UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

CENTRO DE CIÊNCIAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

THIAGO LIMA GONÇALVES

VARIEDADES COM CAMPOS CONFORMES FECHADOS

FORTALEZA

2025

THIAGO LIMA GONÇALVES

VARIEDADES COM CAMPOS CONFORMES FECHADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

G629v Gonçalves, Thiago Lima.
Variedades com campos conformes fechados / Thiago Lima Gonçalves. – 2025.
40 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.
Orientação: Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto.

1. Campos conformes fechados. 2. Superfícies. 3. Produtos warped. 4. Variedades kählerianas. I. Título.
CDD 510

THIAGO LIMA GONÇALVES

VARIEDADES COM CAMPOS CONFORMES FECHADOS

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Matemática.

Aprovada em: 11/03/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Francisco Yure Santos do Nascimento Jansel
Universidade Federal do Ceará (UFC - Crateús)

Aos meus pais, por sempre me incentivarem em minha jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Antonio Gonçalves de Lima e Antonia Nete de Lima, e à minha irmã, Ellen Maria Lima Gonçalves, pelo suporte incessante em todos os aspectos da minha vida.

À minha namorada, Maria Eduarda Bezerra de Oliveira, por todo amor e carinho depositado em mim.

Ao Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, pela excelente orientação e contribuição imensurável ao meu aprendizado.

Aos membros participantes da banca examinadora, Prof. Dr. Antonio Caminha Muniz Neto, Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral e Prof. Dr. Francisco Yure Santos do Nascimento Jansel, pelas valiosas críticas e sugestões.

Aos colegas e amigos do Departamento de Matemática, Jackson, Vinícius, Matheus, Laiane, Gabriel, Wesley e Nalbert, pelas várias tardes de bate-papo, café e matemática.

Aos meus amigos Wagner, Bruna e João Pedro, pelos vários momentos felizes que vivemos.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"Young man, in Mathematics you don’t understand things. You just get used to them."
(John von Neumann)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos variedades riemannianas completas (M, g) munidas de um campo conforme fechado não trivial ξ, com pelo menos um ponto singular p, cujo fator conforme satisfaz uma hipótese adicional. Mais precisamente, supomos que a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não trivial partindo de p é positiva. Provamos uma fórmula para o volume das bolas geodésicas centradas em p, que depende apenas de $|\xi|$, e caracterizamos essa classe de variedades. No contexto de superfícies riemannianas, deduzimos um critério, dependente apenas de $|\xi|$, para a classificação das mesmas, a menos de equivalências conformes. Por fim, no contexto das variedades kählerianas, provamos que o único exemplo, a menos de isometrias, é o espaço euclidiano complexo.

Palavras-chave: campos conformes fechados; superfícies; produtos warped; variedades kählerianas.

ABSTRACT

In this work, we study complete Riemannian manifolds (M, g) endowed with a nontrivial closed conformal fields ξ, with at least one singular point p and whose conformal factor ψ satisfies an additional hypothesis. More precisely, we assume that the integral of ψ along each nontrivial geodesic departing from p is positive. We prove a formula for the volume of the geodesic balls centered in p, which only depends on $|\xi|$, and characterize this class of manifolds. In the context of Riemannian surfaces, we deduce a criterion, dependening only on $|\xi|$, for the classification up to conformal equivalences. Finally, in the context of Kählerian manifolds, we prove that the only example, up to isometries, is the complex Euclidean space.

Keywords: closed conformal fields; surfaces; warped products; Kählerian manifolds.

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO**	9
2	**PRELIMINARES**	11
2.1	**Campos conformes fechados**	11
2.2	**Variedades kählerianas**	14
3	**UMA FÓRMULA PARA O VOLUME DAS BOLAS GEODÉSICAS**	18
4	**SUPERFÍCIES MUNIDAS DE CAMPOS CONFORMES FECHADOS**	23
5	**PRESCREVENDO O FATOR CONFORME**	28
6	**VARIEDADES DE KÄHLER MUNIDAS DE CAMPOS CONFORMES FECHADOS**	35
7	**CONCLUSÃO**	38
	REFERÊNCIAS	39

1 INTRODUÇÃO

Um tópico clássico em Geometria é tentar entender como a existência de um campo conforme fechado não trivial afeta a geometria de uma variedade riemanniana (M^n, g), possivelmente também munida de alguma outra estrutura geométrica. Por exemplo, em [12], os autores provaram que uma variedade riemanniana conexa, compacta e orientável com curvatura escalar constate positiva e número de Euler não nulo é globalmente isométrica a uma esfera redonda de dimensão par, supondo que essa variedade admite um campo conforme fechado não trivial.

Desde [2], o autor se interessou no contexto de uma variedade kähleriana não compacta (M^{2n}, g, J), com $n > 1$, munida de um campo conforme fechado não trivial ξ. Em [1], os autores, supondo que ξ tem pelo menos um ponto singular p, seu fator conforme $\psi \geq 1$ tende a 1 no infinito e a curvatura de Ricci de M na direção de ξ é não positiva, provaram que $\psi \equiv 1$, ξ tem apenas um ponto singular p e $M \setminus \{p\}$ é isométrico a um cone sobre uma variedade de Sasaki difeomorfa a $\mathbb{S}^{2n-1}$. Esse resultado foi melhorado em [3], além de terem sido provaods mais alguns resultados interessantes fora do ambiente kählerianno. Essa dissertação tem como objetivo apresentar parte dos resultados deste último artigo.

No segundo capítulo, são discutidos alguns dos conceitos preliminares utilizados no decorrer do texto. Apresentamos a noção de campo conforme fechado, bem como suas interações com a curvatura do espaço e com mudanças conformes da métrica. Também, visando o quinto capítulo, definimos variedades kählerianas e enunciamos, com demonstrações omitidas, os resultados que serão usados explicitamente.

No terceiro capítulo, são apresentadas algumas notações que serão usadas mais diante. lém disso, provamos o teorema 3.1, que, dentre outras coisas, prova que uma variedade riemanniana (M^n, g, ∇), com $n > 1$, que admite um campo conforme fechado não trivial ξ, com pelo menos um ponto singular p, e com integral de seu fator conforme ao longo de toda geodésica não trivial partindo de p positiva é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$. Uma fórmula para o volume das bolas geodésicas centradas em p, que depende apenas de $|\xi|$, é demonstrada.

No quarto capítulo, nos ocupamos do estudo de superfícies riemannianas. Deduzimos um critério para determinar se uma superfície riemanniana (Σ^2, g, ∇), munida de um campo conforme fechado não trivial ξ satisfazendo as hipóteses do teorema 3.1, é conformemente equivalente ao plano euclidiano ou ao plano hiperbólico. Tal críterio é também dependente apenas de $|\xi|$.

No quinto capítulo, apresentamos uma forma de construir, a partir de produtos war-

ped, exemplos de variedade completas munidas de campos conformes fechados com exatamente um ponto singular e satisfazendo as outras hipóteses de 3.1. Ademais, provamos que essa família de exemplos caracteriza completamente essa classe de variedades.

Por fim, no sexto capítulo, estudamos variedades kählerianas. Provamos que, a menos de isometrias a única variedade kähleriana (M^{2n}, g, J), com $n > 1$, que admite um campo conforme fechado não trivial, satisfazendo as hipóteses do teorema 3.1, é o espaço euclidiano complexo.

2 PRELIMINARES

Nessa seção, discutiremos de forma rápida alguns tópicos preliminares necessários, em especial, as noções de campo conforme fechado e de variedade kähleriana. Pórem, assumimos que o leitor possua conhecimento básico sobre geometria riemanniana, no nível dos oito primeiros capítulos de [4].

2.1 Campos conformes fechados

Seja $(M^n, g = \langle , \rangle, \nabla)$ uma variedade Riemanniana, com $n > 1$. Dizemos que $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ é um *campo conforme fechado* se existir uma função $\psi \in C^\infty(M)$ tal que, para qualquer $X \in \mathfrak{X}(M)$, tenhamos

$$\nabla_X \xi = \psi X.$$

A função ψ é chamada de *fator conforme* de ξ. Nesse caso, dizemos que ξ é não trivial quando não for identicamente nulo. Afirmamos que ξ é um campo conforme fechado, com fator conforme ψ, se, e só se,

$$L_\xi g = 2\psi g \quad \text{e} \quad d\omega_\xi = 0,$$

onde L_ξ denota a derivada de Lie na direção de ξ e ω_ξ é a 1-forma dual associada a ξ, isto é, tal que $\omega_\xi(X) = g(\xi, X)$, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$. Com efeito, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\begin{aligned}(L_\xi g)(X,Y) &= \xi(g(X,Y)) - g([\xi,X],Y) - g(X,[\xi,Y]) \\ &= g(\nabla_\xi X, Y) + g(X, \nabla_\xi Y) - g(\nabla_\xi X - \nabla_X \xi, Y) - g(X, \nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(X, \nabla_Y \xi).\end{aligned}$$

e, também,

$$\begin{aligned}d\omega_\xi(X,Y) &= X(g(\xi,Y)) - Y(g(\xi,X)) - g(\xi,[X,Y]) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) + g(\xi, \nabla_X Y) - g(\nabla_Y \xi, X) - g(\xi, \nabla_Y X) - g(\xi,[X,Y]) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X).\end{aligned}$$

Assim, é imediato que $(L_\xi g)(X,Y) = 2\psi g(X,Y)$ e $d\omega_\xi(X,Y) = 0$ se, e só se,

$$g(\nabla_X \xi, Y) = \psi g(X,Y).$$

Portanto, da arbitrariedade de X e Y, segue a afirmação. □

Sendo ξ um campo conforme fechado, com fator conforme ψ, um cálculo imediato garante que

$$\operatorname{div}\xi = n\psi. \tag{2.1}$$

Com efeito, se $(e_1,...,e_n)$ for um referencial ortonormal local para M, segue que

$$\operatorname{div}\xi = \sum_{i=1}^{n}\langle\nabla_{e_i}\xi, e_i\rangle = \sum_{i=1}^{n}\langle\psi e_i, e_i\rangle = n\psi.$$

Em [10], os autores provaram que, se $n > 2$, ψ não se anula nos pontos singulares de ξ. Devido à importância dessa propriedade para os resultados adiante, vamos impor que ξ e ψ também tenham essa propriedade quando $n = 2$.

Agora, por completude, provaremos algumas propriedades adicionais envolvendo a noção de campo conforme fechado, as quais conpõem o Lema 7 de [11].

