UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Admissão do Doutorado

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

Soluções

25 de Julho de 2025

Número de Inscrição: ______________________________

Resolva as 4 questões abaixo.

Questão 1. Seja $\gamma : [0, \ell] \to \mathbb{R}^3$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco e suponha ainda que sua curvatura é diferente de zero, $\kappa(s) \neq 0$, para todo $s \in [0, \ell]$. (**Lembrete:** a reta normal à curva γ em $\gamma(s)$ é a reta descrita por $\gamma(s) + u\mathbf{N}(\mathbf{s})$, $u \in \mathbb{R}$, onde $\mathbf{N}(\mathbf{s})$ é o único vetor unitário tal que $\gamma''(s) = \kappa(s)\mathbf{N}(\mathbf{s})$, com $\kappa(s) > 0$).

(a) Seja $B(s) \in \mathbb{R}^3$ tal que $\{\mathbf{T}(\mathbf{s}) = \gamma'(\mathbf{s}), \mathbf{N}(\mathbf{s}), \mathbf{B}(\mathbf{s})\}$ é uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$, para todo $s \in [0, \ell]$. Prove que

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{T}(\mathbf{s}) + \tau(\mathbf{s})\mathbf{B}(\mathbf{s}),$$

onde $\tau : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável.

(b) Suponha adicionalmente que todas as retas normais à γ passam por um ponto $p \in \mathbb{R}^3$ não pertencente à γ. Mostre que γ é um arco de círculo.

Solução. No que segue, $\{\mathbf{T(s)}, \mathbf{N(s)}, \mathbf{B(s)}\}$ representa o triedro de Frenet da curva γ no ponto $\gamma(s)$. Escreva a equação vetorial na forma:

$$\gamma(s) - p = \mu(s)\mathbf{N}(s) \tag{1}$$

em que $\mu : [0, \ell] \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, pois

$$\mu(s) = \langle \gamma(s) - p, \mathbf{N(s)} \rangle.$$

Derivando (1), obtemos a seguinte equação

$$\mathbf{T(s)} = \frac{\mathbf{d\mu}}{\mathbf{ds}}\mathbf{(s)N(s)} + \mu\mathbf{(s)}\frac{\mathbf{dN(s)}}{\mathbf{ds}}. \tag{2}$$

Vamos resolver o item (a), ou seja, vamos provar a validade da equação de Frenet:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}(s) = -\kappa(s)\mathbf{T(s)} + \tau\mathbf{(s)B(s)}, \tag{3}$$

em que $\tau(s)$ representa a torção da curva $\gamma(s)$. Para tanto, basta determinar os coeficientes de $\frac{d\mathbf{N}}{ds}(s)$ na base ortonormal $\{\mathbf{T(s)}, \mathbf{N(s)}, \mathbf{B(s)}\}$:

$$\frac{d\mathbf{N}}{ds}(s) = \left\langle \frac{d\mathbf{N}}{ds}(s), \mathbf{T(s)} \right\rangle \mathbf{T(s)} + \left\langle \frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{ds}}\mathbf{(s)}, \mathbf{N(s)} \right\rangle \mathbf{N(s)} + \left\langle \frac{\mathbf{dN}}{\mathbf{ds}}\mathbf{(s)}, \mathbf{B(s)} \right\rangle \mathbf{B(s)}.$$

Derivando as expressões constantes $\langle \mathbf{N(s)}, \mathbf{T(s)} \rangle = \mathbf{0}$ e $\langle \mathbf{N(s)}, \mathbf{N(s)} \rangle = \mathbf{1}$, concluímos

$$\left\langle \frac{d\mathbf{N}}{ds}(s), \mathbf{T(s)} \right\rangle = -\langle \frac{\mathbf{dT}}{\mathbf{ds}}\mathbf{(s)}, \mathbf{N(s)} \rangle = -\kappa\mathbf{(s)}$$

e

$$\left\langle \frac{d\mathbf{N}}{ds}(s), \mathbf{N(s)} \right\rangle = \mathbf{0}.$$

O resultado do item (a) segue.

Combinando (2) e (3), temos

$$(1 + \mu(s)\kappa(s))\mathbf{T(s)} - \frac{\mathbf{d\mu}}{\mathbf{ds}}\mathbf{(s)N(s)} - \mu\mathbf{(s)}\tau\mathbf{(s)B(s)} = \mathbf{0}.$$

Como o Triedro de Frenet $\{\mathbf{T(s)}, \mathbf{N(s)}, \mathbf{B(s)}\}$ é, para todo $s \in [0, \ell]$, uma base de $\mathbb{R}^3$, temos que

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mu(s) & = & -\frac{1}{\kappa(s)} \\ \frac{d\mu}{ds}(s) & = & 0 \\ \mu(s) \cdot \tau(s) & = & 0 \end{array} \right. \tag{4}$$

