



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

RODRIGO FERNANDES RIBEIRO

**LIMITANTES PARA O NÚMERO DE COLORAÇÕES DAS ARESTAS DE K_n QUE
NÃO POSSUEM UM K_4 -RAINBOW**

FORTALEZA

2025

RODRIGO FERNANDES RIBEIRO

LIMITANTES PARA O NÚMERO DE COLORAÇÕES DAS ARESTAS DE K_n QUE NÃO
POSSUEM UM K_4 -RAINBOW

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Orientador: Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides.

FORTALEZA

2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

R3721 Ribeiro, Rodrigo Fernandes.

Limitantes para o número de colorações das arestas de K_n que não possuem um K_4 -Rainbow / Rodrigo Fernandes Ribeiro. – 2025.
66 f. : il. color.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2025.

Orientação: Prof. Dr. Fabricio Siqueira Benevides.

1. Teoria dos grafos. 2. Combinatória extremal. 3. Contagem. 4. Colorações de Gallai. I. Título.

CDD 510

RODRIGO FERNANDES RIBEIRO

LIMITANTES PARA O NÚMERO DE COLORAÇÕES DAS ARESTAS DE K_n QUE NÃO
POSSUEM UM K_4 -RAINBOW

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Combinatória.

Aprovada em: 23/01/2025.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Fabrício Siqueira Benevides (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Luiz Paulo Freire Moreira
Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)

Prof. Dr. Walner Mendonça dos Santos
Universidade Federal do Ceará (UFC)

À minha filha Aylee,
— que é a luz que ilumina meu viver.
e à minha esposa Cleane,
— a quem amo profunda e intensamente.

AGRADECIMENTOS

À Cleane, minha esposa, companheira de todos as horas e mãe exemplar, por toda paciência e compreensão durante todos esses anos, sempre como um pilar de nossa família, fundamental para este e todos os outros momentos de minha vida. À minha filha, maior amor meu e de minha esposa, por todo carinho diário que ela nos dá e o orgulho que ela é e que será durante toda vida para nós. Essa vitória é compartilhada com minha cōnjuge e minha primogênita.

Aos meus pais, pela criação exemplar, o suporte emocional e financeiro durante a vida inteira e a dedicação que sempre tiveram a mim e ao meu irmão desde nosso nascimento até hoje, meu irmão que aproveito para agradecer pela revisão de meu texto, pelo contínuo incentivo acadêmico e por ser um entusiasta das ciências exatas.

Aos meus amigos, que sempre acreditaram em mim e foram grandes responsáveis pelo ambiente saudável ao qual pertenço e a convivência pacífica e harmoniosa, que lhes é bastante característica.

Ao meu orientador, Prof. Fabrício Siqueira Benevides: pela prontidão em ajudar, paciência em ensinar e retidão, competência e fenomenal inteligência que demonstram o irreparável profissional que é. Seu dom de ensinar tornou todo o processo, naturalmente cansativo, em algo prazeroso até mesmo antes da obtenção do resultado.

Ao Prof. Antônio Josefran de Oliveira Bastos, pela pesquisa conjunta comigo e meu orientador, cujas descobertas e provas foram amplamente utilizadas nesta dissertação. Primordial partícipe do resultado que aqui obtivemos, também agradeço pelo conhecimento adquirido em todas as reuniões e discussões a respeito do tema.

A todos os que fazem acontecer a ciência neste país, em especial aos integrantes do Departamento de Matemática da UFC: professores, a quem devo tudo o que aprendi no ensino superior, e demais servidores, que contribuem de maneira fundamental para a excelência deste centro.

E à Universidade Federal do Ceará, por toda a estrutura que oferece e pela capacidade de formar profissionais de ponta e cientistas de primeira prateleira no cenário nacional e internacional, tudo isto feito de maneira gratuita, sempre prezando pela democratização do ensino superior de qualidade.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

“Há vitórias que exaltam, outras que corrompem;
derrotas que matam, outras que despertam.”

(Antoine de Saint-Exupéry)

RESUMO

Fixados $n, r \in \mathbb{N}$, esta dissertação busca cotas inferior e superior não triviais para o número de r -colorações de arestas, do grafo completo K_n , que evitam cópias do K_4 -rainbow (um K_4 colorido com diferentes cores duas a duas) como um subgrafo. Denotamos esta quantidade de colorações por $c_4(n, r)$ e provamos que se $n \geq 3$, então $c_4(n, r) \geq \max\{5^{\binom{n}{2}}, r^{1+\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}\}$. Demonstramos também que fixado $r > 5^y$, com $y \geq 10$, para todo n suficientemente grande vale que $c_4(n, r) \leq r^{(1+o(1)+\frac{9}{y-1})\frac{n^2}{4}}$.

Palavras-chave: combinatória extremal; teoria dos grafos; contagem; colorações de Gallai.

ABSTRACT

Given $n, r \in \mathbb{N}$, this paper seeks non-trivial lower and upper bounds for the number of r -edge colorings, of the complete graph K_n , that avoid K_4 -rainbow (K_4 colored in such a way that if an edge is colored with a color λ , another edge can't be colored by λ) as a subgraph. We denote this number of colorings by $c_4(n, r)$ and prove that, if $n \geq 3$, then $c_4(n, r) \geq \max\{5^{\binom{n}{2}}, r^{1 + \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}\}$. We also demonstrate that, fixed $r > 5^y$, with $y \geq 10$, for n large enough, $c_4(n, r) \leq r^{(1 + o(1) + \frac{9}{y-1})\frac{n^2}{4}}$.

Keywords: extremal combinatorics; graph theory; counting; Gallai colorings.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Representações de grafos completos rainbow	11
Figura 2 – Uma representação do grafo $K_{2,4}$	15
Figura 3 – Representação de um par (A, B) com densidade $\frac{1}{2}$	29
Figura 4 – Uma representação do grafo $T_4(10)$	42
Figura 5 – K_6 colorido livre de K_4 -rainbow	50
Figura 6 – Exemplo de $xy \in Co^T(uv)$	53

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	10
1.1	Notações e definições	13
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	18
2.1	Grafos Gallai k-extremais	19
2.2	Colorações de Gallai no K_n	22
2.3	O problema de coloração de Gallai de um grafo arbitrário	24
3	PRELIMINARES	27
3.1	O lema da regularidade de Szemerédi	27
3.2	O método dos contêineres	34
3.3	Estabilidade	41
4	RESULTADO	48
4.1	Cota inferior para r-colorações k_4-rainbow-livres de K_n	48
4.2	Templates que Geram Muitas r-colorações K_4-rainbow-livres	51
4.3	Prova do teorema principal	57
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	60
	REFERÊNCIAS	61

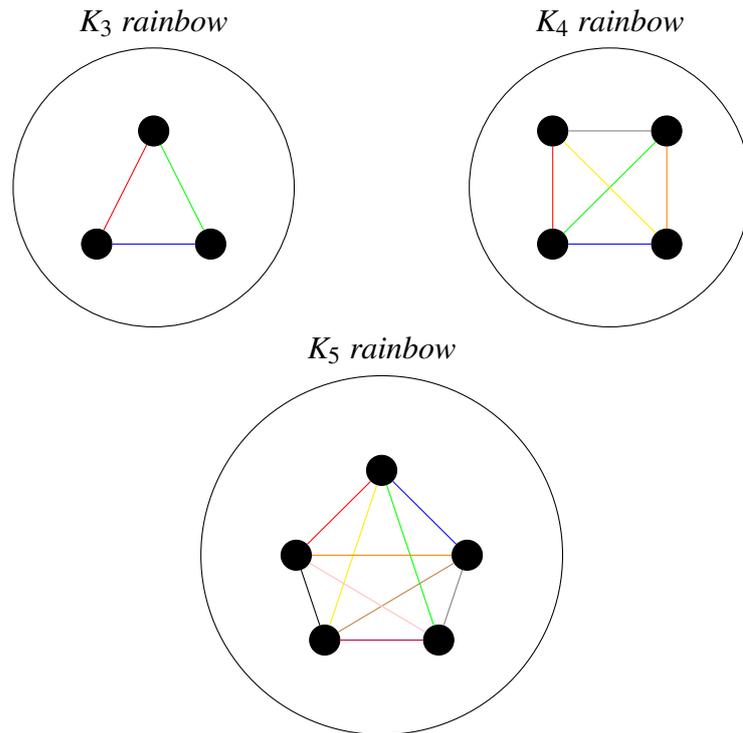
1 INTRODUÇÃO

Esta dissertação propõe-se a estudar a quantidade de colorações de arestas que não possuem como subgrafo uma cópia de certo grafo com um padrão de coloração predefinido. Em função da ordem do grafo, pesquisamos as nuances deste problema. Em Teoria dos Grafos, nos últimos tempos, devido ao desenvolvimento de várias técnicas de prova na área, há um crescimento da quantidade de resultados que, em uma estrutura, buscam evitar subestruturas predefinidas (por exemplo, em (Alon; Shikhelman, 2016; Morris; Saxton, 2016; Balogh *et al.*, 2015; Balogh; Samotij, 2011)). A mais recente busca evitar um triângulo colorido, configuração que modificamos em nosso texto e buscamos, ao invés do triângulo, evitar um grafo completo multicolorido de ordem quatro. Os resultados necessários para o aprofundamento deste tema estão presentes no Capítulo 4, antecedido pelo Capítulo 3, onde expomos algumas ferramentas que são utilizadas na prova do nosso resultado final ou que são usadas comumente em outros resultados semelhantes.

No Capítulo 2, para ambientar o foco da nossa pesquisa, trazemos um breve histórico da evolução de dois problemas correlatos, o primeiro é relativo ao grafo extremal, isto é, fixada a ordem do grafo (digamos n), o número de cores (r) e o subgrafo (H) com um padrão de coloração que se deseja evitar predefinido (\hat{H}), o primeiro busca responder à seguinte pergunta: qual o grafo G de ordem n que mais tem r -colorações que evitam cópias de H com padrão \hat{H} como subgrafo? Em particular, destaca-se o caso do triângulo-rainbow, em que H é um triângulo e \hat{H} é a coloração com cores distintas duas a duas. Na verdade, podemos definir o padrão de coloração *rainbow* de forma análoga a esta para qualquer grafo. Veja na Figura 1 as representações de grafos completos com padrão de coloração *rainbow*.

Já a segunda questão gira em torno do problema de contagem de colorações que evitem estas mesmas cópias no grafo completo. Isto é feito como forma de mostrar, como uma evolução natural do pensamento, a motivação que levou a estudarmos o resultado principal deste trabalho (Teorema 4.3.1). Na verdade, este problema também pode ser generalizado à contagem de colorações de um grafo fixado qualquer, contudo, neste texto, o ponto focal gira em torno do grafo completo. Por fim, o Capítulo 5 resume os resultados obtidos e discute o que pode ser melhorado, dando pistas de como, talvez, isto possa ser feito.

Figura 1 – Representações de grafos completos rainbow



Fonte: elaborada pelo autor.

Um grafo G é um par de conjuntos disjuntos $V(G)$ e $E(G)$ chamados, respectivamente, de *conjunto de vértices* e de *arestas*, junto com uma função de incidência ψ_G que associa cada aresta de G a um par não ordenado de (não necessariamente distintos) vértices, neste caso, dizemos que uma aresta liga os vértices do par não ordenado ao qual ela está associada. Um vértice é vizinho de (ou adjacente a) outro se existe uma aresta que os ligue e, neste caso, dizemos que tal aresta *incide* (ou que *é incidente*) nos vértices que ela liga. Em um grafo G , se uma aresta e incide em $v \in S \subseteq V(G)$, então também podemos dizer que e incide em S . Um laço de G é uma aresta em que o par associado por ψ_G é formado por vértices iguais. O grau de um vértice v em um grafo G , denotado por $d_G(v)$, é a quantidade de arestas de G incidentes em v (considerando que laços incidentes a um vértice contribuem em 2 unidades para seu grau). A partir disto, definimos o grau máximo $\Delta(G) := \{d_G(x); x \in V(G) \text{ e } d_G(x) \geq d_G(v) \forall v \in V(G)\}$ e o grau mínimo $\delta(G) := \{d_G(x); x \in V(G) \text{ e } d_G(x) \leq d_G(v) \forall v \in V(G)\}$ de G . Quando não houver risco de confusão em relação a qual grafo nos referimos, escreveremos apenas $d(v)$ ao invés de $d_G(v)$ (o mesmo vale para os graus máximo e mínimo Δ e δ). Dizemos ainda que $|V(G)|$ é chamada de ordem do grafo G (podemos denotar $|V(G)|$ também como $v(G)$). O mesmo vale para $|E(G)|$, que pode ser escrito como $e(G)$). Arestas a e b são ditas paralelas se $\psi_G(a) = \psi_G(b)$. Um grafo simples é um grafo sem laços e tal que quaisquer duas arestas

distintas não são paralelas. Neste texto trataremos apenas de grafos simples, o que nos permite, doravante, tratá-los apenas como grafos.