Denotando o tensor de curvatura de M por R e o tensor de curvatura de Ricci normalizado por Ric, temos

$$|\xi|^2\nabla\psi = -\operatorname{Ric}(\xi)\xi, \tag{2.2}$$

onde $\nabla\psi$ denota o gradiente de ψ.

Basta provar a equação (2.2) em cada $q \in M$ tal que $\xi(q) \neq 0$. Logo, nesse caso, seja $(e_1,...,e_n)$ um referencial ortonormal local definido numa vizinhaça de q onde ξ nunca se anula, com $e_n = \frac{\xi}{|\xi|}$. Temos

$$\begin{aligned}
\operatorname{Ric}(\xi) &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle R(e_i,\xi)\xi, e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle\nabla_{e_i}\nabla_\xi\xi - \nabla_\xi\nabla_{e_i}\xi - \nabla_{[e_i,\xi]}\xi, e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle\nabla_{e_i}(\psi\xi) - \nabla_\xi(\psi e_i) - \psi[e_i,\xi], e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle e_i(\psi)\xi + \psi\nabla_{e_i}\xi - \xi(\psi)e_i - \psi\nabla_\xi e_i - \psi(\nabla_{e_i}\xi - \nabla_\xi e_i), e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle e_i(\psi)\xi + \psi^2 e_i - \xi(\psi)e_i - \psi^2 e_i, e_i\rangle \\
&= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}\langle -\xi(\psi)e_i, e_i\rangle = -\xi(\psi) = -\langle\nabla\psi,\xi\rangle.
\end{aligned}$$

Mas, note que, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\langle \nabla(|\xi|^2), X\rangle = X(|\xi|^2) = 2\langle \nabla_X \xi, \xi\rangle = \langle 2\psi\xi, X\rangle,$$

logo, $\nabla(|\xi|^2) = 2\psi\xi$. Assim, dados $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, a hessiana de $|\xi|^2$ é dada por

$$\begin{aligned}
\operatorname{Hess}|\xi|^2(X,Y) &= \langle \nabla_X \nabla|\xi|^2, Y\rangle = \langle \nabla_X(2\psi\xi), Y\rangle \\
&= 2\langle X(\psi)\xi + \psi\nabla_X\xi, Y\rangle \\
&= 2X(\psi)\langle \xi, Y\rangle + 2\psi^2\langle X, Y\rangle \\
&= 2\langle \nabla\psi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle + 2\psi^2\langle X, Y\rangle. \qquad (2.3)
\end{aligned}$$

Como $\operatorname{Hess}|\xi|^2$ e $\langle\cdot,\cdot\rangle$ são simétricos, segue que

$$\langle \nabla\psi, X\rangle\langle \xi, Y\rangle = \langle \nabla\psi, Y\rangle\langle \xi, X\rangle,$$

logo, tomando $Y = \xi$, obtemos $\langle \nabla\psi, X\rangle|\xi|^2 = \langle \nabla\psi, \xi\rangle\langle \xi, X\rangle$. Assim, para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\langle |\xi|^2\nabla\psi - \langle \nabla\psi, \xi\rangle\xi, X\rangle = 0,$$

de sorte que

$$|\xi|^2\nabla\psi = \langle \nabla\psi, \xi\rangle\xi = -\operatorname{Ric}(\xi)\xi.\square$$

Além disso, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, vale que

$$|\xi|^2 R(X,Y)\xi = -\operatorname{Ric}(\xi)(\langle X, \xi\rangle Y - \langle Y, \xi\rangle X). \qquad (2.4)$$

De fato,

$$\begin{aligned}
|\xi|^2 R(X,Y)\xi &= |\xi|^2(\nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi) \\
&= |\xi|^2(\nabla_X(\psi Y) - \nabla_Y(\psi X) - \psi[X,Y]) \\
&= |\xi|^2(X(\psi)Y + \psi\nabla_X Y - Y(\psi)X - \psi\nabla_Y X - \psi[X,Y]) \\
&= |\xi|^2(\langle \nabla\psi, X\rangle Y - \langle \nabla\psi, Y\rangle X) \\
&= -\operatorname{Ric}(\xi)(\langle \xi, X\rangle Y - \langle \xi, Y\rangle X)
\end{aligned}$$

em que utilizamos (2.2) na última igualdade.$\square$

Agora, afirmamos que ξ tem pontos singulares isolados. Com efeito, se $\xi(p) = 0$, uma vez que $\psi(p) \neq 0$, a equação (2.3) dá

$$(\operatorname{Hess}|\xi|^2)_p = 2\psi(p)^2\langle\cdot,\cdot\rangle_p,$$

de forma que $(\mathrm{Hess}\,|\xi|^2)_p$ é positiva definida. Isso prova que todo ponto singular de ξ deve ser um zero não degenerado da função $|\xi|^2$, os quais são isolados, de onde segue a afirmação.□

Agora, vamos considerar métricas em M conformemente equivalentes a g para produzir exemplos de outras variedades riemannaianas munidas de campos conforme fechados não triviais. Dada $f \in C^\infty(M)$, seja g_f a métrica em M dada por

$$g_f = e^{2f} g.$$

Seja $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado em relação a g, não trivial. O campo ξ é conforme em relação a g_f. De fato, temos

$$L_\xi(g_f) = L_\xi(e^{2f} g) = \xi(e^{2f})g + e^{2f} L_\xi(g) = 2e^{2f}(\xi(f) + \psi)g = 2(\xi(f) + \psi)g_f.$$

Porém, ξ não é fechado em relação a g_f, em geral. De fato, note que, se ω_ξ^f denota a 1-forma dual a ξ em relação a g_f, temos $\omega_\xi^f = e^{2f}\omega_\xi$, de forma que

$$d\omega_\xi^f = d(e^{2f}\omega_\xi) = d(e^{2f}) \wedge \omega_\xi + e^{2f} d\omega_\xi = 2e^{2f} df \wedge \omega_\xi$$

Assim, temos $d\omega_\xi^f = 0$ se, e só se, $df \wedge \omega_\xi = 0$, o que é equivalente a ∇f ser paralelo a ξ em $M' := \{q \in M : \xi(q) \neq 0\}$. Logo, se essa condição for satisfeita, ξ será um campo conforme fechado não trivial em (M, g_f), com fator conforme $\xi(f) + \psi$.

2.2 Variedades kählerianas

Seja M uma variedade diferenciável. Uma *estrutura quasi-complexa* em M é uma aplicação suave $J : TM \to TM$ tal que, para todo $p \in M$, temos $J_p : T_pM \to T_pM$ linear, com $J_p^2 = J_p \circ J_p = -\mathrm{Id}_{T_pM}$. Em particular, note que para M admtir uma estrutura quasi-complexa, a dimensão de M deve ser par. Também, note que podemos interpretar J como o tensor $J : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ definido por $(JX)(p) := J_p(X(p))$.

Se M for uma variedade diferenciável munida de uma quasi-estrutura complexa J, definimos o tensor de Nijenhuis de J como o tensor $N : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$N(X,Y) := [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y].$$

É imediato provar que N é relamente $C^\infty(M)$-linear em X e Y

Seja M^{2n} uma variedade diferenciável. Dada (U, φ) uma carta para M, como $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^{2n}$, usando a identificação natural $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$, dada por $(x_1, y_1, ..., x_n, y_n) \approx (x_1 + iy_1, ..., x_n + iy_n)$,

podemos considerar $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{C}^n$. Um *atlas holomorfo* em M é um atlas $\{(U_i, \varphi_i)\}$ da forma $\varphi_i : U_i \to \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{C}^n$ tal que, se $U_i \cap U_j \neq \varnothing$, então $\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$ é uma aplicação holomorfa em cada variáveis. Cada carta (U_i, φ_i) é dita uma *carta holomorfa* para M. Dois atlas holomorfos $\{(U_i, \varphi_i)\}$ e $\{(U'_j, \varphi'_j)\}$ são ditos *equivalentes* se, sempre que $U_i \cap U'_j \neq \varnothing$, a aplicação $\varphi'_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U'_j) \to \varphi_j(U_i \cap U'_j)$ for holomorfa. É simples mostrar que a equivalência entre atlas holomorfos é uma relação de equivalência. Assim, uma *variedade complexa* é um variedade diferenciável M^{2n} munida de uma classe de equivalência de atlas holomorfos.

Dadas M^{2n} variedade complexa e (U, φ) uma carta holomorfa para M, com

$$\varphi = (x_1, y_1, ..., x_n, y_n),$$

definimos a aplicação $J : TU \to TU$ pondo, para cada $1 \leq i \leq n$,

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i},$$

e estendendo J por linearidade em cada T_pM, com $p \in U$. Note que $J^2 = J \circ J = -\mathrm{Id}_{TU}$. De fato, como provado no capítulo 5 de [9], a aplicação J não depende da escolha de φ, de forma que obtemos uma estrutura quasi-complexa $J : TM \to TM$ em M, dita *canônica* em M. Sempre que considerarmos uma variedade complexa, essa será a estrutura quasi-complexa adotada.

Um cálculo explicito em coordenadas mostra que o tensor de Nijenhuis N de uma variedade complexa é identicamente nulo. Reciprocamente, pode ser mostrado que se o tensor de Nijenhuis de uma variedade quasi-complexa (M^{2n}, J) for identicamente nulo, então M admite uma única estrutura de variedade complexa com estrutura quasi-complexa canônica J.

Agora, dada M uma variedade complexa munida de uma métrica riemanniana g, dizemos que g é uma *métrica hermitiana* se J for ortogonal em relação a g, isto é, se para quaisquer $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, tenhamos

$$g(JX, JY) = g(X, Y).$$

Note que, dada uma métrica riemanniana qualquer g_0 em M, podemos definir uma métrica hermitinana g em M pondo, para $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$,

$$g(X, Y) := g_0(X, Y) + g_0(JX, JY).$$

Uma variedade hermitiana (M, g, J) é uma variedade complexa M, munida de uma métrica hermitiana g e com estrutura quasi-complexa J.

Dada uma *variedade hermitiana* (M,g,J), pondo $\omega(X,Y) := g(JX,Y)$, para $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos que ω é uma 2-forma em M, denominada forma de Kähler de M. De fato, dados $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) = g(J^2X,JY) = -g(X,JY) = -\omega(Y,X).$$

Finalmente, uma *variedade kähleriana* é uma variedade hermitiana (M,g,J) cuja forma de Kähler ω é fechada, isto é, $d\omega = 0$.

