) \leq e^{-2x}(|g'(x)| - 2g(x)) \leq 0.$$

Logo, h é não crescente. Como $h(0) = g(0) = f(0)^2 = 0$ e $h(x) \geq 0$, segue que $h(x) = 0$ para todo $x \geq 0$, e portanto $f(x) = 0$ para $x \geq 0$.
Caso $x \leq 0$
Definimos $\tilde{h}(x) := g(x)e^{2x}$. Então,

$$\tilde{h}'(x) = e^{2x}(g'(x) + 2g(x)) \geq (g'(x) + |g'(x)|) \geq 0.$$

Logo, $\tilde{h}$ é não decrescente. Como $\tilde{h}(0) = 0$ e $\tilde{h}(x) \geq 0$, segue que $\tilde{h}(x) = 0$ para todo $x \leq 0$, e portanto $f(x) = 0$ para $x \leq 0$.
Conclusão
Concluímos que $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solução - Questão - 4

Para $x > 1$, temos:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{f(1)}{x} + \frac{1}{x}\int_1^x f'(t)\,dt.$$

O primeiro termo tende a zero. Para o segundo, escrevemos:

$$\int_1^x f'(t)\,dt = \alpha(x-1) + E(x), \quad \text{com } E(x) := \int_1^x (f'(t)-\alpha)\,dt.$$

Como $f'(t) \to \alpha$, dado $\varepsilon > 0$, existe $M > 1$ tal que

$$|f'(t)-\alpha| < \varepsilon \quad \text{para todo } t > M.$$

Então, para $x > M$,

$$|E(x)| \le \int_1^M |f'(t)-\alpha|\,dt + \int_M^x |f'(t)-\alpha|\,dt < C + \varepsilon(x-M),$$

onde $C := \int_1^M |f'(t)-\alpha|\,dt$ é constante. Assim,

$$\left|\frac{E(x)}{x}\right| \le \frac{C}{x} + \varepsilon \cdot \frac{x-M}{x} \to \varepsilon.$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, concluímos que $\frac{E(x)}{x} \to 0$.
Portanto:

$$\frac{f(x)}{x} = \alpha \cdot \frac{x-1}{x} + \frac{E(x)}{x} + \frac{f(1)}{x} \to \alpha.$$

Solução - Questão - 5

Parte 1: Demonstração do limite

Se f é derivável em a, então existe $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Podemos escrever:

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{f(a+h)-f(a)}{2h} + \frac{f(a)-f(a-h)}{2h}.$$

Reescrevendo o segundo termo:

$$\frac{f(a)-f(a-h)}{2h} = \frac{f(a-h)-f(a)}{-2h} = \frac{1}{2}\cdot\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}.$$

Portanto:

$$\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(a+h)-f(a)}{h} + \frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right].$$

Tomando o limite:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}\left[\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}\right].$$

Como f é derivável em a, os limites laterais existem e são iguais:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a-h)-f(a)}{-h}=f'(a).$$

Logo:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h}=\frac{1}{2}(f'(a)+f'(a))=f'(a).$$

Parte 2: Exemplo onde o limite existe, mas f não é derivável

Considere a função

$$f(x)=|x| \quad \text{em } \mathbb{R}, \text{ e tome } a=0.$$

Temos:

$$\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=\frac{|h|-|-h|}{2h}=\frac{h-(-h)}{2h}=\frac{0}{2h}=0.$$

Portanto,

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(-h)}{2h}=0.$$

Mas $f(x)=|x|$ *não é derivável* em $x=0$. Logo, o limite (simétrico) existe (e é zero), mas a função não é derivável no ponto $x=0$.

Solução - Questão - 6

Seja $\varepsilon>0$. Pela continuidade de f em x, existe $\delta>0$ tal que, para $|y-x|<\delta$, temos $|f(y)-f(x)|<\varepsilon$.
Para $0<h<\delta$,

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}f(y)\,dy-f(x)\right|=\left|\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}(f(y)-f(x))\,dy\right|\leq\frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h}|f(y)-f(x)|\,dy<\varepsilon.$$

Como $\varepsilon>0$ é arbitrário, segue o resultado.