Quando não estiverem claros os conjuntos de vértices e aresta de um grafo G , podemos escrever $G(V, E)$ ou $G = (V, E)$ a fim de denotá-los. Por outro lado, quando estiver claro a qual grafo nos referimos, escreveremos apenas V e E , ao invés de $V(G)$ e $E(G)$. Sejam F e F' grafos, dizemos que F é isomorfo a F' quando existem correspondências biunívocas entre os vértices de F e os vértices de F' e entre as arestas de F e as arestas de F' , de forma a preservar a relação de adjacência. Sejam H e G grafos, denotamos $H \subseteq G$ (e dizemos que H está contido em G ou que H é subgrafo de G , ou mesmo que G contém H) quando existe um grafo H' isomorfo a H tal que $V(H') \subseteq V(G)$, $E(H') \subseteq E(G)$ e $\psi_{H'}$ é igual a ψ_G restrita ao conjunto de arestas de H' . Um grafo completo é um grafo simples em que todo par de vértices distintos é ligado por uma aresta. Denotamos o grafo completo de ordem n por K_n e, em particular, chamamos o K_3 de *triângulo*.

Neste texto tratamos apenas de colorações de arestas. Dado k natural, uma k -coloração de um grafo G é uma função $c : E(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ que associa cada aresta a um inteiro (cor) entre 1 e k . Dado um grafo F associado a uma coloração, dizemos que este grafo é F -rainbow se as cores de suas arestas são diferentes duas a duas. Uma k -coloração de um grafo G é H -rainbow-livre se toda cópia de H em G não é H -rainbow (ou seja, tem pelo menos 2 arestas de mesma cor). O caso em que H é um triângulo foi estudado sistematicamente por Gyárfás e Simonyi (2004), onde colorações K_3 -rainbow-livre de um grafo completo são chamadas de *colorações de Gallai*. Mais recentemente, abusando um pouco da terminologia, colorações K_3 -rainbow-livre de grafos quaisquer também têm sido chamadas de colorações de Gallai. Tais colorações já haviam sido estudadas anteriormente com o nome de *Partições de Gallai*, por Körner, Simonyi e Tuza (1992). A nomenclatura é devida a uma relação com um teorema de Gallai, provado em um de seus artigos influentes (que caracteriza a classe dos grafos de comparabilidade): ver (Gallai, 1967) – traduzido para Inglês, com adição de comentários, em (Maffray; Preissmann, 2001).

Colorações de Gallai possuem surpreendentes relações com a Teoria da Informação, ligação esta obtida pela noção de Entropia de Grafos (veja (Körner; Simonyi, 2000)). Este assunto também intersecta a generalização do Teorema Fraco dos Grafos Perfeitos (Cameron; Edmonds; Lovász, 1986). Gyárfás e Sárközy (2010), ao tratarem do problema de caracterizar colorações K_3 -rainbow-livres em grafos não completos, demonstraram propriedades estruturais

que devem ser satisfeitas por toda coloração deste tipo. A generalização deste tipo de coloração para hipergrafos foi abordada por Chua, Gyárfás e Hossain (2013), ao passo que outras áreas da combinatória, como a Teoria de Ramsey, também foram alcançados por problemas correlatos (por exemplo, em (Fujita; Magnant, 2011; Zhang; Chen; Song, 2018; Fujita; Magnant; Ozeki, 2014; Wagner, 2017), onde introduz-se o conceito de Número de Gallai-Ramsey).

Movidos por problemas de naturezas diversas e por um problema clássico de Erdős e Rothschild (veja, e.g., (Erdős, 1974)), um número volumoso de autores (Alon *et al.*, 2004; Hoppen; Lefmann; Odermann, 2017b; Pikhurko; Staden; Yilma, 2017; Benevides, Hoppen; Sampaio, 2017) abordaram problemas de contagem de colorações que evitam subgrafos de uma dada ordem (ou sub-hipergrafos) com um padrão de coloração fixado. Recentemente, Bastos, Benevides e Han (2019) e, independentemente, Balogh e Li (2019), por métodos distintos, demonstraram que a grande maioria das k -colorações de Gallai são 2-colorações (a noção de *grande maioria* será, adiante, tratada de maneira mais formal do ponto de vista matemático). A diferença básica está no fato de que, enquanto o resultado de Balogh e Li (2019) usa o Método dos Contêineres e assume que k é constante, o trabalho de Bastos, Benevides e Han (2019) é feito por uma demonstração auto-contida e o valor de k pode ser dado por uma função no número de vértices, tendente ao infinito).

Aqui damos início ao estudo do número de colorações K_4 -rainbow-livres de um grafo completo. Para tanto, também mencionamos os prévios estudos sobre contagem de colorações do K_n que evitam triângulos rainbow e sobre colorações de outros grafos que evitam alguns outros subgrafos rainbow, em geral.

1.1 Notações e definições

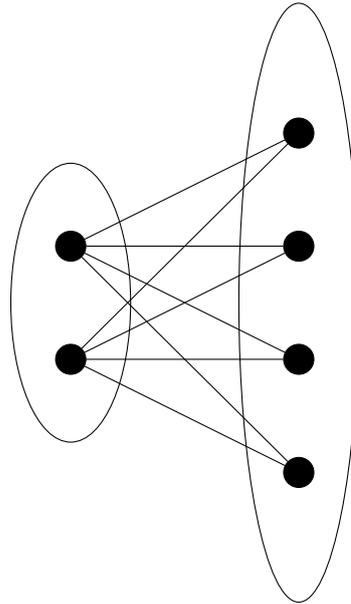
Nesta seção única, para fortalecermos o papel desta introdução, listaremos algumas notações e definições básicas, que aparecerão adiante na dissertação sem maiores detalhes. Utilizaremos a primeira subseção para definições centrais a respeito de grafos e hipergrafo, enquanto a segunda seção será utilizada para apresentar notações laterais necessárias. Outras definições mais específicas serão, quando necessárias, apresentadas paulatinamente nos próximos capítulos, de modo que a leitura não se torne enfadonha.

Noções de grafos e hipergrafos

A partir da definição de *vértices vizinhos* que demos no início deste capítulo, denotamos a *vizinhança* de um vértice v por $N(v)$, equivalendo ao conjunto de todos os vértices vizinhos a v . Denotamos também os vértices de um subgrafo H de G por $V(H)$ e suas arestas por $E(H)$. Um subgrafo H de G é dito *gerador* se o conjunto de vértices de H é igual ao conjunto de vértices de G . Por outro lado, um subgrafo H de G é dito *induzido* quando $E(H)$ corresponde precisamente a todas as arestas que existem em G com ambas as extremidades no conjunto de vértices $V(H)$. Dado $I \subset V(G)$, denotamos por $G[I]$ o subgrafo induzido por I em G . Quando G estiver claro, podemos escrever $E(I)$ ao invés de $E(G[I])$ e o mesmo vale para $e(I)$ denotando $e(G[I])$. Dado um conjunto não vazio X , dizemos que $\{A, B\}$ é uma bipartição de X se $A, B \neq \emptyset$, $A \cup B = X$ e $A \cap B = \emptyset$, ao passo que $\{V_1, \dots, V_k\}$ é uma k -partição de X se $V_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, k\}$, $V_i \cap V_j = \emptyset$ para todos $i \neq j \in \{1, \dots, k\}$ e $\cup_{i=1}^k V_i = X$.

Dado um grafo G , um subconjunto I do conjunto de vértices de G é dito *conjunto independente* em relação a G se não houver pares de vértices em I que sejam ligados por uma aresta de G . Quando G estiver claro, diremos apenas que I é *conjunto independente*, suprimindo a parte: *em relação a G* . Por outro lado, $K \subseteq V(G)$ é uma *clique* se $G[K]$ é completo. Um grafo G é dito *bipartido* se existe uma bipartição $\{A, B\}$ de $V(G)$ tal que A e B sejam conjuntos independentes e, se existir $\{A, B\}$ nestas mesmas condições e ainda de modo que todas as arestas possíveis existam (veja que só serão possíveis arestas que incidem em A e B ao mesmo tempo), então dizemos G é bipartido completo e podemos denotá-lo por $K_{r,s}$ (ou $K_{s,r}$, a ordem não importa), onde $r = |A|$ e $s = |B|$ (note que o grafo bipartido completo só pode ser biparticionado de uma única maneira, o que faz a definição de $K_{r,s}$ ter sentido). Vejamos na imagem 2 a seguir uma representação do $K_{2,4}$.

O grafo *bipartido balanceado completo* de ordem n é o $K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$, também chamado de grafo de Turán com 2 partes e denotado por $T_2(n)$. Em geral, o grafo de Turán com k partes, denotado por $T_k(n)$, é o grafo k -partido completo de ordem n com o maior número de arestas possível. Escrevemos $t_k(n)$ para denotar $|E(T_k(n))|$. O grafo bipartido induzido por dois subconjuntos disjuntos A e B do conjunto de vértices de um grafo G é escrito como $G[A, B]$ e é o grafo formado pelas aresta de G que incidem em A e B ao mesmo tempo e tal que o conjunto de vértices é a união de A e B (note que isso não é necessariamente igual ao subgrafo de G induzido por $A \cup B$, já que este último não precisa nem sequer ser bipartido). Quando G estiver claro, escreveremos $E(A, B)$ ao invés de $E(G[A, B])$ e $e(A, B)$ ao invés de $e(G[A, B])$.

Figura 2 – Uma representação do grafo $K_{2,4}$ 

Fonte: elaborada pelo autor.

Chamamos de *complemento* de um grafo G o grafo \overline{G} tal que $V(G) = V(\overline{G})$ e $E(\overline{G})$ possui exatamente uma aresta para cada par de vértices não adjacentes em G . O *número cromático* de um grafo G , denotado por $\chi(G)$ é o menor número de cores necessárias para colorir os vértices do grafo, ao passo que $\chi'(G)$, chamado de *índice cromático*, é a quantidade mínima de cores que podemos atribuir às arestas de modo que quaisquer duas delas que sejam adjacentes não tenham a mesma cor.

Segundo Bondy e Murty (2008), um *caminho* é uma sequência de vértices distintos dois a dois tal que quaisquer dois vértices consecutivos possuem uma aresta que os liga. Um *ciclo* é uma sequência de vértices tal que existe uma aresta entre quaisquer dois vértices consecutivos e os únicos vértices repetidos são o inicial e final, que coincidem. Se tal ciclo possuir ℓ arestas, chamamo-lo C_ℓ . Um triângulo, por exemplo, pode ser escrito como um K_3 ou um C_3 . De acordo com West *et al.* (2001), um grafo é dito *conexo* quando, para quaisquer dois vértices, existe um caminho no qual tais vértices são as extremidades. Quando um grafo não é *conexo*, dizemos que ele é *desconexo*. Uma *árvore* é um grafo conexo sem ciclos, que é adjetivada como *geradora* quando abrange todos os vértices de um grafo (note que apenas grafos conexos podem possuir árvores geradoras). Uma *componente conexa* de um grafo é um subgrafo induzido conexo maximal, ou seja, é um subgrafo induzido conexo que não está propriamente contido em nenhum outro subgrafo induzido conexo (lembramos aqui que um conjunto está propriamente contido em outro quando está contido, mas não é igual. A definição para grafos é análoga).

Um hipergrafo \mathcal{H} é um par $(V(\mathcal{H}), E(\mathcal{H}))$, onde $V(\mathcal{H})$ é o conjunto de vértices,

tal que o conjunto $E(\mathcal{H})$ é uma família de subconjuntos não vazios de vértices, em que cada subconjunto destes é chamado de *hiperaresta*. Quando o contexto estiver claro, também podemos chamar as hiperarestas simplesmente de arestas. Veja que esta definição é feita de forma a evitar arestas paralelas (múltiplas), pois essa é a estrutura que nos interessa em nosso texto. Um hipergrafo é chamado de k -uniforme quando todas as suas hiperarestas possuem exatamente k vértices, isto é, $e \in E(\mathcal{H}) \implies |e| = k$. Veja que quando $k = 2$, o hipergrafo 2-uniforme é, na verdade, um grafo simples, portanto, podemos dizer que a noção de hipergrafos é uma generalização da noção de grafos. Nesta dissertação, suprimiremos as definições absolutamente análogas às notações relativas a grafos, ao passo que, no tocante a outras definições referentes a hipergrafos, apresentaremos-nas nos próximos capítulos, à medida que forem necessárias.

Seja $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência grafos tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$, F_n tem ordem n . Dizemos que (F_n) é uma sequência de grafos esparsos se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(F_n)}{\binom{n}{2}} = 0$. Vejamos que a noção de grafos esparsos remete a grafos que tenham poucas arestas em relação ao total de arestas possível. Por outro lado, se $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e(F_n)}{\binom{n}{2}} = d > 0$, dizemos que (F_n) é uma sequência de grafos de densidade positiva, ou simplesmente de grafos densos.