O mais simples, e, de fato, o que mais nos interessa, exemplo de variedade kähleriana é o espaço euclidiano complexo $\mathbb{C}^n$, munido da métrica euclidiana g. Nesse caso, a estrutura quasi-complexa J de $\mathbb{C}^n$ é dada por

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial}{\partial y_i} \quad \text{e} \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i},$$

onde $\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}, \frac{\partial}{\partial y_n}$ são os campos canônicos de $\mathbb{C}^n$, de modo que a forma de Kähler é dada por

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dy^i,$$

que é claramente fechada.

Para outros exemplos, veja [9] ou [6].

Para encerrar essa discussão, enunciamos e provamos uma proposição que será necessária no quinto capítulo.

Proposição 2.1. *Seja $(M, g = \langle\cdot,\cdot\rangle, J)$ uma variedade hermitiana com conexão de Levi-Civita ∇. Então M é kähleriana se e, somente se, $\nabla J = 0$, isto é, J é paralelo em relação a ∇.*

Demonstração. Seja ω a forma de Kähler de M. Dados $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, temos

$$d\omega(X,Y,Z) = (\nabla_X\omega)(Y,Z) - (\nabla_Y\omega)(Z,X) + (\nabla_Z\omega)(X,Y).$$

Mas,

$$\begin{aligned}(\nabla_X\omega)(Y,Z) &= X(\omega(Y,Z)) - \omega(\nabla_X Y,Z) - \omega(Y,\nabla_X Z)\\ &= X\langle JY,Z\rangle - \langle J\nabla_X Y,Z\rangle - \langle JY,\nabla_X Z\rangle\\ &= \langle\nabla_X JY,Z\rangle - \langle J\nabla_X Y,Z\rangle = \langle(\nabla_X J)Y,Z\rangle,\end{aligned}$$

logo,

$$d\omega(X,Y,Z) = \langle(\nabla_X J)Y,Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)X,Z\rangle + \langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle. \tag{2.5}$$

Portanto, se $\nabla J = 0$, então $d\omega = 0$ e segue que M é kähleriana.

Reciprocamente, assuma que $d\omega = 0$. Primeiramente, note que $J^2 = -\mathrm{Id}_{TM}$ garante que

$$(\nabla_X J)J + J\nabla_X J = 0. \tag{2.6}$$

Por outro lado, usando a simetria de ∇, temos que o tensor Nijenhuis de M satisfaz

$$\begin{aligned} N(X,Y) &= \nabla_{JX}JY - \nabla_{JY}JX - J(\nabla_{JX}Y - \nabla_Y JX) - J(\nabla_X JY - \nabla_{JY}X) - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= (\nabla_{JX}J)Y - (\nabla_{JY}J)X + J(\nabla_Y J)X - J(\nabla_X J)Y \end{aligned} \tag{2.7}$$

Assim, aplicando sucessivamente (2.5), (2.6), (2.7) e usando o fato de g ser hermitiana e que $d\omega = 0$, temos

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X,Y,Z) - d\omega(JX,JY,Z) \\ &= \langle(\nabla_X J)Y,Z\rangle - \langle(\nabla_Y J)X,Z\rangle + \langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle \\ &- \langle(\nabla_{JX}J)JY,Z\rangle + \langle(\nabla_{JY}J)JX,Z\rangle - \langle(\nabla_Z J)JX,JY\rangle \\ &= \langle -J^2(\nabla_X J)Y,Z\rangle - \langle -J^2(\nabla_Y J)X,Z\rangle + \langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle \\ &+ \langle J(\nabla_{JX}J)Y,Z\rangle - \langle J(\nabla_{JY}J)X,Z\rangle + \langle J(\nabla_Z J)X,JY\rangle \\ &= \langle -J^2(\nabla_X J)Y + J^2(\nabla_Y J)X + J(\nabla_{JX}J)Y - J(\nabla_{JY}J)X,Z\rangle + 2\langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle \\ &= \langle JN(X,Y),Z\rangle + 2\langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle. \end{aligned}$$

Mas, como M é variedade complexa, temos $N \equiv 0$. Portanto, segue da última igualdade acima que

$$\langle(\nabla_Z J)X,Y\rangle = 0,$$

para quaisquer $X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$, e isso equivale a $\nabla J = 0$. □

3 UMA FÓRMULA PARA O VOLUME DAS BOLAS GEODÉSICAS

Sejam $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ uma variedade Riemanniana conexa e completa e $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado não trivial, com pelo menos um ponto singular, e ψ seu fator conforme.

Antes de provar o teorema (3.1), que, dentre outras coisas, descreve uma fórmula para o volume das bolas geodésicas de M centradas num ponto singular de ξ, apresentamos algumas notações que serão usadas de maneira recorrente durante o restante do texto.

Se $n > 2$, já foi discutido que ξ tem singularidades isoladas e ψ não se anula nesses pontos. No caso $n = 2$, tomamos essas afirmações como hipóteses.

Seja $p \in M$ tal que $\xi(p) = 0$. Como $\psi(p) \neq 0$, a menos de trocar ξ por $\psi(p)^{-1}\xi$, podemos supor que $\psi(p) = 1$. Seja $\gamma\colon [0, +\infty) \to M$ uma geodésica normalizada tal que $\gamma(0) = p$. Denotando $\xi(t) = \xi(\gamma(t))$ e $\psi(t) = \psi(\gamma(t))$, temos que

$$\frac{d}{dt}\langle \xi(t), \gamma'(t)\rangle = \langle \nabla_{\gamma'(t)}\xi, \gamma'(t)\rangle = \langle \psi(t)\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = \psi(t);$$

logo, pondo

$$a(t) := \int_0^t \psi(s)ds,$$

segue de $a(0) = 0$ e $\langle \xi(0), \gamma'(0)\rangle = 0$ que $a(t) = \langle \xi(t), \gamma'(t)\rangle$.

A partir daqui, faremos a seguinte hipótese de positividade sobre a: $a(t) \geq 0$ com $a(t) = 0 \iff t = 0$.

Assim, temos

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\langle \xi(t), \xi(t)\rangle &= 2\langle \nabla_{\gamma'(t)}\xi, \xi(t)\rangle \\ &= 2\langle \psi(t)\gamma'(t), \xi(t)\rangle \\ &= 2\psi(t)a(t) = 2a'(t)a(t) = \frac{d}{dt}(a(t)^2),\end{aligned}$$

de sorte que

$$\int_0^t \psi(s)ds = a(t) = |\xi(t)|. \tag{3.1}$$

Mas, da desigualdade de Cauchy-Schwarz segue que

$$a(t) = \langle \xi(t), \gamma'(t)\rangle \leq |\xi(t)||\gamma'(t)| = a(t),$$

logo,

$$\xi(t) = a(t)\gamma'(t). \tag{3.2}$$

Agora, dado $q \in M \setminus \{p\}$, sejam $\gamma : [0,l] \to M$ e $\bar{\gamma} : [0,\bar{l}] \to M$ geodésicas normalizadas tais que $\gamma(0) = \bar{\gamma}(0) = p$ e $\gamma(l) = \bar{\gamma}(\bar{l}) = q$. Da discussão anterior, segue que

$$\bar{a}(\bar{l})\bar{\gamma}'(\bar{l}) = \xi(\bar{\gamma}(\bar{l})) = \xi(q) = \xi(\gamma(l)) = a(l)\gamma'(l),$$

porém, como $\gamma'(l)$ e $\bar{\gamma}'(\bar{l})$ são unitários e $\bar{a}(\bar{l}), a(l) \geq 0$, concluímos que $\bar{a}(\bar{l}) = a(l)$ e, dessa forma, $\gamma'(l) = \bar{\gamma}'(\bar{l})$. Portanto, por unicidade, $\gamma = \bar{\gamma}$. Isso estabelece que, dado qualquer ponto $q \in M \setminus \{p\}$, existe uma única geodésica normalizada ligando p a q, de sorte que a aplicação exponencial $\exp_p : T_pM \to M$ é injetiva. Além disso, dada $\gamma : [0,+\infty) \to M$ geodésica normalizada com $\gamma(0) = p$, como, para todo $l > 0$, $\gamma|_{[0,l]}$ é a única geodésica ligando p a $\gamma(l)$, o teorema de Hopf-Rinow garante que $\gamma|_{[0,l]}$ é minimizante para todo $l \geq 0$; logo, não há pontos conjugados a p ao longo de qualquer geodésica não-trivial partindo de p, o que garante que $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo local. Mas, a completude de M diz que $exp_p : T_pM \to M$ é sobrejetiva, logo, $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo local bijetivo e, portanto, um difeomorfismo.

Enfim, vamos ao teorema desta seção. Para sua prova, será necessária a fórmula da coárea. Veja os teoremas 3.10 e 3.12 de [5] para seu enunciado, demonstração e aplicação usada nesse texto.

Teorema 3.1. *Sejam $(M^n, \langle\cdot,\cdot\rangle, \nabla)$ uma variedade Riemanniana conexa e completa, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado não-trivial, com pelo menos um ponto singular p e fator de conformidade ψ. Se a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não-trivial partindo de p for positiva, então:*

(a) $\exp_p : T_pM \to M$ *é um difeomorfismo e p é o único ponto singular de ξ.*

(b) $\psi(t) = \psi(\gamma(t))$ *e* $|\xi(t)| = |\xi(\gamma(t))|$ *não dependem da geodésica $\gamma : [0,+\infty) \to M$ com $\gamma(0) = p$.*

(c) O volume $v(r)$ da bola geodésica $B(p,r)$, com centro em p e raio r, é dado por

$$v(r) = C\int_0^r |\xi(t)|^{n-1} dt, \tag{3.3}$$

onde C é uma constante positiva que só depende de n.

Demonstração. Segue da discussão anterior que $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo. Além disso, também nas notações da discussão anterior, dada $\gamma : [0,+\infty) \to M$ geodésica normalizada, temos $a(t) > 0$ para $t > 0$. Assim, por (3.2), segue que p é o único ponto singular sobre de ξ sobre γ, logo a completude de M garante que p é o único ponto singular de ξ.

Para o item 2, note que a equação (3.2) e o lema de Gauss garantem que ξ é ortogonal a $S(p,r) = \partial B(p,r)$, para todo $r > 0$. Assim, por (2.2), segue que $\nabla\psi$ também é ortogonal a $S(p,r)$, para todo $r > 0$. Logo, ψ é constante ao longo de cada $S(p,r)$, o que dá cabo da primeira metade do item, já que $\exp_p$ é um difeomorfismo. Além disso, dado $u \in T_qS(p,t)$, temos

$$u(\langle \xi, \xi \rangle) = 2\langle \nabla_u \xi, \xi \rangle = 2\psi \langle u, \xi \rangle = 0,$$

logo, $|\xi|^2$ é constante ao longo de $S(p,r)$, o que termina (b).