Usando a segunda equação de (4), obtemos que existe uma constante não nula C, tal que $\mu(s) = C$ (não nula pois, caso contrário, $\mu(s) = p$ e teríamos $p \in \gamma$, contradição). denotando por $\mu(s) = -R$, temos que $\tau(s) = 0$ e $\kappa(s) = \frac{1}{R}$, ou seja, γ está contida num círculo de raio $|R|$. De fato, por (1)

$$\|\gamma(s) - p\| = |\mu(s)| \cdot \|\mathbf{N(s)}\| = |\mathbf{R}|,$$

isto mostra que γ está contida em uma esfera. Além disso, $\tau(s) = 0$ implica que $\mathbf{B(s)} = \mathbf{T(s)} \times \mathbf{N(s)}$ é constante igual a $\mathbf{B(0)}$, pois

$$\begin{aligned} \mathbf{B}'(\mathbf{s}) &= \mathbf{T}'(\mathbf{s}) \times \mathbf{N(s)} + \mathbf{T(s)} \times \mathbf{N}'(\mathbf{s}) \\ &= (\kappa(n)\mathbf{N(s)}) \times \mathbf{N(s)} + \mathbf{T(s)} \times (-\kappa(\mathbf{s})\mathbf{T(s)} + \tau(\mathbf{s})\mathbf{B(s)}) \\ &= \tau(s)\mathbf{T(s)} \times \mathbf{B(s)} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Por fim, derivando a expressão $\langle \gamma(s), \mathbf{B(0)} \rangle$, obtemos que ela é constante. Isto mostra que γ está contida em um plano. Por está contida na interseção de um plano com uma esfera, concluímos que a curva é um arco de círculo. □

Questão 2. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ uma função Lipschitziana no conjunto aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in U$ e $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Se $g'(b) = 0$ mostre que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = 0$ (**Lembrete:** Uma função Lipschitziana, definida em um aberto $U \subset \mathbb{R}^n$, é uma função $f : U \to \mathbb{R}^m$ que satisfaz uma condição de Lipschitz, ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|$, para todo $x, y \in U$).

Solução. Seja $h = g \circ f$ e Consideremos a diferença $h(a + h) - h(a)$ para valores pequenos de $\|h\|$, ou seja,

$$\begin{aligned} h(a + h) - h(a) &= (g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a) \\ &= g(f(a + h)) - g(f(a)) = g(b + k) - g(b), \end{aligned} \tag{5}$$

em que $k = f(a + h) - f(a)$. A fórmula de Taylor aplicada a $g(b + k)$ e observando que $g'(b) = 0$ dá-nos

$$g(b + k) - g(b) = g'(b) \cdot k + r(k) = r(k), \tag{6}$$

em que $\lim_{k \to 0} \frac{r(k)}{|k|} = 0$. Portanto,

$$g(f(a) + k) - g(f(a)) = r(k).$$

Usando que $k = f(a + h) - f(a)$, obtemos

$$\begin{aligned} (g \circ f)(a + h) - (g \circ f)(a) &= g(f(a) + k) - g(f(a)) \\ &= r(k) = r(f(a + h) - f(a)). \end{aligned}$$

Afirmação: $\lim_{h \to 0} \frac{r(f(a+h) - f(a))}{|h|} = 0.$

De fato, usando que f é Lipschitz, $\|f(a+h)-f(a)\| \le C\|h\|$. Assim,

$$\begin{aligned} 0 \quad &\le \quad \left\| \frac{r(f(a+h)-f(a))}{\|h\|} \right\| = \left\| \frac{r(f(a+h)-f(a))}{\|f(a+h)-f(a)\|} \cdot \frac{\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|} \right\| \\ &= \quad \left\| \frac{\|f(a+h)-f(a)\|}{\|h\|} \right\| \cdot \left\| \frac{r(k)}{\|k\|} \right\| \le C \left\| \frac{r(k)}{\|k\|} \right\|. \end{aligned}$$

Daé, pelo teorema do confront, $\lim_{h\to 0} \frac{r(f(a+h)-f(a))}{\|h\|} = 0$. Portanto, temos que

$$(g \circ f)(a+h) - (g \circ f)(a) = \tilde{r}(h), \quad \text{onde} \quad \tilde{r}(h) = r(f(a+h)-f(a))$$

e $\lim_{h\to 0} \frac{\tilde{r}(h)}{\|h\|} = 0$, ou seja, $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável em $a \in U$ e $(g \circ f)'(a) = 0$.

$\square$

Questão 3. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^k $(k \ge 1)$. Suponha que $f(0,0) = 0$ e que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \neq 0 \quad \text{e} \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| \le M,$$

para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, onde M é uma constante positiva. Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y = \xi(x) \in \mathbb{R}$ tal que $f(x,\xi(x)) = 0$, e que a função $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, assim definida, é de classe C^k.