Outras definições importantes

Começamos esta subseção dissertando sobre a ordem de crescimento de certas funções. De acordo com Cormen *et al.* (2022), se f e g são funções reais definidas nos naturais, dizemos que $f(n) = O(g(n))$ se existem constantes $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) \leq c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

Similarmente à notação $O(\cdot)$ para limitante superior, temos também $\Omega(\cdot)$, que define uma cota inferior. Formalmente, sejam f e g nas mesmas condições acima, $f(n) = \Omega(g(n))$ se, e somente se, existem constantes $c > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$f(n) \geq c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

Analogamente, $f(n) = \Theta(g(n))$ se, e somente se, existem $c_1, c_2 > 0$ e $n_0 \in \mathbb{N}$ tais que

$$c_1 \cdot g(n) \leq f(n) \leq c_2 \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0$$

Agora, definiremos as notações $o(\cdot)$ e $\omega(\cdot)$. Formalmente $f(n) = o(g(n))$ quando para toda constante $c > 0$, existe um $n_o > 0$ tal que

$$f(n) < c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

enquanto $f(n) = \omega(g(n))$ quando para toda constante $c > 0$, existe um $n_0 > 0$ tal que

$$f(n) > c \cdot g(n) \text{ para todo } n \geq n_0.$$

Perceba que quando $g(n) \neq 0$ para todo n suficientemente grande,

1. $f(n) = o(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$
2. $f(n) = \omega(g(n))$ se, e somente se, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty$

A análise assintótica é amplamente utilizada em Teoria Extremal dos grafos (veja (Bollobás, 1986; Hero; Michel, 1999; Hora, 1998; Rukhin, 2009)). Contudo, para nossas pretensões, apenas as definições acima são o suficiente. Além das notações assintóticas apresentadas, separamos esta subseção para denotar outros instrumentos utilizados nesta dissertação. Dado k natural, o conjunto $\{1, \dots, k\}$ também pode ser escrito como $[k]$ ou como I_k . Mais a fundo, se $s \leq k$ são naturais, definimos $\binom{[k]}{s}$ como sendo a família de todos os subconjuntos de $[k]$ de tamanho s . O chamado conjunto das partes de um dado conjunto X é a família

$$\mathcal{P}(X) := \{A : A \subseteq X\}.$$

Além de $\mathcal{P}(X)$, também podemos denotar o conjunto das partes de X por 2^X .

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Neste capítulo, traçamos um breve histórico do que são as colorações de Gallai, de como surgiu o estudo sobre cotas inferiores e superiores para colorações de Gallai e como o problema, que é bastante recente, vem sendo transformado ao longo dos anos nessa direção.

Em relação ao problema de colorações citado acima, Gallai (1967) iniciou o estudo sobre uma classe específica de grafos, os ditos transitivamente orientáveis. Já no século XXI, Gyárfás e Simonyi (2004) evoluem o estudo no sentido de encontrar colorações de arestas que não possuem triângulos com três cores distintas, os chamados triângulos *rainbow*. Destarte, ao longo dos anos seguintes surgem novas descobertas e segmentos que permeiam o tema. Neste texto apresentaremos o estado da arte de um destes segmentos de pesquisa.

Diante disso, destacaremos o resultado obtido no Capítulo 4, bem como sua umbilical relação com outros resultados que motivaram fortemente sua descoberta, além de demonstrar outros trabalhos que pavimentaram o caminho para a descoberta de limitantes para colorações de Gallai estendidas ao *K4-rainbow*. À frente, apresentaremos definições, notações e noções necessárias ao entendimento dos resultados contidos neste capítulo.

Definições e notações

Como já vimos na introdução desta dissertação, em Teoria dos Grafos, triângulo é o grafo K_3 . Segue daí que triângulo *rainbow* é um triângulo associado a uma coloração, em que as cores das arestas são diferentes duas a duas.

Uma k -coloração de Gallai de um grafo G é uma k -coloração de arestas de G que não produz triângulo *rainbow*. Fixado n natural, um grafo k -extremal de Gallai é um grafo de ordem n tal que o número de k -colorações de Gallai é máximo entre todos os grafos com n vértices. Podemos estender o conceito de colorações de Gallai da seguinte forma: uma k -coloração H -rainbow-livre de um dado grafo G é uma k -coloração de arestas de G que não gera cópias de H -rainbow, que, por sua vez, é o grafo H colorido em arestas com cores diferentes duas a duas.

Em particular, uma k -coloração de Gallai é uma k -coloração K_3 -rainbow-livre. Quando não houver dúvida quanto ao grafo a ser colorido em arestas, falaremos apenas k -coloração de Gallai ou k -coloração de H -Gallai. Definimos, então, $c_F(n, k)$ como sendo o número de k -colorações F -rainbow-livres possíveis no grafo completo K_n . Quando F for um triângulo, escreveremos $c(n, k)$ e quando F for um grafo completo K_r , escreveremos apenas

$c_r(n, k)$. Podemos definir ainda $ex(n, F)$ como sendo o número máximo possível de arestas de um grafo de ordem n , de modo a evitar que este grafo contenha uma cópia do grafo F .

Outros conceitos a respeito de métodos de prova, tais como regularidade, estabilidade em grafos e método dos contêineres, entre outros, serão explicados no capítulo de pré-requisitos.

2.1 Grafos Gallai k -extremais

Gyárfás e Simonyi (2004) foram os que primeiro modelaram o estudo sobre colorações de arestas de um grafo nas quais nenhum triângulo possui três cores distintas (triângulo *rainbow*) e as chamaram de colorações de Gallai, isso porque grafos sem triângulos *rainbow* compartilham propriedades importantes com os grafos transitivamente orientáveis. Desde então, houve avanços consideráveis em problemas de coloração de arestas, cuja origem pode ser rastreada a uma questão de Erdős e Rothschild (1974), que questionaram qual grafo de n vértices admite o maior número de k -colorações, de modo a evitar uma cópia de F com um padrão de cores prescrito, onde k é um inteiro positivo e F é um grafo fixo. Em particular, o estudo do grafo extremal para colorações de Gallai, que é o caso em que F é um triângulo *rainbow*, tem recebido atenção recentemente. Um grafo G com n vértices é k -extremal de Gallai se o número de r -colorações de Gallai de G é o maior entre todos os grafos com n vértices. Outra abordagem correlata é a busca por cotas inferiores e superiores relativas a colorações de Gallai no Grafo Completo. Para $k \geq 5$, o grafo k -extremal de Gallai foi determinado por Hoppen, Lefmann e Odermann (2015, 2017a, 2017b).

Teorema 2.1.1. *Para todo $k \geq 5$ existe n_0 tal que para todo $n \geq n_0$, o único grafo k -extremal de Gallai de ordem n é o grafo bipartido completo $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.*

Para $k \geq 5$, o grafo k -extremal de Gallai foi determinado por Hoppen, Lefmann e Odermann (2017a). Os autores, motivados pelo trabalho de Balogh (2006), provaram que um grafo de ordem suficientemente grande tem, no máximo, $k^{ex(n, K_3)}$ colorações de Gallai e que esta cota superior é atingida apenas quando o grafo é o de Turán $T_2(n)$, isto é, o grafo bipartido completo balanceado $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$. Este resultado é uma melhoria de outro, alcançado pelos mesmos autores em (Hoppen; Lefmann; Odermann, 2015), que chegou à mesma conclusão para $k \geq 3^{20}$.

O Teorema pode ser provado através de resultados conhecidos na área de combinatoria, como o Lema da Regularidade de Szemerédi e resultados referentes à estabilidade, que

veremos em detalhes no capítulo 3, destinado aos requisitos para prova do resultado principal deste dissertação e a outros temas que o tangenciam. Como se baseia no Lema da Regularidade de Szemerédi, a conclusão deste teorema é conhecida por ser válida para valores muito grandes de n_0 . Em termos de ordem do grafo, o resultado a seguir melhora a cota inferior, ao custo de piorá-la para o número de cores.

Teorema 2.1.2. *Para todo $k \geq 10$ e $n \geq 5$, o único grafo k -extremal de Gallai de ordem n é o grafo bipartido completo $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.*

Em outra abordagem, para $k \geq 10$, Hoppen, Lefmann e Odermann (2017a) provaram que, se $n \geq 5$, o número máximo de colorações de Gallai é $k^{ex(n, K_3)}$ e que este valor é atingido se, e somente se, o grafo for o de Turán $T_2(n)$, assim como no teorema 2.1.1. Percebamos que, em relação ao 2.1.1, neste teorema ganhamos o fato da ordem do grafo ser fixa e não mais um valor suficientemente grande, dependente do número de cores disponíveis fornecidas. Contudo, isto só vale quando $k \geq 10$.

Agora, é natural perguntar-se sobre os casos em que $k = 3$ ou $k = 4$. Contudo, ainda é desconhecido, neste caso, se um único grafo atinge o máximo de k -colorações de Gallai possíveis e qual é este grafo para valores pequenos de n . No mesmo artigo foi encontrado um limitante superior para os casos em que $k \in \{3, 4\}$ e n é suficientemente grande, como vemos a seguir.

Teorema 2.1.3. *Dado $k \in \{3, 4\}$ e $\delta > 0$, existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que, qualquer que seja o grafo grafo em n vértices, o número de colorações de Gallai não ultrapassa $2^{\frac{n^2}{2}(1+\delta)}$.*

Notamos que este resultado implica que o grafo completo K_n não está longe, com respeito ao número de colorações de Gallai, de atingir o valor extremal, tanto para $k = 3$, quanto para $k = 4$. No caso em que $k = 3$, uma cota superior é obtida através do método dos contêineres, ferramenta que estudaremos a fundo no capítulo de revisão bibliográfica, enquanto a cota superior mais precisa $n!2^{\binom{n}{2}}$ segue do trabalho de Benevides, Hoppen e Sampaio (2017).

Para $k = 4$, $T_2(n)$ e K_n estão próximos do valor extremal. Basta pensarmos que, em K_n , ao escolher duas entre quatro cores disponíveis, temos 6 possibilidades. E cada combinação de exatas duas cores colore as arestas de $2^{\binom{n}{2}} - 2$ formas diferentes. Portanto, o número de colorações de Gallai tem cota inferior de $6 \cdot (2^{\binom{n}{2}} - 2) + 6 = 6 \cdot (2^{\binom{n}{2}} - 1)$. Enquanto isto, $T_2(n)$ pode ser colorido com exatamente $4^{ex(n, K_3)} \geq 2^{(n^2-1)/2}$ combinações.

O fato de duas configurações atingirem quantidade similar de colorações válidas sugere que a demonstração da configuração extremal requererá estimativas muito precisas. Diante

do exposto, o estado da arte deste tema depara-se com as duas seguintes conjecturas. Na primeira, atribuída a Benevides, Hoppen e Sampaio (2017), acredita-se que o único grafo Gallai 3-extremal de ordem n é o K_n , ao passo que na segunda, feita por Hoppen, Lefmann e Odermann (2017a), conjectura-se que o único grafo Gallai 4-extremal é o $T_2(n)$. Utilizando contêineres, Balogh e Li (2019) provam um resultado similar à primeira conjectura, como vemos a seguir.

Teorema 2.1.4. *Para todo $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{64}$, existe n_0 tal que, qualquer que seja $n > n_0$, vale que, se G é um grafo de ordem n , e $e(G) \geq \lfloor n^2/4 \rfloor$, então o número de 3-colorações de Gallai de G é no máximo $3.2^{e(G)} + 2^{-\frac{n}{4\log^2 n}} 2^{\binom{n}{2}}$.*

Balogh e Li (2019) encontram este limitante e, ao mesmo tempo, mostram que, para n suficientemente grande, um limitante inferior trivial para o número de Gallai k -colorações de K_n é $\binom{k}{2} + 2^{-n} 2^{\binom{n}{2}}$. Esta observação juntamente com o teorema acima e os trabalhos de Benevides, Hoppen e Sampaio (2017), fazem possível a prova do teorema a seguir, que foi, no artigo de Balogh e Li (2019), além do resultado principal, que logo mais comentaremos, a segunda grande contribuição.

Teorema 2.1.5. *Existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, entre todos os grafos de ordem n , K_n é o único grafo Gallai 3-extremal.*

Como pode-se observar, o teorema acima representa grande avanço quanto à conjectura do grafo Gallai 3-extremal, restando apenas questões quanto a grafos de pequena ordem. Um resultado para o grafo Gallai 4-extremal também por Balogh e Li (2019), como enunciamos a seguir.

Teorema 2.1.6. *Existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, entre todos os grafos de ordem n , $T_2(n)$ é o único grafo Gallai 4-extremal.*

Nesta subseção, vemos que o objetivo é, dado um número k de cores disponíveis para a utilização, encontrar o grafo Gallai k -extremal em função de sua ordem, isto é, para um grafo de ordem n , definir qual grafo admite o maior número de k -colorações de modo a não formar um triângulo *rainbow*. Este problema tangencia o outro que mostraremos na próxima seção e que é mais correlacionado com o problema central desta dissertação.

2.2 Colorações de Gallai no K_n

Nesta seção apresentaremos um problema de contagem. Além do problema extremal, outra pergunta natural que surge do artigo de Erdős e Rothschild (1974) é a seguinte: no grafo completo K_n , dadas k cores disponíveis para colorir todas as arestas, quantas são as colorações do K_n que não geram triângulos *rainbow*? Isto significa perguntar quantas colorações de Gallai o K_n admite em configurações de k possíveis cores para cada aresta.

Como já foi visto, representamos como $c(n, k)$ o número de colorações de Gallai de arestas do K_n com k cores disponíveis. O objetivo principal desta seção é apresentar limitantes ajustados para este valor e mostrar o estado da arte sobre o assunto. Para iniciar os trabalhos, podemos contar as colorações de arestas que utilizam no máximo duas cores, pois, neste caso, não há triângulos *rainbow* contidos em nenhum padrão de coloração, visto que, para obter triângulo *rainbow* seria preciso que o grafo completo fosse colorido com pelo menos três cores distintas. Apresentamos, então, o lema a seguir.