Resta provar o item (c). Para isso, considere $\rho : M \to \mathbb{R}$, a função distância até o ponto p. Temos

$$\nabla\rho(\gamma(t)) = \gamma'(t) = \frac{1}{a(t)}\xi(t),$$

para toda geodésica normalizada γ de p e $t > 0$. Assim, se $\hat{\xi} = \frac{\xi}{|\xi|} \in \mathfrak{X}(M \setminus \{p\})$, então

$$\nabla\rho = \hat{\xi}.$$

Calculando o laplaciano de ρ, obtemos

$$\begin{aligned} \Delta\rho &= \operatorname{div}\left(\frac{\xi}{|\xi|}\right) \\ &= \left\langle \nabla\left(\frac{1}{|\xi|}\right), \xi \right\rangle + \frac{1}{|\xi|}\operatorname{div}(\xi) \\ &= -\frac{\psi}{|\xi|^3}\langle \xi, \xi \rangle + \frac{n\psi}{|\xi|} = (n-1)\frac{\psi}{|\xi|}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Dado $q \in M \setminus \{p\}$, seja $\gamma : [0,r] \to M$ a única geodésica normalizada tal que $\gamma(0) = p$ e $\gamma(r) = q$. Por (3.2), segue que a curva integral de ξ partindo de q é $t \mapsto \gamma(f(t))$, onde $t \mapsto f(t)$ é a solução da equação diferencial $f'(t) = a(f(t))$ com $f(0) = r$. De fato, $\gamma(f(0)) = \gamma(r) = q$ e

$$(\gamma \circ f)'(t) = f'(t)\gamma'(f(t)) = a(f(t))\gamma'(f(t)) = \xi(\gamma(f(t))).$$

Agora, se Γ_t é o fluxo de ξ, então, como $\psi(t)$ não depende da geodésica normalizada partindo de p, o mesmo vale para $a(t)$, de forma que $\Gamma_t(B(p,r)) = B(p,f(t))$. Pondo $\sigma(t) =$

$\mathrm{vol}(\Gamma_t(B(p,r)))$, a equação (2.1) dá

$$\begin{aligned}\sigma'(t) &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{\Gamma_{t+s}(B(p,r))} dM \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{\Gamma_t(B(p,r))} \Gamma_s^* dM \\ &= \int_{B(p,f(t))} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \Gamma_s^* dM \\ &= \int_{B(p,f(t))} \Gamma_0^*(L_\xi dM) \\ &= \int_{B(p,f(t))} \mathrm{div}(\xi) dM = \int_{B(p,f(t))} n\psi dM.\end{aligned}$$

Como $v(r) = \mathrm{vol}\, B(p,r)$, temos $\sigma(t) = \mathrm{vol}(\Gamma_t(B(p,r))) = \mathrm{vol}(B(p,f(t))) = v(f(t))$. Assim $\sigma'(t) = v'(f(t))f'(t)$, logo, pondo $r = f(t)$, temos

$$v'(r) = \frac{\sigma'(t)}{f'(t)} = \frac{1}{a(f(t))}\int_{B(p,f(t))} n\psi dM = \frac{1}{|\xi(r)|}\int_{B(p,r)} n\psi dM \geq n\left(\inf_{B(p,f(r))}\psi\right)\frac{v(r)}{|\xi(r)|}.$$

Como $\psi(p) = 1$, aplicando a regra de L'Hôpital à luz de (3.1), temos

$$\lim_{r\to 0+} v'(r) \geq n \lim_{r\to 0+} v'(r).$$

Como $v'(r) \geq 0$, segue que

$$\lim_{r\to 0+} v'(r) = 0.$$

Agora, como $\hat{\xi} = \nabla\rho$ em $M\setminus\{p\}$, se $\hat{\Gamma}_s$ é o fluxo de $\hat{\xi}$ em $M\setminus\{p\}$, temos, para $r > \varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}\int_{B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon)} \Delta\rho dM &= \int_{B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon)} \mathrm{div}(\hat{\xi}) dM = \int_{B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon)} L_{\hat{\xi}} dM \\ &= \int_{B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon)} \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0} \hat{\Gamma}_s^* dM = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon)} \hat{\Gamma}_s^* dM \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{\hat{\Gamma}_s(B(p,r)\setminus B(p,\varepsilon))} dM = \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}\int_{(B(p,r+s)\setminus B(p,\varepsilon+s))} dM \\ &= \left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}(v(r+s) - v(\varepsilon+s)) = v'(r) - v'(\varepsilon).\end{aligned}$$

Fazendo $\varepsilon \to 0^+$, temos

$$v'(r) = \int_{B(p,r)} \Delta\rho dM, \tag{3.5}$$

de sorte que $\Delta\rho$ é integrável em $B(p,r)$.

Afirmo que

$$v'(r) = \int_{S(p,r)} dS_r, \tag{3.6}$$

onde dS_r é a forma de volume de $S(p,r)$. Com efeito: tomando $r > \varepsilon > 0$ e aplicando o teorema da divergência em $\overline{B(p,r)} \setminus B(p,\varepsilon)$, segue que

$$\begin{aligned} v'(r) - v'(\varepsilon) &= \int_{\overline{B(p,r)}\setminus B(p,\varepsilon)} \Delta\rho \, dM \\ &= \int_{S(p,r)} \langle \nabla\rho, \nu \rangle dS_r - \int_{S(p,\varepsilon)} \langle \nabla\rho, \nu \rangle dS_\varepsilon \\ &= \int_{S(p,r)} dS_r - \int_{S(p,\varepsilon)} dS_\varepsilon; \end{aligned}$$

assim, fazendo $\varepsilon \to 0^+$, segue (3.6).

Agora, aplicando a fórmula da coárea em (3.5), aplicando o item (b) e a equação (3.4), obtemos

$$\begin{aligned} v'(r) &= \int_{B(p,r)} \Delta\rho \, dM = \int_{B(p,r)} (n-1)\frac{\psi}{|\xi|} dM = \int_0^r \int_{S(p,t)} (n-1)\frac{\psi}{|\xi|} dS_t dt \\ &= \int_0^r (n-1)\frac{\psi}{|\xi|} \int_{S(p,t)} dS_t dt = \int_0^r (n-1)\frac{\psi}{|\xi|} v'(t) dt. \end{aligned}$$

Pondo $u(r) = v'(r)$, temos $u(r) > 0$ se $r > 0$. Então, a equação anterior se escreve como

$$u(r) = \int_0^r (n-1)\frac{\psi}{|\xi|} u(t) dt.$$

Derivando, temos

$$u'(r) = (n-1)\frac{\psi(r)}{|\xi(r)|} u(r);$$

logo, segue de (3.1) que

$$\frac{d}{dr}\log(u(r)) = \frac{u'(r)}{u(r)} = (n-1)\frac{\psi(r)}{|\xi(r)|} = (n-1)\frac{d}{dr}\log(|\xi(r)|).$$

Integrando em $[\varepsilon, r]$, para $r > \varepsilon > 0$, temos

$$\log\left(\frac{u(r)}{u(\varepsilon)}\right) = (n-1)\log\left(\frac{|\xi(r)|}{|\xi(\varepsilon)|}\right).$$

Portanto, $\frac{u(r)}{|\xi(r)|^{n-1}} = \frac{u(\varepsilon)}{|\xi(\varepsilon)|^{n-1}} =: C$, para quaisquer $r > \varepsilon > 0$ e

$$v'(r) = u(r) = C|\xi(r)|^{n-1}. \tag{3.7}$$

Por fim, integrar v' em $[\varepsilon, t]$ e fazer $\varepsilon \to 0+$, implica a equação (3.3).

□

4 SUPERFÍCIES MUNIDAS DE CAMPOS CONFORMES FECHADOS

Nessa seção estudamos o problema de classificar superfícies riemannians (Σ^2, g, ∇) munidas de um campo conforme fechado não trivial $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com pelo menos um ponto singular $p \in \Sigma$, sob a hipótese que ξ tem seus pontos singulares isolados e que seu fator conforme ψ não se anule nesses pontos a menos de conformidades. Lembre que um difeomorfismo $f : (M, g_M) \to (N, g_N)$ é dito *conforme*, ou uma *conformidade*, se $f^* g_N = \lambda g_M$, para $\lambda \in C^\infty(M)$ positiva.

Como vimos na seção anterior, daí segue que p é o único ponto singular de ξ e $\exp_p : T_p\Sigma \to \Sigma$ é um difeomorfismo. Assuma, sem perda, que $\psi(p) = 1$. Dada uma geodésica normalidaza $\gamma : [0, \infty) \to M$ partindo de p , as funções $\psi(t) = \psi(\gamma(t))$ e $|\xi(t)| = |\xi(\gamma(t))|$ não dependem da escolha de γ, de forma que, ψ e $|\xi|$ são constantes sobre os círculos geodésicos de Σ centrados em p.

Pela equação (2.2), temos, para $t > 0$

$$\begin{aligned} \psi'(t) = \gamma'(t)(\psi) &= \frac{1}{|\xi(t)|}\xi(t)(\psi) \qquad (4.1) \\ &= \frac{1}{|\xi(t)|}\langle \nabla\psi, \xi\rangle(\gamma(t)) = -\frac{1}{|\xi(t)|}\mathrm{Ric}(\xi(t)) \\ &= -\frac{1}{|\xi(t)|}|\xi(t)|^2 K(\gamma(t)) = -|\xi(t)|K(\gamma(t)), \qquad (4.2) \end{aligned}$$

onde K denota a curvatura gaussiana de Σ.

Teorema 4.1. *Seja (Σ^2, g, ∇) uma superfície riemanniana conexa, completa e munida de um campo conforme fechado não trivial $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com pelo menos um ponto singular $p \in \Sigma$ e fator conforme ψ. Suponha que ψ não se anula nos pontos singularesde de ξ. Se a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não trivial partindo de p for positiva, então:*

(a) Se ψ é constante, então Σ é isométrica ao plano euclidiano.

(b) Se $\int_1^\infty \frac{1}{|\xi(t)|}dt = +\infty$, então Σ é conformemente equivalente ao plano euclidiano. Em particular, se ψ é limitada, essa condição é satisfeita.

(c) Se $\int_1^\infty \frac{1}{|\xi(t)|}dt < +\infty$, então Σ é conformemente equivalente ao plano hiperbólico.