Solução. Suponha que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) > 0$. O outro caso é análogo. Note que esta condição implica que $y \mapsto f(x,y)$ é estritamente crescente. Logo, para todo $x \in \mathbb{R}$, existe no máximo um valor y tal que $f(x,y) = 0$. Se $f(x_0,y_0) = 0$, então a condição $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \neq 0$ permite uma aplicação do Teorema da Função Implícita, ou seja, existe um intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ onde é definida uma função ξ de classe C^k tal que $f(x,\xi(x)) = 0$, para todo $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ e

$$\xi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,\xi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\xi(x))}.$$

Em particular, o conjuntos X dos pontos $x \in \mathbb{R}$ tais que existe y satisfazendo $f(x,y) = 0$ é aberto e não vazio, pois $0 \in X$. Para concluir, vamos mostrar que X é fechado. A hipótese sobre a razão entre as derivadas parciais de f implica que ξ tem derivada limitada por M. Portanto, se $\{x_k\}_k$ é sequência em X e $\lim x_k = x$, então $|\xi(x_k) - \xi(x_\ell)| \le M|x_k - x_\ell|$. Como $\{x_k\}_k$ é convergente, o mesmo ocorre com $\{\xi(x_k)\}_k$. Logo, existe o limite $\lim \xi(x_k) = y$. Pela continuidade de f segue que $0 = \lim f(x_k, \xi(x_k)) = f(x,y)$.

$\square$

Questão 4. Seja K um domínio compacto com fronteira de classe C^2 em $\mathbb{R}^n$, o qual tem a estrutura de uma superfície com bordo de dimensão n cujo bordo ∂K coincide com a fronteira do conjunto K e é munido da orientação induzida pela orientação de K.

(a) Sejam $\varphi : U_0 \to U$ e $\psi : V_0 \to V$ parametrizações positivas de ∂K tais que $U \cap V \neq \varnothing$. Mostre que, para $u \in U_0$ e $v \in V_0$ tais que $\varphi(u) = \psi(v)$, temos:

$$\sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right]}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1} = \xi^*\left(\sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial v_i}(v), \frac{\partial\psi}{\partial v_j}(v)\right\rangle\right]}\, dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_{n-1}\right),$$

onde $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ é mudança de parametrizações.

(b) Seja ω a forma diferencial de grau $n-1$ em ∂K tal que, para toda parametrização positiva $\varphi : U_0 \to U$ de $U \subset \partial K$, tem-se

$$(\varphi^*\omega)(u) = \sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right]}\, du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}.$$

Justifique que $\int_{\partial K} \omega \neq 0$.

(c) Mostre que não existe $f : K \to \partial K$ de classe C^2 tal que $f(x) = x$, para todo $x \in \partial K$.

Solução. **(a)** Seja $\xi = \psi^{-1} \circ \varphi$ a mudança de parametrizações. A regra da cadeia fornece

$$\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle = \sum_{\ell,k=1}^{n-1} \frac{\partial\xi_\ell}{\partial u_i}(u)\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial v_\ell}(\xi(u)), \frac{\partial\psi}{\partial v_k}(\xi(u))\right\rangle \frac{\partial\xi_k}{\partial u_j}(u).$$

Portanto, a propriedade do determinante do produto e a positividade de φ e ψ fornecem

$$\sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right]} = \sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\psi}{\partial v_\ell}(\xi(u)), \frac{\partial\psi}{\partial v_k}(\xi(u))\right\rangle\right]} \cdot \det\left[\frac{\partial\xi_r}{\partial u_s}(u)\right].$$

Para concluir, é suficiente observar que a regra da cadeia também implica que

$$\xi^*(dv_1 \wedge \ldots \wedge dv_{n-1})(u) = \det\left[\frac{\partial\xi_r}{\partial u_s}(u)\right] du_1 \wedge \ldots \wedge du_{n-1}.$$

(b) Segue da definição de ω que $\omega > 0$, o que implica que a integral de superfície $\int_{\partial K} \omega$ é estritamente positiva. Isto pode ser justificado a partir de uma partição da unidade $\{\xi_k\}$, $k = 1, \ldots, N$, subordinada a uma cobertura de ∂K por uma quantidade finita de vizinhanças parametrizadas (por $\varphi : U_0^k \to U_k$) e escrevendo

$$\int_{\partial K} \omega = \sum_{k=1}^{N} \int_{\partial K} \xi_k \omega = \sum_{k=1}^{N} \int_{U_0^k} \xi_k(\varphi_k(u)) \sqrt{\det\left[\left\langle \frac{\partial\varphi}{\partial u_i}(u), \frac{\partial\varphi}{\partial u_j}(u)\right\rangle\right]}\, du.$$

Note que cada parcela dessa soma é não negativa, e algumas são estritamente positivas, pois $0 \leq \xi_k \leq 1$ e $\sum_{k=1}^{N} \xi_k = 1$.

(c) Como ω tem grau máximo, segue-se que $d\omega = 0$. Se houver f como no enunciado, teremos $d(f^*\omega) = f^*(d\omega) = 0$ e a restrição de $f^*\omega$ ao bordo ∂K coincidirá com ω. Portanto, o Teorema de Stokes implicará

$$0 = \int_K d(f^*\omega) = \int_{\partial K} f^*\omega = \int_{\partial K} \omega \neq 0,$$

o que é uma contradição.

$\square$