Lema 2.2.1. $c(n, k) \geq \binom{k}{2} (2^{\binom{n}{2}} - 2) + k$

O lema acima é uma inequação trivial, visto que, fixadas duas cores, é fácil ver que temos $(2^{\binom{n}{2}} - 2)$ maneiras de colorir o K_n utilizando exatamente estas duas cores fixadas. Mas veja que temos $\binom{k}{2}$ maneiras de escolher duas cores entre as disponíveis. Portanto, usando exatas duas cores, com k cores disponíveis, podemos pintar o K_n de $\binom{k}{2} (2^{\binom{n}{2}} - 2)$ formas distintas. Por fim, basta observar que temos k maneiras de pintar o grafo com uma cor só. Destas observações, segue a desigualdade do lema.

Por processo similar de contagem, ao fixarmos e utilizarmos exatamente três cores (digamos ver, azul e vermelha) e colorirmos o K_n de modo que a cor vermelha pinte apenas uma aresta, é fácil ver que temos exatamente $\binom{n}{2} (2^{\binom{n}{2} - (n-1)} - 2)$ colorações de Gallai neste padrão. Juntando esta informação com o Lema 2.2.1, obtemos o seguinte lema.

Lema 2.2.2. *Existe n_0 tal que $n > n_0$ implica que $c(n, k) \geq (\binom{k}{2} + 2^{-n}) 2^{\binom{n}{2}}$*

O lema acima nos dá que, fixado o número de cores disponíveis k , para n suficientemente grande, vale que $(\binom{k}{2} + 2^{-n}) 2^{\binom{n}{2}}$ é uma cota inferior trivial para o número de k -colorações de Gallai. Adiantamos que esta é uma cota inferior ajustada e isto já era previsto antes deste resultado ser demonstrado no artigo de Balogh e Li (2019). A partir de agora, então, nos ateremos a mostrar os históricos e tentativas de ajustar cotas superiores para $c(n, k)$.

Motivados por uma questão de Erdos e Rothschild (1974) e pela resolução de Alon *et al.* (2004), Benevides, Hoppen e Sampaio (2017) estudaram o problema geral de contar o número de colorações de arestas de um gráfico que evitam um subgrafo colorido com um determinado padrão. Com destaque para o padrão de triângulos *rainbow*, Benevides, Hoppen e Sampaio (2017) provaram o resultado a seguir.

Teorema 2.2.3. $c(n, 3) \leq \frac{3}{2}(n-1)!2^{\binom{n-1}{2}}$

Para a prova deste teorema, Benevides, Hoppen e Sampaio (2017) valeram-se de uma prova autocontida. Em paralelo, Falgas-Ravry, O’Connell e Uzzell (2019), utilizando o método dos contêineres, forneceram um limitante superior mais fraco. Os autores demonstraram que $c(n, 3) \leq 2^{(1+o(1))\binom{n}{2}}$. O método utilizado, apesar de resultar em uma cota mais fraca, abriu espaço para outro tipo de abordagem do problema.

Bastos *et al.* (2019) melhoraram a ordem da, até então, melhor cota superior para $c(n, 3)$. Embora com uma prova completamente matemática, os autores também usaram a pesquisa computacional para calcular o número exato de colorações de Gallai de pequenos gráficos completos e listar todas as colorações de Gallai de K_n para $n \leq 5$. Isso forneceu uma visão sobre como usar uma indução simples para estimar $c(n, 3)$ para grandes valores de n , bem como organizar algumas análises de caso para pequenos valores de n . Enunciamos a seguir o limitante superior encontrado por Bastos *et al.* (2019) para $c(n, 3)$.

Teorema 2.2.4. $c(n, 3) \leq 7(n+1)2^{\binom{n}{2}}$

Notemos a evolução da cota superior: primeiro, Benevides, Hoppen e Sampaio (2017) encontraram um limitante de ordem $(n-1)!2^{\binom{n}{2}}$. Isto é, o fator que multiplica $2^{\binom{n}{2}}$ é um fatorial de n . Em paralelo, Falgas-Ravry, O’Connell e Uzzell (2019) descobriram um fator pior ($2^{o(1)}$). Neste último resultado, observamos que a lacuna entre o limitante superior e o inferior trivial é um fator linear. Agora, veremos que Bastos, Benevides e Han (2018) demonstraram que a cota inferior está de fato mais próxima de $c(n, k)$, como apresentamos no próximo resultado.

Teorema 2.2.5. *Para todo n suficientemente grande e todo k com $2 < k \leq 2^{n/4300}$, temos que*
 $c(n, k) = \left(\binom{k}{2} + o(1)\right)2^{\binom{n}{2}}$

A prova desta proposição é autocontida, com exceção de dois resultados elementares do artigo de Gyárfás e Simonyi (2004). O primeiro deles é que toda coloração de Gallai do K_n

contém uma árvore geradora monocromática. O segundo diz que toda coloração de Gallai do K_n tem uma cor com o maior grau de pelo menos $2n/5$.

Os autores provam o teorema acima de forma elementar, baseando-se em como classificar as colorações enquanto conta-se o número de maneiras de estendê-las. O resultado a seguir poderia ser apresentado como um corolário do trabalho de Bastos, Benevides e Han (2018). Contudo, o enunciaremos como um teorema, visto que foi desenvolvido independentemente por Balogh e Li (2019) e utilizou o método dos contêineres.

Teorema 2.2.6. *Para todo inteiro $k \geq 3$, existe n_0 tal que para todo $n > n_0$, o número de Gallai k -colorações do K_n é no máximo*

$$\binom{k}{2} + 2^{-\frac{n}{4 \log^2 n}} 2^{\binom{n}{2}}.$$

Vejamos que o que torna este um resultado mais fraco do que o Teorema 2.2.5 é o fato de que, no Teorema 2.2.6, k é fixado e n suficientemente grande, ao passo que, no 2.2.5, k pode crescer em função de n . Contudo, ambos os teoremas têm como corolário o principal resultado desta seção, apresentado na sequência.

Corolário 2.2.6.A. *Fixado $k \geq 3$, seja A_n^k o conjunto de Gallai k -colorações do K_n com no máximo duas cores utilizadas, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|A_n^k|}{c(n,k)} = 1$.*

Percebamos que este corolário nos diz que, para todo inteiro $k \geq 3$, quase todas as Gallai k -colorações do grafo completo são 2-colorações. Este corolário invoca uma pergunta natural: O que ocorreria, em termos de Gallai k -colorações, com outros padrões *rainbow* que não sejam triângulos? Falaremos sobre um destes padrões, alvo de nossa pesquisa, na próxima seção.

2.3 O problema de coloração de Gallai de um grafo arbitrário

Nesta seção veremos dois teoremas a respeito de colorações de Gallai em um grafo G dado. O primeiro refere-se a 3-colorações que tentam evitar um triângulo *rainbow* em um grafo arbitrário, enquanto o segundo diz respeito a r -colorações que evitam K_k -*rainbow*. Antes de irmos aos resultados, precisamos definir algumas noções. Seja \hat{K}_3 o triângulo *rainbow*, fixado n , dizemos que um grafo G de ordem n é $(3, \hat{K}_3)$ -*extremal* se para todo grafo H de ordem n , o número de 3-colorações de Gallai de H não é maior que o número de 3-colorações de Gallai de G . Perceba que esta notação tem uma grande vantagem em relação à outra que definimos, podemos trocar \hat{K}_3 por qualquer grafo \hat{F} fixado com um padrão de coloração predefinido e o 3

de $(3, \hat{F})$ por qualquer r natural para representar o número de cores disponíveis. Podemos ainda trocar um \hat{F} por uma família de grafos com colorações pré-estabelecidas $\hat{\mathcal{F}}$. O resultado abaixo estabelece dois resultados aproximados a respeito de grafos grafos $(3, \hat{K}_3)$ -extremais.

Teorema 2.3.1. *O seguinte vale para o triângulo rainbow \hat{K}_3 :*

(a) *Para todo $\delta > 0$, existe n_0 tal que, se G é um grafo de ordem $n > n_0$, então $c_{\hat{K}_3}(G, 3) \leq 2^{(1+\delta)\frac{n^2}{2}}$.*

(b) *Para todo $\xi > 0$, existe n_1 tal que, se G é um grafo de ordem $n > n_1$ e $c_{\hat{K}_3}(G, 3) \geq 2^{\binom{n}{2}}$, então $e(G) \geq \binom{n}{2} - \xi n^2$.*

O resultado acima, devido a Benevides, Hoppen e Sampaio (2017) é um corolário do Teorema 2.1.5. Contudo, a importância de citá-lo está no método de prova que utiliza, o método da regularidade, que estudaremos no próximo capítulo, onde lembraremos este resultado. O teorema a seguir, por sua vez, estuda o problema do $(r, \hat{\mathcal{F}}(k, s))$ -extremal em que $\hat{\mathcal{F}}(k, s)$ é a família de grafos completos K_k onde s ou mais cores aparecem. Por simplicidade escreveremos $(r, \hat{K}_k(s))$ -extremal. Agora estamos prontos para enunciar o teorema a seguir, obtido por Hoppen, Lefmann e Nolibos (2021).

Teorema 2.3.2. *Sejam $k \geq 3$ e $2 \leq s \leq \binom{n}{2}$ inteiros, para todo n suficientemente grande e $r \geq r_0(k, s)$, $T_{k-1}(n)$ é o único grafo $(r, \hat{K}_k(s))$ -extremal.*

Ora, é fácil ver que o teorema 2.3.2 resolve o problema do grafo que, fixada sua ordem e o número de cores disponíveis (r), para n e r suficientemente grandes, maximiza a quantidade de colorações livres de K_k -rainbow, bastando para isso fazer $s = \binom{k}{2}$. É trivial notar também que os dois teoremas desta seção dizem respeito a grafos extremais. A pergunta que fica é: em relação a r -colorações K_k -rainbow-livres do grafo completo K_n , qual o estado da arte?

Já encontra-se descoberto que quase todas as Gallai k -colorações de arestas são 2-colorações, contudo, quando mudamos o padrão que queremos evitar, de triângulo *rainbow* para k_4 *rainbow*, não temos ainda grandes descobertas. Também é natural perguntar-se, já resolvido o problema para o k_3 *rainbow*, se há resultados análogos para o k_4 *rainbow*.

Diante disso, seguem as seguintes perguntas sobre o tema: há um número fixado r de cores tal que quase todas as K_4 -Gallai k -colorações sejam r -colorações? Quais as cotas mais ajustadas que conseguimos obter? Em função do número de cores disponíveis, qual o grafo extremal para esta situação? Devido à grande insipiência quanto a estas perguntas, escolhemos a

primeira e a segunda questões para tentarmos começar a responder. Nesta seção, porém, nos atemos a apresentar o problema.

3 PRELIMINARES

Neste capítulo, abordaremos tópicos e resultados essenciais para o entendimento da prova do nosso teorema principal. Trataremos também de tópicos muito utilizados em demonstrações de outros autores em trabalhos recentes relacionados à contagem de colorações, ainda que estes resultados não sejam diretamente utilizados para a prova do almejado resultado principal desta dissertação. É certo que a base teórica que oferecemos neste capítulo enriquece a apresentação e compreensão do problema, além de facilitar a iniciação neste tópico.

A estrutura deste capítulo encontra-se dividida em três seções. A primeira seção, apesar de não ser utilizada diretamente na demonstração de nosso resultado, revela noções utilizadas amplamente em trabalhos prévios sobre problemas extremais, incluindo problemas do tipo Erdos-Rothschild, como é o caso da questão central desta dissertação. As outras duas seções apresentam teoremas, lemas, corolários e definições diretamente necessárias para atingir nosso objetivo.

Na primeira seção deste capítulo, apresentaremos uma noção de regularidade de Grafos, introduzida por Szemerédi (1975). A versão do Lema de Regularidade de Szemerédi que utilizaremos está contida no livro *Graduate Texts in Mathematics - Graph Theory*, de Diestel (2024) e, dada sua importância, pode ser usada como base para muitas outras áreas de estudo em combinatória. Por este motivo, a menção a este resultado é devida, visto que muitos dos trabalhos que vimos no capítulo anterior utilizaram amplamente este método.

A segunda seção deste capítulo introduz o método dos contêineres, ferramenta desenvolvida, de maneira independente, em dois artigos recentes, um de Balogh, Morris e Samotij (2015) e o outro de Saxton e Thomason (2015), é o principal instrumento utilizado em nosso precípuo resultado. O método de prova é inspirado no artigo de Balogh e Li (2019). A terceira seção, por fim, mostra resultados sobre estabilidade em grafos, que refere-se a como um grafo se comporta quando sofre pequenas alterações.

3.1 O lema da regularidade de Szemerédi

Como foi dito anteriormente, a noção de regularidade de grafos apresentada por Endre Szemerédi, na década de 1970, é uma ferramenta teórica amplamente utilizada para diversos tipos de subáreas em teorias dos grafos. O intuito original da descoberta foi provar que todo conjunto de inteiros com uma característica específica (a saber, densidade positiva)

contém uma progressão aritmética arbitrariamente grande. A descoberta serviu, inicialmente, para resolver uma conjectura proposta por Erdos e Turán na década de 1930.