Demonstração. Pelo item (a) do teorema (3.1), p é o único ponto singular de ξ e $\exp_p : T_p\Sigma \to \Sigma$ é um difeomorfismo. Assim, se ψ for constante, a equação (4.1) garante que, $K = 0$. Como Σ é completa, flat e simplesmente conexa, segue que Σ é isométrica ao plano euclidiano.

Para os items (b) e (c), considere a função $f:\Sigma\to\mathbb{R}$ dada por

$$f(\gamma(t))=\int_0^t \frac{1-\psi(s)}{|\xi(s)|}ds,$$

onde $\gamma:[0,\infty)\to\Sigma$ é uma geodésica normalizada partindo de p. A boa definição de f vem do fato de $\exp_p: T_p\Sigma\to\Sigma$ ser um difeomorfismo. Note que, por construção, f é constante sobre os círculos geodésicos de Σ centrados em p. Vamos provar que $f\in C^2(\Sigma)$. Para isso, basta mostrar que $F\in C^1([0,\infty))$, onde

$$F(t)=\begin{cases}\frac{1-\psi(t)}{|\xi(t)|},\ \text{se } t>0\\ 0,\ \text{se } t=0\end{cases}.$$

Pela regra de L'Hôpital e da equação (4.1), temos

$$\lim_{t\to 0+}F'(t)=\lim_{t\to 0+}\frac{1-\psi(t)}{|\xi(t)|}=-\lim_{t\to 0+}\frac{\psi'(t)}{\psi(t)}=0,$$

de forma que F é contínua.

Para tanto, aplicando a regra de L'Hôpital várias vezes, lembrando que $\frac{d}{dt}|\xi(t)|=\psi(t)$, para $t>0$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0+}F'(t)&=\lim_{t\to 0+}\left(-\frac{\psi'(t)}{|\xi(t)|}-\frac{(1-\psi(t))\psi(t)}{|\xi(t)|^2}\right)\\ &=-\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\psi''(t)}{\psi(t)}\right)-\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\psi'(t)-2\psi(t)\psi'(t)}{2\psi(t)|\xi(t)|}\right)\\ &=-\psi''(0)-\lim_{t\to 0+}\left(\frac{\psi''(t)-2\psi'(t)^2-2\psi(t)\psi''(t)}{2\psi'(t)|\xi(t)|+2\psi(t)^2}\right)\\ &=-\frac{\psi''(0)}{2}.\end{aligned}$$

Assim, o corolário 6 do capítulo 8 de [8] garante que F é diferenciável em 0, com $F'(0)=\lim_{t\to 0+}F'(t)$, o que garante que $F\in C^1([0,\infty))$.

Agora, como $f(\gamma(t))=\int_0^t F(s)ds$, temos que, para $t>0$, $\nabla f(\gamma(t))=F(t)\gamma'(t)=F(t)\nabla\rho(\gamma(t))$, onde $\rho:\Sigma\to\mathbb{R}$ é a função distância até p. Logo, as equações (4.1) e (3.4) dão,

$$\begin{aligned}\Delta f(\gamma(t))&=F'(t)+F(t)\Delta\rho(\gamma(t)) &(4.3)\\ &=-\frac{\psi'(t)}{|\xi(t)|}-\frac{(1-\psi(t))\psi(t)}{|\xi(t)|^2}+\frac{(1-\psi(t))\psi(t)}{|\xi(t)|}\frac{\psi(t)}{|\xi(t)|}\\ &=-\frac{\psi'(t)}{|\xi(t)|}=K(\gamma(t)) &(4.4)\end{aligned}$$

Assim, considere em Σ a métrica g_f, conforme a g e dada por $g_f = e^{2f}g$, e ponha $\Sigma_f = (\Sigma, g_f)$. Supondo que $\int_1^\infty \frac{1}{|\xi(t)|}dt = +\infty$, temos que Σ_f é completa e flat. De fato, como pode ser verificando usando a proposição 7.30 de [7], se K_f é a curvatura guassiana de Σ_f, temos

$$K_f = e^{-2f}(K - \Delta f) = 0.$$

Para a completude, começe notando que, para $t > 1$,

$$\begin{aligned} f(t) = f(\gamma(t)) &= f(\gamma(1)) + \int_1^t \frac{1-\psi(s)}{|\xi(s)|}ds \\ &= f(\gamma(1)) + \int_1^t \frac{1}{|\xi(s)|}ds - \int_1^t \frac{\psi(s)}{|\xi(s)|}ds \\ &= f(\gamma(1)) + \int_1^t \frac{1}{|\xi(s)|}ds - \int_1^t \frac{d}{ds}(\log(|\xi(s)|))ds \\ &= f(\gamma(1)) + \int_1^t \frac{1}{|\xi(s)|}ds + \log(|\xi(1)|) - \log(|\xi(t)|). \end{aligned}$$

Assim, como $b(t) = \int_1^t \frac{1}{|\xi(s)|}ds$ é não decrescente e $b(1) = 0$, temos

$$\begin{aligned} \int_1^t (g_f(\gamma'(s), \gamma'(s)))^{\frac{1}{2}}ds &= \int_1^t e^{f(s)}(g(\gamma'(s), \gamma'(s)))^{\frac{1}{2}}ds \\ &= e^{f(1)}|\xi(1)| \int_1^t \frac{e^{b(s)}}{|\xi(s)|}ds \\ &\geq e^{f(1)}|\xi(1)|b(t) \end{aligned} \tag{4.5}$$

Como estamos sob a hipótese de $b(t) \to +\infty$, quando $t \to +\infty$, segue que o comprimento de γ em relação a g_f é infinito.

Agora, usando as notações da demonstração do teorema da seção anterior, uma vez que $f(\gamma(t)) = F(t)$, temos $\nabla f(\gamma(t)) = F(t)\nabla\rho(\gamma(t)) = F(t)\hat{\xi}(\gamma(t))$, para $t > 0$ e $\nabla f(p) = 0$. Assim, ∇f e ξ são paralelos em $M' = M \setminus \{p\}$ e, como provado no primeiro capítulo, segue que ξ é conforme fechado em Σ_f.

Dessa forma, se γ_f é uma geodésica normalizada maximal de Σ_f partindo de p, então nossa discussão até o momento nos diz que, para $t > 0$,

$$\gamma_f'(t) = \frac{1}{|\xi(\gamma_f(t))|_f}\xi(\gamma_f(t)) = \frac{1}{e^{f(\gamma_f(t))}|\xi(\gamma_f(t))|}\xi(\gamma_f(t)) = \frac{1}{e^{f(\gamma_f(t))}}\hat{\xi}(\gamma_f(t)),$$

de sorte que γ_f deve ser uma reparamentrização de uma curva integral de $\hat{\xi}$, isto é, uma reparametrização de uma geodésica normalizada de Σ. Portanto, toda $\gamma_f : [0, \infty) \to \Sigma_f$, geodésica normalizada partindo de p, tem comprimento infinito, e o lema da curva divergente garante a completude de Σ_f.

Como Σ_f é simplesmente conexa, completa e flat, Σ_f é isométrica ao plano euclidiano, o que termina a primeira a prova da afirmação do item (b). Caso ψ seja limitada, digamos $|\psi| \leq M$, o teorema do valor médio dá

$$|\xi(t)| = |\xi(t)| - |\xi(0)| \leq \left(\sup_{0 \leq s \leq 1} |\psi(s)| \right) t \leq Mt,$$

logo,

$$\int_1^\infty \frac{1}{|\xi(s)|} ds \geq \int_1^\infty \frac{1}{Mt} dt = +\infty,$$

o que termina (b).

Para (c), se $B := \sup\{b(t) : t > 0\} < +\infty$, então a equação (4.5) dá

$$\int_1^t (g_f(\gamma'(s), \gamma'(s)))^{\frac{1}{2}} ds = |\xi(1)| e^{f(1)} \int_1^t \frac{e^{b(s)}}{|\xi(s)|} ds \leq |\xi(1)| e^{f(1)} B e^B.$$

Dessa forma, cada geodésica normalizada maximal de Σ_f, partindo de p, tem comprimento finito, o qual independe da direção de partida. Digamos que esse comprimento seja r. Como $K_f = 0$ e K_f é simplesmente conexa, temos que Σ_f é isométrica à bola $B(0,r)$ do plano euclidiano. Por sua vez, como $B(0,r)$ é conformemente equivalente ao plano hiperbólico, isso termina a demonstração.

□

Agora, pelas equações (3.7), (4.1), (3.6) e pela fórmula da coárea, temos

$$\int_{B(p,t)} |K| d\Sigma = \int_{B(p,t)} \frac{|\psi'(t)|}{|\xi(t)|} d\Sigma = \int_0^t \frac{|\psi'(r)|}{|\xi(r)|} v'(r) dr \tag{4.6}$$

$$= C \int_0^t |\psi'(r)| dr = C \cdot \mathrm{Var}(\psi; [0,t]), \tag{4.7}$$

onde $\mathrm{Var}(\psi; [0,t])$ denota a variação total de ψ em $[0,t]$.

Vamos usar o teorema de Gauss-Bonnet para determinar a constante C. Para isso, sejam α uma parametrização, por comprimento de arco, do círculo geodésico $S(p,t)$, com a orientação induzida por Σ. Nas notações da prova do teorema 3.1, $\hat{\xi}$ denota o vetor normal a $S(p,t)$ que aponta para fora; portanto, se κ for a curvatura geodésica de α, temos

$$\kappa = \langle \nabla_{\alpha'} \hat{\xi}, \alpha' \rangle = \frac{\psi(t)}{|\xi(t)|}.$$

Assim, por (3.6) e (3.3), temos

$$\int_\alpha \kappa d\alpha = \frac{\psi(t)}{|\xi(t)|} \int_\alpha d\alpha = \frac{\psi(t)}{|\xi(t)|} v'(t) = \frac{\psi(t)}{|\xi(t)|} C |\xi(t)| = C\psi(t).$$

Por Gauss-Bonnet e por um cálculo análogo ao de (4.6), segue que

$$-2\pi + C\psi(t) = -\int_{B(p,t)} K d\Sigma = C(\psi(t) - \psi(0)) = C(\psi(t) - 1),$$

logo, $C = 2\pi$. Logo, a equação (4.6) se reescreve como

$$\int_{B(p,t)} |K| d\Sigma = 2\pi \operatorname{Var}(\psi; [0,t]). \tag{4.8}$$

Encerramos esse capítulo com o seguinte resultado.