As aplicações do lema, porém, ao longo das décadas, expandiram-se exponencialmente, são exemplos de uso do Lema de Regularidade: O Teorema de Roth (1952) sobre 3-PAs (que foi generalizado por Szemerédi para k -PAs), o Teorema de Erdos e Stone (1946) (que podemos citar como a aplicação direta mais clássica do lema), o Teorema de Estabilidade de Erdos e Simonovits (1973) (o conceito de estabilidade que também é parte fundamental deste texto) e outras aplicações em Teoria Extremal dos Grafos (veja também (Allen *et al.*, 2016; Kohayakawa, 1997; Komlós; Simonovits, 1995; Komlós *et al.*, 2000; Gerke; Steger, 2005)). Contudo, nosso principal foco nesta seção é dar ao leitor uma noção de como o Lema de Szemerédi pode ser utilizado para determinar a estrutura típica de um grafo H -livre e, mais ainda, como uma pequena variação na versão desse lema pode ajudar a resolver problemas relacionados a colorações de Gallai. Nesta dissertação, como não utilizaremos o Lema de Szemerédi diretamente na demonstração de nosso teorema principal, apenas enunciamos alguns resultados, aplicações e damos ideias de como o Lema de Regularidade pode ser aproveitado, além de indicações de bibliografias, principalmente para questões relacionadas ao tema deste texto.

Grosseiramente falando, a versão clássica do Lema de Szemerédi diz que todo grafo pode ser aproximado por grafos aleatórios no seguinte sentido: todo grafo pode ser particionado em um número limitado de partes iguais, de tal modo que a maior parte de suas arestas ocorre entre diferentes partes e as arestas entre quaisquer duas partes são distribuídas de maneira bastante uniforme. Por este motivo, o resultado também recebe a alcunha de Lema da Uniformidade.

Definições importantes

Para apresentarmos o Lema da Regularidade de Szemerédi, precisamos introduzir algumas importantes definições, necessárias ao entendimento do resultado. Seja $G = (V, E)$ um grafo e $X, Y \subseteq V$ tais que $X \cap Y = \emptyset$. Denotamos por $\|X, Y\|$ o número de arestas de G entre X e Y (também podemos denotar isto por $e(X, Y)$). Definimos também:

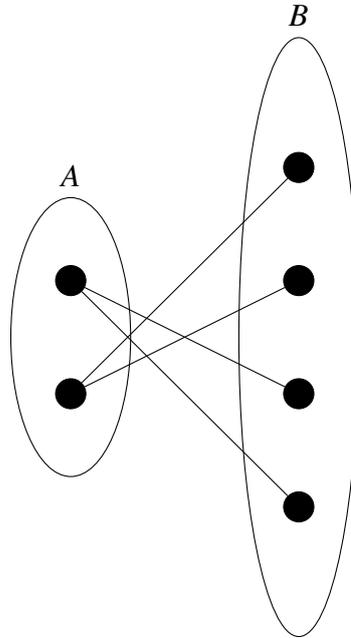
$$d(X, Y) := \frac{\|X, Y\|}{|X||Y|}$$

a densidade do par (X, Y) . Note que o número máximo de arestas entre X e Y é $|X||Y|$. Portanto, $0 \leq d(X, Y) \leq 1$. Dado $\varepsilon > 0$, dizemos que um par (A, B) de conjuntos disjuntos $A, B \subseteq V$ é

ε -regular se para todo $X \subseteq A$ e $Y \subseteq B$, com $|X| \geq \varepsilon|A|$ e $|Y| \geq \varepsilon|B|$, vale que:

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \varepsilon.$$

Figura 3 – Representação de um par (A, B) com densidade $\frac{1}{2}$



Fonte: elaborada pelo autor.

Vejamos que na figura acima $d(A, B) = \frac{1}{2}$ e que para todo $X \subseteq A$ e todo $Y \subseteq B$ vale que $0 \leq d(X, Y) \leq 1$ (na verdade isto vale para qualquer par de conjunto de vértices em qualquer condição). Diante disso, segue que

$$-\frac{1}{2} \leq d(X, Y) - \frac{1}{2} \leq \frac{1}{2},$$

e, conseqüentemente, que

$$-\frac{1}{2} \leq d(X, Y) - d(A, B) \leq \frac{1}{2}.$$

Logo,

$$|d(X, Y) - d(A, B)| \leq \frac{1}{2}.$$

Concluimos que o par (A, B) da Figura 3 é $\frac{1}{2}$ -regular. Em geral, este argumento vale para qualquer par que tenha densidade $d = \frac{1}{2}$. Percebamos, agora, que as arestas de um par ε -regular são distribuídas de maneira bastante uniforme. Intuitivamente, um par (A, B) é regular se para todo

par de conjuntos no par (A, B) com tamanho não desprezível, valer que a densidade deste par é próxima à densidade de (A, B) . Vale salientar também que quanto menor ε , mais uniforme é a distribuição. Considere uma partição $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ de V na qual o conjunto V_0 é destacado como sendo um conjunto *excepcional*. (V_0 pode ser vazio). Dizemos que tal partição é ε -regular de G se satisfaz as seguintes três condições.

(i) $|V_0| \leq \varepsilon|V|$;

(ii) $|V_1| = \dots = |V_k|$;

(iii) Todos, menos no máximo εk^2 pares (V_i, V_j) com $1 \leq i < j \leq k$, são ε -regular.

O papel do conjunto excepcional V_0 é tornar possível a exigência de que todos os outros conjuntos da partição tenham exatamente o mesmo tamanho. Poderíamos omitir da definição o conjunto excepcional, flexibilizando a condição de equipartição, a transformando na seguinte condição: $||V_i| - |V_j|| \leq 1$. Mais à frente, para uma outra versão do Lema de regularidade, redefiniremos o conceito de partição ε -regular com esta última condição ao invés da versão clássica.

Como a condição (iii) afeta apenas os conjuntos V_1, \dots, V_k , podemos imaginar o conjunto V_0 como sendo uma espécie de resto: seus vértices são desconsiderados quanto à uniformidade, mas existem poucos deles. Note ainda que, quanto menor for o valor de ε , maior é a quantidade de pares ε -regulares encontrados e mais limitado é o conjunto V_0 . Agora podemos enunciar o lema da regularidade sem mais problemas.

O enunciado do lema da regularidade

Lema 3.1.1. (*Lema da Regularidade de Szemerédi*) Para todo $\varepsilon > 0$ e todo inteiro $m \geq 1$, existe um inteiro M tal que todo grafo de ordem pelo menos m admite uma partição ε -regular $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$ com $m \leq k \leq M$.

Sendo assim, o lema regularidade nos diz que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, todo grafo tem uma partição ε -regular limitada no número de conjuntos. Notemos ainda que a ε -regularidade é trivial quando os conjuntos da partição são unitários isolados, mas é uma poderosa propriedade quando eles são grandes. Além disso, o lema também permite a escolha de uma cota inferior m , de modo que, escolhendo m ajustado, podemos aumentar a proporção de arestas entre conjuntos da partição.

É fato que $V(G)$ por si só é uma equipartição, o que não é útil para nossas pretensões. Por isso a importância do m no lema. Também é inútil equipartições onde cada parte é um vértice

apenas, fato que torna fundamental também no lema a presença da constante $M = M(m, \varepsilon)$. Percebamos também que o lema é projetado para ser utilizado em grafos densos, pois não há controle sobre a distribuição de arestas dentro de cada classe da partição. É fácil ver também que, em grafos esparsos, o resultado se torna trivial, pois todas as densidades dos pares tendem a zero.

Como o lema acima não será utilizado para o capítulo 4, limitar-nos-emos a, na próxima subseção, ilustrar como o lema da regularidade é tipicamente aplicado em alguns dos problemas que foram citados na introdução desta seção. Apesar da prova do lema não ser muito complicada, omitir-la-emos, tanto por não ser necessária para o nosso capítulo principal (capítulo 4), quanto por ser um resultado clássico, que pode ser encontrado em diversas bibliografias de combinatória básica. Explicaremos, portanto, de maneira geral como o resultado é utilizado, sem demasiadas minúcias, com o único objetivo de construir conhecimento diversificado a respeito do tema (para mais detalhes, consultar (Diestel, 2024)).

Aplicando o lema da regularidade

Imaginemos que estejamos tentando provar que uma certa densidade de arestas de um grafo G é suficiente para forçar a ocorrência de um dado subgrafo F , e que temos uma partição ε -regular de G . As arestas entre quase todos os pares (V_i, V_j) de conjuntos da partição são distribuídas uniformemente, embora sua densidade possa depender do par. Mas como G tem muitas arestas, essa densidade não pode ser zero para todos os pares: uma proporção considerável de pares terá densidade positiva. Agora, se G é grande, então os pares também o são: lembremos que o número de conjuntos na partição é limitado e que eles, a exceção de V_0 , têm tamanhos iguais.

Vejamos que qualquer grafo bipartido balanceado suficientemente grande, fixada uma densidade de arestas positiva, com uma distribuição uniforme, conterà qualquer grafo bipartido dado. Assim, se uma quantidade suficiente de pares em nossa partição de G tiver densidade positiva de modo que F possa ser escrito como a união de grafos bipartidos, cada um surgindo em um desses pares, podemos esperar que $F \subseteq G$.

O tipo de ferramenta descrita nos parágrafos anteriores faz parte de uma classe de resultados conhecidos como *lemas de imersão*. Existem lemas de imersão de existência e contagem de triângulos como subgrafos, ou mesmo uma imersão para cliques arbitrárias. Neste texto, veremos um caso mais geral do lema de imersão para entendermos a relação deste com pares ε -regular e o Lema de Szemerédi em geral. Sem mais delongas, começamos, a seguir, a

formalizar esta ideia.

Como apresenta Diestel (2024), para formalizar esta ideia, suponhamos que G seja um grafo com uma partição ε -regular $\{V_0, V_1, \dots, V_k\}$, como conjunto excepcional V_0 e $|V_1| = \dots = |V_k| =: l$. Dado $d \in (0, 1]$, seja R o grafo com os vértices V_1, \dots, V_k tal que dois vértices são adjacentes se, e somente se, eles formam um par ε -regular em G com densidade maior ou igual a d . Chamamos R de grafo de regularidade de G com parâmetros ε, l e d . Dado s natural, vamos agora substituir cada vértice V_i de R por um conjunto V_i^s de s vértices, e cada aresta por um grafo bipartido completo entre os s -conjuntos correspondentes. O grafo resultante será denotado por R_s .

Podemos agora enunciar o lema a seguir, que, coloquialmente, diz que os subgrafos de R_s podem ser encontrados em G , desde que seja ε suficientemente pequeno e os V_i 's suficientemente grandes. Na verdade, os valores requeridos de l e ε dependem apenas de d e do grau máximo do subgrafo. Segue, então, o enunciado formal do lema.

Lema 3.1.2. *Para todo $d \in (0, 1]$ e $\Delta \geq 1$, existe um $\varepsilon_0 > 0$ com a seguinte propriedade: se G é um grafo qualquer, F é um grafo com $\Delta(F) \leq \Delta$, s é natural e R é qualquer grafo de regularidade de G com parâmetros $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, $l \geq s/\varepsilon_0$ e d , então*

$$F \subseteq R_s \implies F \subseteq G$$

.

Para exemplificar a aplicação, o resultado acima, juntamente com o Lema da Regularidade provam o teorema de Erdos-Stone, que enunciamos a seguir.

Teorema 3.1.3. *Para todo inteiro $r \geq 2$ e $s \geq 1$, e todo $\varepsilon > 0$, existe um inteiro n_0 tal que todo grafo com $n \geq n_0$ vértices e, pelo menos $ex(n, K_r) + \varepsilon n^2$ arestas, contém K_r^s como um subgrafo.*

O Teorema 3.1.3 é interessante não apenas por si, mas também por um corolário que estabeleceu o teorema como uma espécie de *meta-teorema* para a teoria extremal de grafos densos. O mencionado corolário apresentamos na sequência.

Corolário 3.1.3.A. *Para todo grafo F com pelo menos uma aresta,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ex(n, F) \binom{n}{2}^{-1} = \frac{\chi(F) - 2}{\chi(F) - 1}.$$

É também usual escrever o Corolário 3.1.3.A da seguinte maneira:

Corolário 3.1.3.B. *Para todo grafo F com pelo menos uma aresta,*

$$ex(n, F) = \left(1 - \frac{1}{\chi(F) - 1} + o(1)\right) \frac{n^2}{2}.$$

Agora partimos para a versão colorida do Lema da Regularidade, redefinimos um partição ε -regular da seguinte forma: dado um grafo $G = (V, E)$, a partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_t$ é chamada ε -regular (com respeito a G) se:

- (a) $||V_i| - |V_j|| \leq 1$ para todo $i, j \in [t]$, e
- (b) (V_i, V_j) é ε -regular para todos menos no máximo εt^2 dos pares (V_i, V_j) onde $i \neq j$.

Diante desta redefinição, estamos prontos para apresentar o que chamamos de versão colorida do lema de Szemerédi, devida aos autores Komlós e Simonovits (1995). Nela introduzimos um parâmetro r inteiro, que é o número de cores disponíveis para pintar arestas de um grafo. Grosseiramente, fixando uma r -coloração, o lema a seguir particiona as aresta de um grafo G por cor e prova que existe uma partição ε -regular simultânea a todos os grafos que têm conjunto de vértices $V(G)$ e conjunto de arestas de uma cor só.

Lema 3.1.4. *Para todo $m, \varepsilon > 0$ e r inteiro, existe n_0 e M tais que, se as arestas de um grafo G de ordem n são r -coloridas (digamos $E(G) = E_1 \cup \dots \cup E_r$), então existe uma partição do conjunto de vértices $V(G) = V_1 \cup \dots \cup V_t$ com $m \leq t \leq M$ que é ε -regular simultaneamente com respeito a todos os grafos $G_i = (V, E_i)$ para $i = 1, \dots, r$.*

Uma partição como a descrita no lema 3.1.4 é chamada de partição ε -regular multicolorida. Dada uma partição deste tipo, e uma cor $\sigma \in [r]$, podemos definir um *grafo cluster* associado à cor σ como segue. Dado $\eta > 0$, o grafo $R_\sigma = R_\sigma(\eta)$ é definido de tal forma que $V(R_\sigma) = [t]$ e $ij \in E(R_\sigma)$ se, e somente se, (V_i, V_j) é um par ε -regular com densidade de aresta de pelo menos η com respeito ao subgrafo de G induzido pelas arestas de cor σ .