Teorema 4.2. *Seja $(\Sigma^2, g = \langle \cdot, \cdot \rangle)$ uma superfície riemanniana conexa, completa e munida de um campo conforme fechado não trivial $\xi \in \mathfrak{X}(\Sigma)$ com pelo menos um ponto singular $p \in \Sigma$ e fator conforme ψ. Suponha que ψ não se anule nos pontos singulares de ξ. Se a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não trivial partindo de p for positiva, então:*

(a) Σ tem curvatura total finita se, e só se, $\psi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ é de variação limitada.

(b) Se Σ é uma superfíce de Hadamard, isto é, se a curvatura gaussiana K de Σ for não positiva, então Σ tem curvatura total finita, se e só se, ψ é limitada.

Demonstração. O item (a) segue ao tomar $t \to +\infty$ na equação (4.8). Para (b), note que a equação (4.1) dá

$$\psi'(t) = -|\xi(t)| K(\gamma(t)) \geq 0.$$

Logo,

$$\operatorname{Var}(\psi, [0,\infty)) = \int_0^\infty |\psi'(t)| dt = \int_0^\infty \psi'(t) dt = \lim_{t \to +\infty} \psi(t) - 1,$$

e o resto segue do item (a). □

5 PRESCREVENDO O FATOR CONFORME

Nesta seção, veremos que há certa liberdade para construir exemplos de variedades completas que admitem um campo conforme fechado ξ com exatamente um ponto singular e com fator conforme ψ prescrito. Além disso, provaremos que esses exemplos caracterizam tal classe de variedades.

Dadas duas variedades riemannianas (M, g_M) e (N, g_N) e $a : M \to (0, \infty)$ uma função suave, o *produto warped de M e N, com função warping a,* é a variedade riemanniana $M \times_a N = (M \times N, \tilde{g_a})$, em que a métrica $\tilde{g_a}$ é dada por

$$\tilde{g_a} := \pi_M^* g_M + \tilde{a}^2 \pi_N^* g_N,$$

π_M e π_N são as projeções de $M \times_a N$ sobre M e N, respectivamente, e $\tilde{a} := a \circ \pi_M$.

Uma vez que $M \times_a N$ tem como estrutura variedade diferenciável a estrutura produto de $M \times N$, temos uma decomposição para os campos tangentes a $M \times_a N$ dada por

$$\mathfrak{X}(M \times_a N) = \mathfrak{X}(M) \oplus \mathfrak{X}(N).$$

Assim, dados $X, V \in \mathfrak{X}(M \times_a N)$, se $X \in \mathfrak{X}(M)$, então X é dito *campo horizontal*, e, se $V \in \mathfrak{X}(N)$, então V é dito *campo vertical*. Dados X e V campos horizontal e vertical, respectivamente, dizemos que X é um *levantamento horizontal* se X é π_M-relacionado a um campo vetorial em $X_* \in \mathfrak{X}(M)$ e V é um *levantamento vertical* se X é π_N-relacionado a um campo vetorial em $V_* \in \mathfrak{X}(N)$.

Denotando por ∇ e ∇^M a conexão de Levi-Civita de $M \times_a N$ e M, respectivamente, dados $X \in \mathfrak{X}(M \times_a N)$ levantamento horizontal e $V \in \mathfrak{X}(M \times_a N)$ um levantamento vertical, temos, nas notações acima, que $\nabla_X Y$ é levantamente horizontal, $\nabla_X Y$ é π_M-relacionado a $\nabla^M_X Y$ e

$$\nabla_V X = \frac{X(\tilde{a})}{\tilde{a}} V. \tag{5.1}$$

Para a prova dessas, e outras, propriedades, veja a seção 9.3 de [9].

Tendo as notações e propriedades acima estabelecidades, vamos ao nosso caso de interesse.

Dado o intervalo $(0, +\infty) \subset \mathbb{R}$ com métrica canônica dt^2, a esfera redonda $(\mathbb{S}^{n-1}, ds^2)$ e uma função $a : I \to (0, \infty)$, consideramos o produto warped $(0, +\infty) \times_a \mathbb{S}^{n-1}$. Afirmamos que o campo horizontal $\tilde{a}\tilde{\partial}_t$ é um campo conforme fechado sem pontos singulares, com fator conforme $a' \circ \pi_{(0,+\infty)}$; em que $\tilde{\partial}_t$ denota o levantamento horizontal, por $\pi_{(0,+\infty)}$, do campo canônico ∂_t em $(0, \infty)$.

De fato, denotando, por simplicidade, $a' \circ \pi_{(0,+\infty)}$ por a', $\tilde{a}$ por a e $\tilde{\partial}_t$ por ∂_t, temos

$$\nabla_{\partial_t}(a\partial_t) = \partial_t(a)\partial_t + a\nabla_{\partial_t}\partial_t = a'\partial_t,$$

pois $\nabla^{(0,+\infty)}_{\partial_t}\partial_t = 0$. Além disso, a equação (5.1) garante que, se $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-1})$ é um levantamento vertical,

$$\nabla_V(a\partial_t) = \frac{a\partial_t(a)}{a}V = a'V.$$

Como $\pi_{\mathbb{S}^{n-1}} : M \times_a N \to N$ é uma submersão, temos que, para todo vetor vertical $v \in T_q\mathbb{S}^{n-1}$, existe um $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^{n-1})$ levantamento vertical tal que $V(q) = v$. Logo, a tensorialidade de ∇ na primeira entrada e as duas equação anteriores provam a afirmação.

Agora, fixe $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, suave com $\psi(0) = 1$, e defina $a(t) := \int_0^t \psi(s)ds$, de modo que a é suave, com $a(0) = 0$ e $\lim_{t\to 0+} \frac{a(t)}{t} = a'(0) = \psi(0) = 1$. Suponha, adicionalmente, que $a(t) > 0$ sempre que $t > 0$.

Para produzir os exemplos desejados, considere o difeomorfismo $\Phi : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to (0,\infty) \times \mathbb{S}^{n-1}$ dada por $\Phi(p) = (|p|, \frac{p}{|p|})$ e a métrica g_a dada por $g_a := \Phi^* \tilde{g}_a$, temos que

$$\Phi : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_a) \to (0,+\infty) \times_a \mathbb{S}^{n-1}$$

é uma isometria.

Primeiramente, vamos mostrar que g_a se estende suavemente a uma métrica riemanniana completa em $\mathbb{R}^n$.

Um cálculo direto permite verificar que a métrica g_a é dada por

$$(g_a)_p(u,v) = \frac{\langle u,p\rangle\langle v,p\rangle}{|p|^2} + a(|p|)^2\left(\frac{\langle u,v\rangle}{|p|^2} - \frac{\langle u,p\rangle\langle v,p\rangle}{|p|^4}\right). \tag{5.2}$$

para $p \neq 0$ e $u, v \in T_p\mathbb{R}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Para a completude, suponha, por ora, que g_a se estende suavemente a uma métrica riemanniana em $\mathbb{R}^n$. Seja $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^n$ uma curva divergente, isto é, tal que $|\gamma(t)| \to +\infty$ quando $t \to +\infty$. Sem perda, assuma que $|\gamma(t)| \geq 1$, para todo $t \geq 0$. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz em 5.2, temos

$$g_a(\gamma'(t),\gamma'(t)) \geq \frac{\langle \gamma'(t),\gamma(t)\rangle^2}{|\gamma(t)|^2},$$

logo,

$$\int_0^\infty \sqrt{g_a(\gamma'(t),\gamma'(t))}dt \geq \int_0^\infty \frac{\langle \gamma'(t),\gamma(t)\rangle}{|\gamma(t)|}dt = l(\beta),$$

onde $l(\cdot)$ é o comprimento em relação à métrica euclidiana e $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ é a curva dada por $\beta(t) = |\gamma(t)|u$, para um vetor fixado $u \in \mathbb{R}^n$, com $|u| = 1$.

Como a divergência de γ garante a de β, 0 pelo lema da curva divergente dá $l(\beta) = +\infty$. Assim, o comprimento de γ em relação a g_a é infinito e, de novo do lema da curva divergente, segue que $(\mathbb{R}^n, g_a)$ é completa.

Para o que falta, note que a equação (5.2) dá

$$(g_a)_p(u,v) = \left(\frac{a(|p|)}{|p|}\right)^2 \langle u,v\rangle + \frac{\langle u,p\rangle\langle v,p\rangle}{|p|^2}\left(1 - \left(\frac{a(|p|)}{|p|}\right)^2\right). \tag{5.3}$$

para $p \neq 0$ e $u, v \in \mathbb{R}^n$.

Por Cauchy-Schwarz, temos $\frac{\langle u,p\rangle\langle v,p\rangle}{|p|^2} \leq |u||v|$. Como $\lim_{t\to 0+} \frac{a(t)}{t} = 1$, temos

$$(g_a)_p(u,v) \to \langle u,v\rangle \quad \text{quando} \quad p \to 0.$$

Assim, basta provar que g_a é suave em $p = 0$, pondo $(g_a)_p = \langle\cdot,\cdot\rangle$.

Para tanto, precisamos de uma hipótese adicional. Seja $\psi_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $\psi_0(t) = \psi(|t|)$, denominada a extensão par de ψ.

Suponha que ψ_0 seja suave. Note que, como ψ_0 é par, temos $\psi_0'(0) = 0$. Defina $a_0(t) := \int_0^t \psi_0(s)ds$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$. Temos que a_0 é suave, ímpar e $a_0'(0) = \psi_0(0) = 1$. O Teorema Fundamental do Cálculo dá

$$a_0(t) = \int_0^t a_0'(s)ds = t\underbrace{\int_0^1 a_0'(ts)ds}_{:=a_1(t)}. \tag{5.4}$$

Logo, a_1 é suave, par e tal que

$$a_1(t) = \begin{cases} \frac{a_0(t)}{t}, \text{ se } t \neq 0 \\ 1, \text{ se } t = 0 \end{cases}.$$

Precisamos, agora, do seguinte lema.

Lema 5.1. *Seja $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função suave e par. Então, existe $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ suave, tal que $\alpha(t) = \beta(t^2)$ para todo $t \geq 0$.*

Demonstração. Primeiro, provaremos por indução, a seguinte afirmação: se $f : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ é suave em $(0,\infty)$ e de classe C^k em $[0,\infty)$, com $k \geq 0$, então a função $t \mapsto tf(t)$ é de classe C^{k+1} em $[0,\infty)$.

Para $k = 0$, temos

$$\frac{d}{dt}(tf(t))\bigg|_{t=0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{tf(t)}{t} = f(0),$$

de forma que o corolário 6 do capítulo 8 de [8] garante que $t \mapsto tf(t)$ é C^1 em $[0,\infty)$.