Podemos ainda definir o grafo cluster R multicolorido associado a esta partição da seguinte maneira: $V(R) = [t]$ e $\cup_{\sigma \in [r]} E(R_\sigma)$. Cada $e \in R$ recebe a lista de cores $L_e = \{\sigma \in [r]; e \in E(R_\sigma)\}$. Se F é um grafo com um padrão de coloração \hat{F} , dizemos que R contém \hat{F} se ele contém uma cópia de F colorida com o padrão \hat{F} .

Perceba que uma das principais vantagens de considerar grafos cluster é utilizar resultados de imersão que garantem que alguma subestrutura encontrada dentro de um grafo cluster também pode ser encontrada no grafo original. Em particular, o próximo lema que enunciaremos é um destes resultados. Por simplicidade e porque é a versão utilizada para provar

um dos principais resultados a respeito de colorações de Gallai, o enunciaremos em termos de 3-colorações, contudo, a mesma afirmação seria válida para r -cores, o que pode nos dar outro norte em uma futura abordagem sobre o K_4 -rainbow.

Lema 3.1.5. *Para todo $\eta > 0$ e todo inteiro positivo k , existe $\varepsilon = \varepsilon(\eta, k) > 0$ e um inteiro positivo $n_0(\eta, k)$ com a seguinte propriedade. Suponha que G é um grafo 3-colorido em arestas de ordem $n > n_0$ com uma partição ε -regular multicolorida $V = V_1 \cup \dots \cup V_t$ que define o grafo cluster multicolorido $R = R(\eta)$. Seja F um grafo fixado de ordem k com um padrão de coloração predefinido \hat{F} . Se R contém \hat{F} , então o grafo G também contém F .*

Aliado a um resultado de estabilidade e outros resultados laterais, o lema acima é a principal ferramenta utilizada para provar o Teorema 2.3.1, que tem sua importância como um dos primeiros resultados relevantes em colorações de Gallai. Este teorema devido a Benevides, Hoppen e Sampaio (2017), cuja a ideia geral foi destacada nesta seção, apresenta uma técnica de prova que poderá ser aproveitada para outros padrões de coloração. A demonstração deste resultado, por fugir do escopo desta dissertação, a bem da simplificação do conhecimento, não será feita neste texto. O leitor pode conferir os detalhes no artigo supracitado.

Feita esta breve menção honrosa ao Lema da Regularidade de Szemerédi, que possibilita um melhor entendimento de como resultados anteriores sobre nosso tema foram obtidos, podemos partir para a próxima seção, que apresenta o método dos contêineres, uma outra ferramenta de prova também aplicada em questões de teoria extremal de grafos e que, para o nosso trabalho, se apresenta como ferramenta indispensável.

3.2 O método dos contêineres

O método dos contêineres é um instrumento de prova que envolve a análise de conjuntos independentes em hipergrafos. Entre outras várias aplicações, problemas como encontrar a quantidade grafos H -livres com n vértices, ou mesmo a estrutura típica de um grafo H -livre com n vértices e m arestas, podem ser atacados utilizando esta técnica. Para grafos, o método dos contêineres foi desenvolvido e formalizado por Sapozhenko (2001), mas antes disso, o primeiro resultado correlato deve-se a Kleitman e Winston (1982) e consiste em um modo de agrupar conjuntos independentes em blocos que chamaremos de contêineres. Apesar de fazermos aqui apenas uma menção ao trabalho de Sapozhenko (2001), nosso ponto focal é o método dos contêineres para hipergrafos, introduzido independentemente por Balogh, Morris e

Samotij (2015) e Saxton e Thomason (2015). Para tanto, começaremos, na primeira subseção, o estudo de conjuntos independentes em hipergrafos.

Conjuntos independentes em hipergrafos

Como já vimos anteriormente, um hipergrafo k -uniforme é uma generalização do conceito de grafo, de modo que uma hiperaresta é um conjunto com k vértices. Desta forma, um grafo nada mais é do que um hipergrafo 2-uniforme. Assim, dado um hipergrafo \mathcal{H} , a definição de conjunto independente é análoga: um conjunto $I \subseteq V(\mathcal{H})$ é independente se não existe hiperaresta $e \in E(\mathcal{H})$ com $e \subseteq I$.

Indo adiante, vejamos a seguir um exemplo, dado por Botler *et al.* (2022), em que é possível utilizar conjuntos independentes em hipergrafos para modelar um problema de Teoria Extremal dos Grafos.

Exemplo 3.A. Seja $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ o hipergrafo 3-uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = \binom{[n]}{2}$$

e

$$E(\mathcal{H}) = \{\{uv, uw, vw\} : \{u, v, w\} \in \binom{[n]}{3}\}.$$

Cada hiperaresta de \mathcal{H} corresponde a um triângulo em K_n .

Concluimos que um grafo G tal que $V(G) = \{1, \dots, n\}$ não possui K_3 como subgrafo se, e somente se, $E(G)$ é um conjunto independente no hipergrafo, \mathcal{H} , definido no exemplo acima. Na sequência desta subseção, apresentamos o resultado responsável por mudar os paradigmas de técnicas de prova para questões extremas.

Contêineres para hipergrafos 3-uniformes

Antes de enunciarmos os principais resultados desta seção, vamos definir alguns conceitos pendentes. Definimos o 2-grau máximo de um hipergrafo \mathcal{H} por

$$\Delta_2(\mathcal{H}) = \max_{\{u,v\} \subseteq V(\mathcal{H}); u \neq v} |\{e \in E(\mathcal{H}) : \{u, v\} \subseteq e\}|.$$

Dizemos, ainda, que $\mathcal{I}(\mathcal{H})$ é a família de conjuntos independentes do hipergrafo \mathcal{H} . Agora estamos prontos para enunciar o Lema dos Contêineres para hipergrafos 3-uniformes.

Lema 3.2.1. *Para todo $c \geq 1$, existe $\delta > 0$ tal que vale o seguinte. Seja \mathcal{H} um hipergrafo 3-uniforme com n vértices e grau médio $d = 3e(\mathcal{H})/n$. Se*

$$\Delta(\mathcal{H}) \leq cd \quad e \quad \Delta_2(\mathcal{H}) \leq c\sqrt{d},$$

então existem famílias $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$ e $\mathcal{C} \subseteq 2^{V(\mathcal{H})}$ e funções

$$S: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

tais que para todo $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, o conjunto $S(I)$ satisfaz

$$|S(I)| \leq \frac{n}{\sqrt{d}}, \quad S(I) \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad |C(S) - S| \leq (1 - \delta)n$$

Ainda de acordo com Botler *et al.* (2022), podemos notar a importância deste lema pensando o seguinte: seja \mathcal{U} uma família "bem comportada" de conjuntos U , o lema acima pode ser aplicado nos subhipergrafos induzidos $\mathcal{H}(C)$ para os $C \in \mathcal{C}$ que estejam em \mathcal{U} , repetindo o processo até que todos os contêineres satisfaçam $C \notin \mathcal{U}$. Dada a escolha da família \mathcal{U} , esta ideia de prova é bastante recorrente. Assim, apresentamos o seguinte teorema, que advém da aplicação iterada do Lema 3.2.1, até que cada conjunto pertencente à família de contêineres contenha apenas $o(e(\mathcal{H}))$ arestas de \mathcal{H} .

Teorema 3.2.2. *Para $c \geq 1$ e $\varepsilon > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que o seguinte vale. Seja \mathcal{H} um hipergrafo 3-uniforme com n vértices e grau médio $d = 3e(\mathcal{H})/n$. Se*

$$\Delta(\mathcal{H}) \leq cd \quad e \quad \Delta_2(\mathcal{H}) \leq c\sqrt{d}, \quad (*)$$

então existem famílias $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$ e $\mathcal{C} \subseteq 2^{V(\mathcal{H})}$ e funções

$$S: \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

tais que para todo $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, o conjunto $S(I)$ satisfaz

$$|S(I)| \leq \frac{\lambda n}{\sqrt{d}}, \quad S(I) \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad e(C(S) - S) \leq \varepsilon e(\mathcal{H})$$

Para melhor entedimento, considere o Exemplo 3.A, em que o hipergrafo \mathcal{H} codifica os triângulos de K_n . Para tal hipergrafo, temos que

$$v(\mathcal{H}) = \binom{n}{2}, \quad \Delta_2(\mathcal{H}) = 1, \quad e \quad d_{\mathcal{H}}(v) = n - 2$$

para todo $v \in v(\mathcal{H})$ e, portanto, a condição (*) do Teorema 3.2.2 é satisfeita com $c = 1$.

Caso geral do lema de contêineres

Nesta subseção, expandiremos nossos horizontes e apresentaremos o Lema dos Contêineres para grafos K -uniformes. Para tanto, antes precisamos apresentar a definição de i -grau máximo de um hipergrafo \mathcal{H} ,

$$\Delta_i(\mathcal{H}) = \max_{T \subseteq V(\mathcal{H}); |T|=i} |\{e \in E(\mathcal{H}) : T \subseteq e\}|.$$

Observe que, para um hipergrafo \mathcal{H} , $\Delta_1(\mathcal{H}) = \Delta(\mathcal{H})$ é o grau máximo de \mathcal{H} .

Lema 3.2.3. *Para todo $c \geq 1$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $\delta > 0$ tal que o seguinte vale. Seja \mathcal{H} um hipergrafo k -uniforme com n vértices e $\tau > 0$ satisfazendo*

$$\Delta_i(\mathcal{H}) \leq c\tau^{i-1} \frac{e(\mathcal{H})}{n}$$

para $i \in [k]$. Então existem famílias $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{I}(\mathcal{H})$ e $\mathcal{C} \subseteq 2^{V(\mathcal{H})}$, e funções

$$S : \mathcal{I}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{S} \quad e \quad C : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{C}$$

tais que para todo $I \in \mathcal{I}(\mathcal{H})$, o conjunto $S(I)$ satisfaz

$$|S(I)| \leq \tau n, \quad S(I) \subseteq I \subseteq C(S) \quad e \quad |(C(S) - S)| \leq (1 - \delta)n.$$

Percebamos que, quanto menor τ , mais forte se torna o resultado, visto que, assim, menor ficam os conjuntos da família \mathcal{S} e, conseqüentemente, o tamanho de \mathcal{S} e \mathcal{C} . Assim, o objetivo é sempre tomar τ menor possível (podendo depender de n) que satisfaça as condições do lema.

Veremos agora dois exemplos esclarecedores de hipergrafos com uniformidade maior que três, que codificam outros problemas. Desta forma, no exemplo abaixo, dado k natural, codificamos progressões aritméticas inteiras de tamanho k , as quais, doravante, nos referiremos como k -PA.

Exemplo 3.B. Seja $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ o hipergrafo k -uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = [n] \quad e \quad E(\mathcal{H}) = \{\{a, a+d, \dots, a+(k-1)d\} \subseteq [n] : a, d \in [n]\}.$$

É fácil ver que, no hipergrafo do Exemplo 3.B, os conjuntos independentes são exatamente os conjuntos sem k -PA. Notemos que

$$e(\mathcal{H}) = \Theta(n^2), \quad \Delta_1(\mathcal{H}) \leq n \quad e \quad \Delta_i(\mathcal{H}) = O(1)$$

para $2 \leq i \leq k$, onde $O(1)$ depende apenas de k . Desta forma, é trivial perceber que as condições do Lema dos contêineres são satisfeitas, para alguma constante $c = c(k)$, quando $\tau = n^{-1/(k-1)}$. O próximo exemplo modela, com hipergrafos, fixado um grafo F , cópias deste grafo.

Exemplo 3.C. Fixado um grafo F , seja $k = e(F)$ e $\mathcal{H} = \mathcal{H}_n$ um hipergrafo k -uniforme no qual

$$V(\mathcal{H}) = E(K_n) \quad \text{e} \quad E(\mathcal{H}) = \{T \subseteq K_n : T \text{ é cópia de } F\}.$$

Agora, avançamos em direção à versão do método dos contêineres para hipergrafos que desejamos usar no capítulo 4. Contudo, antes de enunciarmos esta versão, desenvolvida por Balogh e Solymosi (2017), devemos introduzir algumas definições. Seja \mathcal{H} um hipergrafo k -uniforme. Escrevemos $d_{\mathcal{H}}$ como sendo o grau médio dos vértices de \mathcal{H} . Quando não houver dúvida quanto ao hipergrafo tratado, nos referimos a $d_{\mathcal{H}}$ apenas como d e, a $\Delta_j(\mathcal{H})$, apenas como Δ_j . Denotamos, ainda, que, se \mathcal{H} é um hipergrafo k -uniforme e $0 < \tau < 1$,

$$\Delta(\mathcal{H}, \tau) = 2^{\binom{k}{2}-1} \sum_{j=2}^k 2^{-\binom{j-1}{2}} \frac{\Delta_j}{d\tau^{j-1}}.$$

Teorema 3.2.4. *Seja \mathcal{H} um hipergrafo k -uniforme com $V(\mathcal{H}) = [N]$. Tome $0 < \varepsilon < 1/2$ e $0 < \tau < 1/2$. Suponha que $\tau < 1/(200k!^2k)$ e $\Delta(\mathcal{H}, \tau) < \varepsilon/(12k!)$. Então existe $c = c(k) \leq 1000k!^3k$ e uma coleção de subconjunto de vértices \mathcal{C} tal que:*

1. *Todo conjunto independente em \mathcal{H} é um subconjunto de algum $A \in \mathcal{C}$;*
2. *Para todo $A \in \mathcal{C}$, $e(A) \leq \varepsilon e(\mathcal{H})$;*
3. $\log|\mathcal{C}| \leq cN\tau \log(1/\varepsilon) \log(1/\tau)$.

A versão acima do Teorema dos Contêineres para hipergrafo foi a utilizada por Balogh e Li (2019) para resolver o problema de contagem de colorações de Gallai no grafo completo. Aliado a este resultado, os autores modelaram o problema com hipergrafos da forma do próximo exemplo de modelagem.

Exemplo 3.D. Seja r natural, definimos \mathcal{H} o hipergrafo 3-uniforme com conjunto de vértices igual a $E(K_n) \times [r]$ e tal que as arestas são as triplas (não ordenadas) $\{(e_1, d_1), (e_2, d_2), (e_3, d_3)\}$ tais que e_1, e_2 e e_3 formam um triângulo em K_n e d_1, d_2 e d_3 são diferentes dois a dois.

Veja que, em outras palavras, estamos modelando \mathcal{H} de modo que cada hiperaresta corresponda a triângulo rainbow de K_n . O que resume o problema de contagem de colorações de Gallai a buscar conjuntos independentes no \mathcal{H} definido. Neste momento estamos prontos para modelar o problema do K_3 -rainbow-livre através de hipergrafos e atacá-lo pelo método dos contêineres, como faremos a seguir a seguir na próxima subseção.

Aplicando contêineres ao problema do K_s -rainbow-livre

Um r -template de ordem n é uma função $T : E(K_n) \rightarrow 2^{[r]}$ que associa cada aresta e a uma lista de cores $T(e)$. O conjunto $T(e)$ é também denominado *paleta* de e . Dizemos que T' é um subtemplate de T e escrevemos $T' \subseteq T$, se $T'(e) \subseteq T(e)$ para cada $e \in E(K_n)$.

Veja que também podemos visualizar um r -template T de ordem n como um subconjunto do conjunto $E(K_n) \times [r]$ e, conseqüentemente, um subtemplate de T como um subconjunto de T . Para um r -template T , definimos $R_s(T)$ como sendo o número de subtemplates de T que são (exatamente) rainbow- K_s . Dizemos que um r -template T é K_s -rainbow-livre se $R_s(T) = 0$. Também definimos $NR_s(T)$ como o número de K_s -rainbow-livre r -colorações de K_n induzidas por T . Estendemos a definição de $NR_s(\cdot)$ para uma família de templates \mathcal{T} colocando

$$NR_s(\mathcal{T}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} NR_s(T).$$

Seja \mathcal{H}_{K_s} um hipergrafo $\binom{[s]}{2}$ -uniforme tal que

1. $V(\mathcal{H}_{K_s}) = E(K_n) \times [r]$;
2. $E(\mathcal{H}_{K_s}) = \left\{ \left\{ (e_1, c_1), \dots, (e_{\binom{s}{2}}, c_{\binom{s}{2}}) \right\} \subset V(\mathcal{H}) : K_n \left[\{e_1, \dots, e_{\binom{s}{2}}\} \right] = K_s \text{ e } c_i \neq c_j \forall i \neq j \right\}$.

Observe que qualquer r -coloração K_s -rainbow-livre de K_n induz um conjunto independente em \mathcal{H}_{K_s} . Por outro lado, temos que qualquer subhipergrafo induzido \mathcal{H}' de \mathcal{H}_{K_s} induz um r -template T .

Dizemos que um r -template T é $g(n)$ -viável se

1. Para todo $e \in E(K_n)$, temos $|T(e)| \geq 1$;
2. $R_s(T) \leq g(n) \binom{n}{s}$.

Quando $g(n)$ estiver claro, referir-nos-emos a ele como template viável, ao invés de template $g(n)$ -viável.

Teorema 3.2.5. *Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $g(n) \cdot n \rightarrow \infty$ e $g(n) \rightarrow 0$. Para todo $s \geq 3$ e $r \geq \binom{s}{2} := \ell$ existe um $n_0 > 0$ tal que vale o seguinte. Para todo $n \geq n_0$, existe uma coleção de templates \mathcal{T} , para r -colorações de K_n , e uma função $C = c(r)$, que depende apenas de r , tal que*

1. todo r -template K_s -rainbow-livre é um subtemplate de algum template de \mathcal{T} ;
2. para todo $T \in \mathcal{T}$, temos que $R_s(T) \leq g(n) \binom{n}{s}$;

$$3. \log_2 |\mathcal{T}| \leq C \cdot (g(n)n)^{-1/\ell} \cdot \log(1/g(n)) \cdot \log(g(n)n) \cdot \binom{n}{2}.$$

O Teorema 3.2.5 é uma aplicação direta da versão do teorema de contêineres (Teorema 3.2.4) em hipergrafos obtida por Balogh e Solymosi (2017). Apresentamos a prova deste resultado a seguir.

Demonstração. Sejam $g(n)$ e r como no enunciado e $\ell = \binom{s}{2}$. Seja \mathcal{H}_{K_s} o hipergrafo $\binom{s}{2}$ -uniforme descrito acima. Definimos

$$\tau = \left(\frac{12\ell s^s \ell!^2 2^\ell \binom{r}{\ell}}{rg(n)n} \right)^{1/\ell} \quad \text{e} \quad \varepsilon = \frac{g(n)}{\binom{r}{\ell} \ell!}.$$

Como todo r -template T' que é K_s -rainbow-livre está codificado como conjunto independente em $\mathcal{H}_s = \mathcal{H}_{K_s}$, nosso objetivo é utilizar o Teorema 3.2.4. para tanto, primeiro precisamos calcular Δ_i , para todo $i \in [\binom{s}{2}]$, e d para definir $\Delta(\mathcal{H}_s, \tau)$. Para $i \in [\binom{s}{2}]$, note que como cada vértice em \mathcal{H}_s representa uma aresta colorida em K_s , o conjunto $\{v_1, \dots, v_i\} \subset V(\mathcal{H}_s)$ tal que $d(\{v_1, \dots, v_i\}) = \Delta_i$ é formado por um conjunto de arestas tão agrupadas quanto possível. Por isso, para $2 \leq x \leq s$ e $\binom{x-1}{2} < y \leq \binom{x}{2}$, temos que

$$\Delta_y = \binom{n-x}{s-x} \binom{r-y}{\ell-y} (\ell-y)! = \binom{n-x}{s-x} \frac{(r-y)!}{(r-\ell)!}. \quad (3.1)$$

Por outro lado, temos que \mathcal{H}_s é Δ_1 regular, logo seu grau médio é

$$d = \Delta_1 = \binom{n-2}{s-2} \frac{(r-1)!}{(r-\ell)!}.$$

Note que para $y \geq 2$, temos que $x \geq 3$, e portanto, para $y \geq 2$ fixado e assumindo n suficientemente grande, temos que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_y}{d} &= \frac{(n-x)! (s-2)! (r-y)!}{(s-x)! (n-2)! (r-1)!} \\ &< \frac{s^{x-2}}{(r-1)(n-2)} < \frac{2s^x}{rn} < \frac{2s^s}{rn}. \end{aligned}$$

Lembrando que para n grande, $\tau < 1$, temos também que,

$$\begin{aligned}
\Delta(\mathcal{H}_s, \tau) &= 2^\ell \sum_{j=2}^{\ell} 2^{-(j-1)} \frac{\Delta_j}{d\tau^{j-1}} \\
&< 2^\ell \sum_{j=2}^{\ell} \frac{s^s}{rn\tau^\ell} \\
&< 2^\ell \frac{s^s}{rn\tau^\ell} \cdot \ell \\
&= \frac{g(n)}{12\ell!^2 \binom{r}{\ell}} \\
&= \frac{\varepsilon}{12\ell!}.
\end{aligned}$$

Logo, podemos aplicar o Teorema 3.2.4 com estes parâmetros em \mathcal{H}_s e obter uma família de subconjunto de vértices \mathcal{T} com as condições desejadas.

Para mostrar isto, note que os itens 1 e 2 do Teorema 3.2.5 são, respectivamente, releituras diretas dos itens 1 e 2 do Teorema 3.2.4.

Para o terceiro item do Teorema 3.2.5, vamos usar o terceiro item do Teorema 3.2.4. Lembre-se de que $N := |V(\mathcal{H}_s)| = \binom{n}{2}r$. Queremos apenas destacar os termos que dependem de n e separá-los das constantes. Para isso, vamos usar uma notação para fazer o próximo cálculo ficar mais claro. Defina $c_\tau = \tau^\ell g(n)n$, $c_\varepsilon = \varepsilon/g(n)$ e note que c_τ e c_ε são limitadas superiormente por uma função de r . Vamos ainda usar o fato de que, para n suficientemente grande, temos que $g(n) \rightarrow 0$ e $g(n) \cdot n \rightarrow \infty$, logo

$$\log\left(\frac{1}{c_\varepsilon g(n)}\right) < 2\log(1/g(n)) \quad \text{e} \quad \log\left(\frac{g(n)n}{c_\tau}\right) < 2\log(g(n)n).$$

Finalmente, pelo terceiro item do Teorema 3.2.4, temos que

$$\begin{aligned}
\log|\mathcal{T}| &\leq c \cdot \binom{n}{2} r \left(\frac{c_\tau}{g(n)n}\right)^{1/\ell} \log\left(\frac{1}{c_\varepsilon g(n)}\right) \log\left(\left(\frac{c_\tau}{g(n)n}\right)^{-1/\ell}\right) \\
&\leq cr \cdot c_\tau^{1/\ell} (g(n)n)^{-1/\ell} \cdot 2\log(1/g(n)) \cdot \frac{1}{\ell} \log\left(\frac{g(n)n}{c_\tau}\right) \binom{n}{2} \\
&\leq \frac{4cr \cdot c_\tau^{1/\ell}}{\ell} (g(n)n)^{-1/\ell} \cdot \log(1/g(n)) \cdot \log(g(n)n) \cdot \binom{n}{2}.
\end{aligned}$$

como desejado. □

3.3 Estabilidade

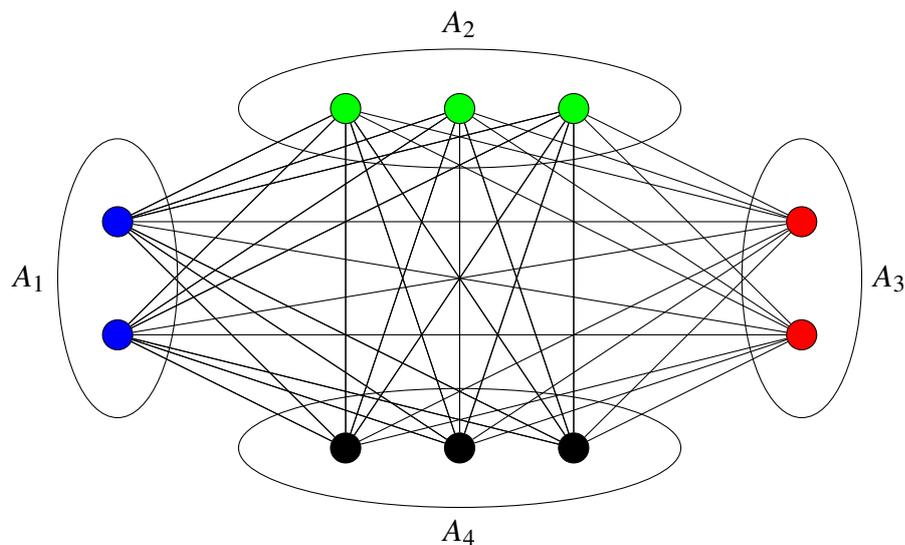
Outra ferramenta importante é o conceito de estabilidade em grafos que, grosseiramente, trata de como as propriedades de um grafo com uma quantidade de arestas $ex(n, F)$ se

mantêm ou mudam quando este grafo é perturbado em seu número de arestas (isto é, quando são adicionadas ou retiradas t arestas desta configuração). Apesar de darmos destaque a isto, pois precisaremos utilizar um resultado de estabilidade na demonstração de nosso resultado principal, não iremos nos aprofundar muito neste sentido, restringindo-nos a apenas dar uma motivação geral e chegar ao anunciado do teorema que iremos utilizar.

O conceito de estabilidade em grafos está intimamente ligado ao conceito mais geral de Teoria Extremal dos Grafos. Esta última é norteada pela seguinte pergunta: qual é o número máximo de arestas que podemos ter em um grafo de ordem n de forma a evitar um subgrafo específico? Em outras palavras, a Teoria Extremal dos Grafos busca, dado um grafo H , o valor de $ex(n, H)$. Podemos citar como resultados introdutórios desta área de pesquisa o Teorema de Mantel (1907) e sua generalização, o Teorema de Turán (1941).