Supondo válida a afirmação para um dado $k \geq 0$, se f é suave em $(0,\infty)$ e de classe C^{k+1} em $[0,\infty)$, temos $t \to tf(t)$ de classe C^{k+1} em $[0,\infty)$. Além disso, temos

$$\frac{d}{dt}(tf(t)) = f(t) + tf'(t).$$

Uma vez que f' é de classe C^k em $[0,\infty)$, segue da hipótese de indução que $t \to tf(t)$ é de classe C^{k+2} em $[0,\infty)$; encerrando a prova da afirmação.

Agora, a paridade de α diz que $\alpha'(0) = 0$. O Teorema de Fundamental do Cálculo, aplicado duas vezes, dá

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t\int_0^1 \alpha'(tu)du = \alpha(0) + t^2 \underbrace{\int_0^1\int_0^1 u\alpha''(tuv)dudv}_{h(t):=}.$$

Assim, h é suave em $[0,\infty)$ e par. Daí, para $t \geq 0$,

$$\alpha(\sqrt{t}) = \alpha(0) + th(\sqrt{t}).$$

Novamente raciocinando por indução, a afirmação inicial da demonstração e a equação anterior garantem que $t \mapsto th(\sqrt{t})$ é suave em $[0,\infty)$. Portanto, basta tomar $\beta(t) := \alpha(\sqrt{t})$, para todo $t \geq 0$. □

Assim, aplicando o lema precedente à função $\alpha = a_1$, a expressão (5.3) garante que

$$(g_a)_p(u,v) = \beta(|p|^2)\langle u,v\rangle + \langle u,p\rangle\langle v,p\rangle(1+\beta(|p|^2))\left(\frac{1-\beta(|p|^2)}{|p|^2}\right),$$

para todo $p \in \mathbb{R}^n$ e $u,v \in \mathbb{R}^n$.

Argumentando como em (5.4), prova-se que $t \mapsto \frac{1-\beta(t)}{t}$ é suave, posto seu valor em $t = 0$ como $-\beta'(0)$. Portanto, segue que g_a é suave em todo $\mathbb{R}^n$.

Note, além disso, que o campo ξ em $\mathbb{R}^n$, definido por

$$\xi(p) = \begin{cases} a(|p|)\frac{p}{|p|}, \text{ se } p \neq 0 \\ 0, \text{ se } p = 0 \end{cases}$$

é suave, pois $\xi(p) = \beta(|p|^2)p$, para todo $p \in \mathbb{R}^n$, e ξ é conforme fechado em $\mathbb{R}^n$, pois já o era em $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, g_a)$, devido à isometria Φ.

Em resumo, a discussão desta seção até o momento provou o seguinte resultado.

Teorema 5.1. *Sejam $\psi : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $\psi(0) = 1$ e $a : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ dada por $a(t) = \int_0^t \psi(s)ds$. Se a extensão par de ψ for suave e $a(t) > 0$ para $t > 0$, então $\mathbb{R}^n$ pode ser munido de uma métrica riemanniana g_a satisfazendo as seguintes condições:*

(a) $(\mathbb{R}^n, g_a)$ é completa.

(b) O campo vetorial ξ em $\mathbb{R}^n$, dado por

$$\xi(p) = \begin{cases} a(|p|)\frac{p}{|p|}, \text{ se } p \neq 0 \\ 0, \text{ se } p = 0 \end{cases},$$

é conforme fechado, com fator conforme ψ e 0 é seu único ponto singular.

De fato, vamos provar que a família de variedades construídas no teorema anterior dá todos os exemplos de variedades completas munidas de um campo conforme fechado ξ, com exatamente um ponto singular $p \in M$, fator conforme ψ tal que $\psi(p) = 1$ a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não-trivial partindo de p é positiva.

Primeiro, note que o teorema 3.1 garante que ψ e $|\xi|$ são constantes em cada esfera geodésica $S(p,t)$. Denote o valor de ψ sobre $S(p,t)$ por $\psi(t)$, como anteriormente. Vamos mostrar que ψ tem extensão par suave.

Para isso, tome $v \in T_pM$ unitário e seja $\gamma_v : \mathbb{R} \to M$ a geodésica de M com $\gamma_v(0) = p$ e $\gamma_v'(0) = v$. Defina $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt}\langle \xi(\gamma_v(t)), \gamma_v'(t)\rangle.$$

É claro que Ψ é suave e $\Psi(t) = \psi(t)$, para $t \geq 0$. Note que a equação 3.1 assegura que $\Psi(t) = |\xi(\gamma_v(t))|$. Ademais, como

$$\begin{aligned} \Psi(-t) &= -\frac{d}{dt}\langle \xi(\gamma_v(-t)), \gamma_v'(-t)\rangle = \frac{d}{dt}\langle \xi(\gamma_{-v}(t)), \gamma_{-v}'(t)\rangle \\ &= \frac{d}{dt}|\xi(\gamma_{-v}(t))| = \frac{d}{dt}|\xi(\gamma_v(t))| = \Psi(t) = \psi(t), \end{aligned}$$

a extensão par de ψ é Ψ, portanto, suave.

Agora, vamos à classificação.

Teorema 5.2. *Sejam $(M^n, g = \langle\cdot,\cdot\rangle)$ uma variedade Riemanniana conexa e completa, $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ um campo conforme fechado não-trivial, com pelo menos um ponto singular $p \in M$, e fator conforme ψ tal que $\psi(p) = 1$. Se a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não-trivial partindo de p for positiva, então, (M^n, g) é isómetrica a $(\mathbb{R}^n, g_a)$, onde $a(t) = \int_0^t \psi(s)ds$.*

Demonstração. Da discussão anteior, segue que $\psi(t)$ tem extensão par suave. Segue, do teorema 3.1, que $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo. Logo, $\tilde{g} := (\exp_p)^* g$ é uma métrica riemanniana em T_pM.

Se γ for uma geodésica normalizada partindo de p, temos por (2.2) e (3.1), que, para $t > 0$,

$$\mathrm{Ric}(\hat{\xi})(\gamma(t)) = -\frac{1}{|\xi(t)|^2}\langle \nabla\psi(\gamma(t)), \xi(t)\rangle = -\frac{1}{|\xi(t)|}\langle \nabla\psi(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = -\frac{\psi'(t)}{a(t)}.$$

Assim, $\mathrm{Ric}(\hat{\xi})$ também não depende de γ e, como anteriormente,

$$\lim_{t\to 0+} \mathrm{Ric}(\hat{\xi})(\gamma(t)) = \lim_{t\to 0+} -\frac{\psi'(t)}{|\xi(t)|} = -\psi''(0).$$

Agora, para $t > 0$, tomando um campo $t \mapsto w(t) \in T_{\gamma(t)}M$ ao longo de γ tal que $\langle w, \hat{\xi}\rangle = 0$ e $|w| = 1$ e denotando por $K(w, \hat{\xi})$ a curvatura seccional do plano gerado por w e $\hat{\xi}$, temos, por (2.4),

$$\begin{aligned} K(w,\hat{\xi}) &= \langle R(w,\hat{\xi})\hat{\xi}, w\rangle = \frac{1}{|\xi|^2}\langle R(w,\xi)\xi, w\rangle \\ &= -\frac{1}{|\xi|^4}\mathrm{Ric}(\xi)(\langle w,\xi\rangle^2 - \langle \xi,\xi\rangle\langle w,w\rangle) \\ &= \frac{1}{|\xi|^2}\mathrm{Ric}(\xi) = \mathrm{Ric}(\hat{\xi}). \end{aligned}$$

Assim, sendo $k(t) = K(w(t), \gamma'(t)) = \mathrm{Ric}(\gamma'(t))$, para $t > 0$, temos que k não depende γ e, pondo $k(0) = -\psi''(0)$, temos que k é contínua em 0. Novamente por (2.4), temos, para $X \in \mathfrak{X}(M)$,

$$R(X,\gamma')\gamma' = -k(\langle X,\gamma'\rangle\gamma' - \langle \gamma',\gamma'\rangle X) = -k(\langle X,\gamma'\rangle\gamma' - X). \tag{5.5}$$

Dessa forma, afirmamos que o campo de Jacobi X ao longo de γ tal que $X(0) = 0$ e e $X'(0) = w \in T_pM$, com $w \perp \gamma'(0)$, é dado por $X(t) = a(t)w(t)$, onde $w(t)$ é o campo paralelo ao longo de γ tal que $w(0) = w$. De fato, temos $X(0) = a(0)w(0) = 0$, $X'(0) = a'(0)w(0) = \psi(0)w = w$ e, por (5.5),

$$X'' + R(X,\gamma')\gamma' = a''w - k(a\underbrace{\langle w,\gamma'\rangle}_{=0}\gamma' - aw) = (a'' + ka)w = \left(\psi' - \frac{\psi'}{a}a\right)w = 0.$$

Mas, como $X(t) = d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw)$, temos

$$d(\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tw) = a(t)w(t). \tag{5.6}$$

Assim, dados $v \in T_pM$ unitário, $t > 0$ e $u, w \in T_pM$ não nulos com $u, w \perp v$, se $u(t)$ e $w(t)$ denotam os transportes paralelos de u e w, respectivamente, ao longo de $t \mapsto \exp_p(tv)$, temos

$$\langle d(\exp_p)_{tv}(u), d(\exp_p)_{tv}(w)\rangle = t^{-2}a(t)^2\langle u(t), w(t)\rangle = t^{-2}a(t)^2\langle u, w\rangle_p.$$

Além disso, o lema de Gauss assegura que,

$$\langle d(\exp_p)_{tv}(v), d(\exp_p)_{tv}(w)\rangle = t^{-2}a(t)\langle \gamma'(t), w(t)\rangle = 0 = \langle v, w\rangle_p.$$

Por fim, identificando $\mathbb{R}^n$ com a métrica euclidiana com $(T_pM, \langle\cdot,\cdot\rangle_p)$ e considerando o difeomorfismo $\Phi^{-1} : (0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1} \to \mathbb{R}^n$ dado por $\Phi^{-1}(t,x) = tx$, temos

$$(\Phi^{-1})^*\tilde{g} = (\Phi^{-1})^*(\exp_p)^*g = dt^2 + a(t)^2 ds^2_{n-1} = \tilde{g_a} = (\Phi^{-1})^* g_a,$$

em $(0,\infty)\times\mathbb{S}^{n-1}$, logo, por continuidade, segue que $\tilde{g} = g_a$ em $\mathbb{R}^n$ e, portanto,

$$\exp_p : (\mathbb{R}^n, g_a) \to (M, g) \tag{5.7}$$

é uma isometria. □

6 VARIEDADES DE KÄHLER MUNIDAS DE CAMPOS CONFORMES FECHADOS

Vamos mostrar, neste último capítulo que, no contexto de variedades kählerianas, há essencialmente apenas um exemplo de variedade satisfazendo às hipóteses estudadas nesse texto.

Teorema 6.1. *Seja $(M^{2n}, g = \langle,\rangle, J)$, com $n > 1$, uma variedade kähleriana conexa, completa, munida de um campo conforme fechado $\xi \in \mathfrak{X}(M)$ não trivial e que possui pelo menos um ponto singular $p \in M$. Sendo ψ o fator de conformidade ξ, suponha que a integral de ψ ao longo de qualquer geodésica não trivial partindo de p seja positiva. Então, M é isométrica a $\mathbb{C}^n$.*

Demonstração. Vimos no terceiro capítulo que p é o único ponto singular de ξ e que $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo. Além disso, também vimos que as funções $\psi(t) = \psi(\gamma(t))$ e $|\xi(t)| = |\xi(\gamma(t))|$ não dependem da escolha da geodésica normalizada γ partindo de p, de modo que ψ e $|\xi|$ são constantes sobre as esferas geodésicas de M centradas em p. Também, temos $\psi(p) \neq 0$, logo, podemos supor, sem perda, que $\psi(p) = 1$.

Do teorema 5.2 segue que (M, g) é isométrica a $(\mathbb{R}^{2n}, g_a)$, onde $a(t) = \int_0^t \psi(s)ds$. Então, a identificação $\mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$ garante que, (M, g) é isométrica a $(\mathbb{C}^n, g_a)$. Uma vez que o campo $\tilde{\xi}(p) = p$ é conforme fechado em relação à métrica euclidiana g_e em $\mathbb{C}^n$, o teorema 5.2 também garante que g_e é dada pela extensão da métrica $g_t = dt^2 + t^2 ds^2_{2n-1}$ em $[0,\infty) \times S^{n-1} \approx \mathbb{R}^{2n} \approx \mathbb{C}^n$. Logo, basta mostrar que $a(t) = t$, para todo $t > 0$, para concluir que $\exp_p : (\mathbb{C}^n, g_e) \to (M, g)$ é uma isometria.

Sejam ω a forma kähleriana de M e $v = \gamma'(0)$. Como, por hipótese, $2n > 2$, tome $u_1 \in T_pM \setminus \{0\}$ tal que $u_1, Ju_1 \perp v$ e ponha $u_2 = Ju_1$. Sejam X_1 e X_2 os campos de Jacobi ao longo de γ, tais que $X_1(0) = 0$, $X_1'(0) = u_1$ e $X_2(0) = 0$, $X_2'(0) = u_2$.

Sejam ω_0 a forma kähleriana de $(T_pM, \langle,\rangle_p, J_p)$ e $u_j(t)$ o transporte paralelo de u_j ao longo de γ, para $j = 1, 2$. O paralelismo de J e (5.6) garantem que,

$$\begin{aligned}((\exp_p)^*_{tv}\omega)(tu_1, tu_2) &= \omega(d(\exp_p)_{tv}(tu_1), d(\exp_p)_{tv}(tu_2)) = \omega(X_1(t), X_2(t)) \\ &= \langle JX_1(t), X_2(t)\rangle = (a(t))^2\langle Ju_1(t), u_2(t)\rangle = (a(t))^2\langle Ju_1, u_2\rangle_p \\ &= (a(t))^2\omega_0(u_1, u_2).\end{aligned}$$

Similarmente, para $i, j \in \{1, 2\}$ distintos, temos

$$\begin{aligned}((\exp_p)^*_{tu_i}\omega)(tv, tu_j) &= \omega(d(\exp_p)_{tu_i}(tv), d(\exp_p)_{tu_i}(tu_j)) = \omega(t\gamma'(t), X_j(t)) \\ &= a(t)\langle tJ(\gamma'(t)), u_j(t)\rangle = ta(t)\langle Jv, u_j\rangle = -ta(t)\langle v, Ju_j\rangle_p = 0.\end{aligned}$$

Agora, defina $\varphi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ por $\varphi(0) = 1$ e $\varphi(t) = a(t)^2 t^{-2}$. A regra de L'Hôpital garante que φ é contínua em 0. Além disso, se $\mu : T_pM \to \mathbb{R}$ for dada por $\mu(tv) = \varphi(t)$, onde $t \geq 0$ e $v \in T_pM$ é unitário, temos que μ é contínua e, para $t > 0$,

$$((\exp_p)_{tv}^* \omega)(u_1, u_2) = \mu(tv)\omega_0(u_1, u_2).$$

Como $d((\exp_p)_{tv}^* \omega) = (\exp_p)_{tv}^* d\omega = 0$, temos, para $t > 0$,

$$\begin{aligned} 0 &= d((\exp_p)_{tv}^* \omega)(v, u_1, u_2) \\ &= v((\exp_p)_{tv}^* \omega(u_1, u_2)) - u_1((\exp_p)_{tu_1}^* \omega(v, u_2)) + u_2((\exp_p)_{tu_2}^* \omega(v, u_1)) \\ &= v(\mu(tv)\omega_0(u_1, u_2)) = d\mu_{tv}(v)\langle Ju_1, u_2\rangle = \varphi'(t)\langle Ju_1, Ju_1\rangle = \varphi'(t)|Ju_1|^2. \end{aligned}$$

Logo, $\varphi'(t) = 0$, para $t > 0$, de modo que $\varphi(t) = 1$, para $t \geq 0$, assim como $\mu \equiv 1$. Mas, por hipótese, $a(t) > 0$ para $t > 0$, de sorte que

$$1 = \mu(tv) = \left(\frac{a(t)}{t}\right)^2,$$

garante que $a(t) = t$, para $t \geq 0$, como queríamos demonstrar. □

Um variedade rimemanniana N é uma *variedade de Sasaki* se o cone sobre N, definido como o produto warped

$$\tilde{N} := (0,\infty) \times_t N,$$

admitir uma estrutura de variedade kähleriana. Em particular, a dimensão de N deve ser ímpar.

Seja N^{2n-1} uma variedade de Sasaki. Dizemos que o cone $\tilde{N}$ tem uma *singularidade removível* se, dado um símbolo $p \notin \tilde{N}$, o conjunto $M := \tilde{N} \cup \{p\}$, munido da topologia determinada pela bijeção natural entre M e o espaço quociente

$$\frac{[0,\infty) \times \tilde{N}}{\{0\} \times \tilde{N}},$$

tiver uma estrutura de variedade kähleriana completa cuja métrica e estrutura complexa estendam as de $\tilde{N}$ e, além disso, tal que o campo conforme fechado $t\tilde{\partial}_t$ de $\tilde{N}$ também se estenda a um campo conforme fechado $\xi \in \mathfrak{X}(M)$.

Corolário 6.1. *Se N for uma variedade de Sasaki de dimensão $2n-1$, com $n > 1$, tal que o cone kähleriano $(0,\infty) \times_t N$ tenha singularidade removível, então N é isométrica à esfera redonda $\mathbb{S}^{2n-1}$.*

Demonstração. Seja $M = \tilde{N} \cup \{p\}$, como anteriormente. É claro que $\xi(p) = 0$. Portanto, como o fator conforme de ξ é identicamente 1, o teorema anteior garante que $\exp_p : \mathbb{C}^n \approx T_pM \to M$ é uma isometria. Então, após restricões, uma vez que $M \setminus \{p\}$ é isométrica a $\tilde{N}$, obtemos a isometria

$$\exp_p|_{\mathbb{S}^{2n-1}} : \mathbb{S}^{2n-1} \to \{1\} \times_t N \approx N.$$

□

7 CONCLUSÃO

Nesse trabalho, foram apresentadas várias consequências da existência de um campo conforme fechado não trivial ξ definido em uma variedade riemanniana completa(M,g). Vimos que a hipótese de que ξ tenha pelo menos um ponto singular p e que seu fator conforme ψ tenha integral positiva sobre qualquer geodésica não trivial partindo de p, dá origem a vários resultados interessantes, mesmo sendo uma hipótese relativamente fraca. Em especial, o teorema 6.1 e corolário 6.1 dão uma resposta satisfatória à questão de classificar as variedades de Sasaki cujo cone kähleriano tenha uma singularidade removível. Essa questão, e outras de cunho semelhante, vêm sendo exploradas desde [2]. Além disso, foi provada uma caracterização, a menos de isometrias, para tal classe de variedades e, para o caso de superfícies riemannianas, foi provado que tais variedades são conformemente equivalentes ao plano euclidiano ou ao plano hiperbólico.

REFERÊNCIAS

[1] ALÍAS, Luis J.; CAMINHA, A.; NASCIMENTO, F. Y. do. On complete kählerian manifolds endowed with closed conformal vector fields. **Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Serie A. Matemáticas**. v. 117, n. 127, p. 1–8, 2023.

[2] CAMINHA, A. A rigidity result for kählerian manifolds endowed with closed conformal vector fields. **Rev. de la UMA**. v. 60, n. 2, p. 469–484, 2019.

[3] CAMINHA, A.; NASCIMENTO, F. Y. do. **On closed conformal vector fields with singularities**. *[S. l.]*, 2024. Não publicado.

[4] CARMO, Manfredo P. do. **Geometria Riemanniana**, 6. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2019.

[5] EVANS, Lawrence C. **Measure theory and fine properties of functions**. *[S. l.]*: Routledge, 2015.

[6] LEE, John M. **Introduction to Complex Manifolds**. American Mathematical Society, 2024.

[7] LEE, John M. **Introduction to Riemannian Manifolds**, 2. ed. *[S. l.]*: Springer, 2018.

[8] LIMA, Elon Lages. **Curso de Análise, vol 1**, 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.

[9] MUNIZ NETO, A. Caminha. **Tópicos de Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2014.

[10] OBATA, Morio. The conjectures on conformal transformations of riemannian manifolds. **Journal Differential Geometry**. v. 6, n. 2, p. 247–258, 1971.

[11] ROS, A.; URBANO, F. Lagrangian submanifolds of cn with conformal maslov form and the whitney sphere. **Journal of the Mathematical Society of Japan**. v. 50, n. 1, p. 203–226, 1998.

[12] TANNO, S.; WEBER, Waldemar C. Closed conformal vector fields. **Journal of Differential Geometry**. v. 3, n. 3-4, p. 361–366, 1969.