O primeiro afirma que $ex(n, K_3) \leq \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ e que um grafo G atinge esta cota se, e somente se, G é o grafo bipartido completo balanceado de ordem n , isto é, $G = K_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$. O segundo generaliza o resultado obtido por Mantel e afirma que se $n, k \in \mathbb{N}$ e G é um grafo K_{k+1} -livre de ordem n , então $e(G) \leq t_k(n)$ e G atinge a cota máxima se, e somente se, $G = T_k(n)$, onde $T_k(n)$ é o grafo k -partido completo, de ordem n , com o maior número de arestas possível, ao passo que $t_k(n) := e(T_k(n))$. O grafo $T_k(n)$ é conhecido como *grafo de Turán k -partido de ordem n* , ou simplesmente *grafo de Turán* quando não houver risco de confusão com os parâmetros. Vejamos a seguir uma representação do grafo $T_4(10)$.

Figura 4 – Uma representação do grafo $T_4(10)$



Fonte: elaborada pelo autor.

Feita esta breve menção a resultados clássicos desta área, o que realmente nos

interessa introduzir nesta seção é a noção de estabilidade em grafos. Esta noção se dá pela seguinte pergunta: dado um grafo H qualquer, como pode ser mudada a estrutura de um grafo extremal H -livre ao se introduzir ou retirar algumas arestas dele? Ou seja, estamos interessados em saber como a estrutura de um grafo extremal é perturbada em função de uma perturbação na quantidade arestas.

Mais formalmente, dados H grafo e $t > 0$, o pode ser concluído sobre a estrutura de um grafo H -livre com $ex(n, H) - t$ arestas? podemos também nos perguntar quantas cópias de H , em função de t , podemos obter em um grafo com $ex(n, H) + t$ arestas? Focaremos nossos esforços em responder algumas questões relacionadas à primeira pergunta, que são conhecidas como *resultados de estabilidade*. Em geral, os teoremas de estabilidade buscam provar que se o t mencionado não é grande, então a estrutura do grafo G livre de triângulos obtidos é similar à estrutura do grafo extremal. A segunda pergunta relaciona-se com os chamados *resultados de supersaturação*, para o qual também apresentamos alguns teoremas. Relacionado com o teorema de Mantel, o teorema a seguir nos dá, para o grafo K_3 , um resultado de supersaturação e estabilidade.

Teorema 3.3.1. *Sejam $n, t \in \mathbb{N}$ e G um grafo de ordem n .*

1. *Se G é livre de triângulos e $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, então existe um subgrafo de G que é bipartido e contém, no mínimo, $e(G) - t$ arestas.*
2. *Se $e(G) \geq \frac{n^2}{4} + t$, então G contém, no mínimo, $\frac{tn}{3}$ triângulos.*

Resultados como o Teorema 3.3.1 e outros relativos à estabilidade em grafos são conhecidos e utilizados como ferramentas há várias décadas. Contudo, é natural tentar, de alguma forma, generalizar o resultado acima para um grafo completo de ordem maior do que 3. Em outras palavras, é conveniente perguntar o que acontece com um grafo G , de ordem n , K_{k+1} -livre com um número de arestas próximo a $t_k(n)$. Esta pergunta só foi respondida por Füredi (2015), no que podemos dizer ser o principal teorema de estabilidade atualmente, não por si só, mas também pela ideia que utiliza na prova e pela grande variedade de resultados similares.

Teorema 3.3.2. *Sejam $n, k \in \mathbb{N}$, $t \geq 0$ e G um grafo em n vértices, K_{k+1} -livre. Se*

$$e(G) \geq t_k(n) - t,$$

então existe um subgrafo gerador de G que é k -partido e tem, no mínimo, $e(G) - t$ arestas.

Demonstração. A prova deste teorema segue por indução em k . Com efeito, o caso base $k = 1$ é trivial, visto que se G não tem cópias de K_2 , então G não pode ter arestas, o que faz com que o resultado seja óbvio. Agora, se $k \geq 2$, suponhamos que o teorema valha para $k - 1$ e que G seja como no enunciado.

Sejam $d := \Delta(G)$ e $u \in V(G)$ tal que $d(u) = d$, $B = N_G(u)$ e $G' = G[B]$. Como G é K_{k+1} -livre, em particular, G' é K_k -livre e, pelo Teorema de Turán, temos que $e(G') \leq t_{k-1}(d)$. Definindo $t' := t_{k-1}(d) - e(G')$, temos que $t' \geq 0$. Decorre da hipótese de indução que existe $H' \subseteq G'$ tal que H' é $(k - 1)$ -partido e $e(H') \geq e(G') - t'$.

Vamos mostrar que o grafo k -partido H tal que $V(H) = V(H') \cup V(A) = V(G)$ e $E(H) = E(H') \cup E(A, H')$, onde $A := V(G) - B$, tem pelo menos $e(G) - t$ arestas. Para tanto, vejamos que

$$\sum_{v \in A} d(v) = 2e(A) + e(A, B) = e(G) + e(A) - e(G').$$

Visto que $|A| = n - |B| = n - \Delta(G) = n - d$, temos que

$$d(n - d) \geq \sum_{v \in A} d(v) = e(G) + e(A) - e(G').$$

Observe agora que $t_k(n) \geq t_{k-1}(d) + d(n - d)$, pois existe um grafo k -partido cujo número de arestas é igual ao lado direito deste inequação. Desta forma, visto que $e(G) \geq d(n - d)$ e que $t_{k-1}(d) - t'$, chegamos à seguinte inequação:

$$e(G) - e(G') \geq d(n - d) - t + t'.$$

Ora, como $d(n - d) \geq \sum_{v \in A} d(v) = e(G) + e(A) - e(G')$, então $e(A) \leq d(n - d) - (e(G) - e(G')) \leq t - t'$. Segue que, pela definição de H ,

$$e(H) \geq e(G) - e(A) - t' \geq e(G) - t,$$

como queríamos demonstrar. □

Para melhor ainda ilustrar a importância dos resultados de estabilidade de Füredi (2015), apresentamos na sequência um teorema que tem como corolário o Teorema 3.3.1. O resultado a seguir é consequência direta do trabalho do autor. Antes do enunciado, porém, devemos introduzir duas definições. Dizemos que G é t -longe de ser bipartido se para todo subgrafo bipartido H de G , vale que $e(H) \leq e(G) - t$. Perceba que se um grafo G se encaixa nesta definição, isto significa que é necessário remover pelo menos t arestas de G para transformá-lo em um grafo bipartido. Por outro lado, Dizemos que um grafo G é t -próximo de ser bipartido se existe um subgrafo gerador bipartido H de G tal que $e(H) \geq e(G) - t$.

Teorema 3.3.3. *Dados $n, t \in \mathbb{N}$ e G um grafo de ordem n , se G é t -longe de ser bipartido, então existem pelo menos*

$$\frac{n}{6} \left(e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right)$$

triângulos em G

Como o Teorema 3.3.3 foge um pouco do escopo central deste trabalho e serve apenas como referência de resultado de estabilidade, apresentaremos apenas um esboço de prova para ele.

Esboço de Prova. Para demonstrar o teorema, precisamos notar que $k_3(G) = \frac{1}{3} \sum_{u \in V(G)} e(B_u)$, onde $k_3(G)$ é a quantidade de triângulos em G , $B_u = N_G(u)$ e $A_u = V(G) - B_u$. Em seguida, é preciso observar que, para cada $u \in V(G)$, $e(A_u) + e(B_u) \geq t$ e $e(B_u) = e(G) + e(A_u) - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$. Destas últimas inequações segue que $2e(B_u) \geq e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v)$ e, conseqüentemente, que

$$k_3(G) \geq \frac{1}{6} \sum_{u \in V(G)} \left(e(G) + t - \sum_{v \in A_u} d_G(v) \right)$$

e, portanto, como

$$\sum_{u \in V(G)} \left(\sum_{v \in A_u} d_G(v) \right) = \sum_{u \in V(G)} (d_G(v) \cdot (n - d_G(v))) \leq \frac{n^3}{4}$$

segue que

$$k_3(G) \geq \frac{n}{6} \left(e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right).$$

Agora, vejamos que Teorema 3.3.1 é corolário do Teorema 3.3.3. No item 1, veja que se fosse G $(t+1)$ -próximo de ser bipartido com $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, então pelo teorema acima enunciado, teríamos que G teria que conter pelo menos

$$\frac{n}{6} \left(e(G) + t + 1 - \frac{n^2}{4} \right) > 0$$

triângulos. Portanto, como na hipótese do item 1 temos que G deve ser livre de triângulos, com $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$, então G é t -próximo de ser bipartido, o que prova o primeiro item. Quanto ao segundo item, vejamos que se G é como no enunciado, pelo Teorema de Mantel, G está t -longe de ser bipartido e, portanto, pelo Teorema 3.3.1, segue que

$$\frac{n}{6} \left(e(G) + t - \frac{n^2}{4} \right) \geq \frac{n}{6} \left(\frac{n^2}{4} + t + t - \frac{n^2}{4} \right) = \frac{tn}{3}.$$

O que prova o item 2, como queríamos.

Agora, seguindo ideia similar à de Füredi (2015), provaremos o resultado de estabilidade a seguir, que será fundamental para demonstrarmos outros teoremas mais importantes adiante. Vale ressaltar que, como mencionado anteriormente, a importância da demonstração é dada principalmente pela técnica utilizada, que pode ser aproveitada em outras provas de teoremas de estabilidade. Mais especificamente, a técnica consiste em bipartir o conjunto de vértices de tal maneira que uma das partes é a vizinhança de um vértice de grau máximo.

Teorema 3.3.4. *Sejam $z > 0$ e $t \in \mathbb{R}$ dados. Seja G um grafo de ordem n tal que $e(G) \geq \frac{n^2}{4} - t$. Se para toda $uv \in E(G)$ temos que $N(u, v) \leq z$, então existe uma partição $V(G) = V_1 \cup V_2$ tal que $e(V_1) + e(V_2) \leq t + zn$.*

Demonstração. Sejam z, t e G como no enunciado. Seja $v \in V(G)$ um vértice tal que $d(v) = \Delta(G)$. Tome $V_2 = N(v)$ e $V_1 = V(G) \setminus V_2$. Afirmamos que $V(G) = V_1 \cup V_2$ é a partição desejada. Para ver isto, primeiro, note que se $x \in V_2$, então $vx \in E(G)$ e $N(x) \cap V_2 \subseteq N(v, x)$, implicando $|N(x) \cap V_2| \leq z$. Logo,

$$e(V_2) = \frac{1}{2} \sum_{x \in V_2} d_{V_2}(x) \leq \frac{zn}{2}.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{x \in V_1} d(x) &= 2e(V_1) + e(V_1, V_2) \\ &= e(V_1) + e(G) - e(V_2) \\ &\geq e(V_1) - e(V_2) + \frac{n^2}{4} - t \end{aligned}$$

e $\sum_{x \in V_1} d(x) \leq \Delta(G)(n - \Delta(G)) \leq \frac{n^2}{4}$. Concluimos que

$$e(V_1) \leq t + e(V_2) \leq t + \frac{zn}{2},$$

como desejado. □

Continuando com resultados de estabilidade necessários para a prova de nosso resultado principal, enunciamos agora um resultado obtido por Hoppen, Lefmann e Odermann (2017b).

Teorema 3.3.5. *Seja $G = (V, E)$ um grafo $(k-1)$ -partido em m vértices com a $(k-1)$ -partição $V = V_1 \cup \dots \cup V_{k-1}$. Se, para algum $t \geq (k-1)^2$, o grafo G contém pelo menos $ex(m, K_k) - t$ arestas, então para $i \in \{1, \dots, k-1\}$, temos*

$$\left| |V_i| - \frac{m}{k-1} \right| < \sqrt{2t}.$$

Para encerrar esta seção e, conseqüentemente, o capítulo, enunciaremos e, a fim de facilitar o entendimento das demonstrações contidas no capítulo de resultados, escrevemos formalmente a devida prova do seguinte lema.

Lema 3.3.6. *Seja G um grafo de ordem n bipartido, com $V = A \cup B$. Dados $\alpha = \alpha(n) < \frac{1}{2}$ e $\varepsilon = \varepsilon(n) \leq \frac{1}{2} - \alpha$ a seguinte afirmação é válida. Se $|E(G)| \geq (1 - \varepsilon)\frac{n^2}{4}$, então existem no máximo $\frac{2\varepsilon}{1-2\alpha}|A|$ vértices em A com grau no máximo $(\frac{1}{2} + \alpha)|B|$.*

Demonstração. Por contradição, assuma que temos mais do que $\frac{2\varepsilon}{1-2\alpha}|A|$ vértices em A com grau no máximo $(\frac{1}{2} + \alpha)|B|$. Seja $Z \subseteq A$ este conjunto de vértices. Assim, teríamos:

$$\begin{aligned}
 (1 - \varepsilon)\frac{n^2}{4} &\leq |E(G)| \\
 &= \sum_{v \in Z} d(v) + \sum_{v \in A \setminus Z} d(v) \\
 &\leq |Z| \left(\frac{1}{2} + \alpha \right) |B| + (|A| - |Z|)|B| \\
 &= \left(|A| + \left(\alpha - \frac{1}{2} \right) |Z| \right) |B| \\
 &< (|A| - \varepsilon|A|) |B| \\
 &= (1 - \varepsilon)|A||B| \\
 &\leq (1 - \varepsilon)\frac{n^2}{4},
 \end{aligned}$$

que é a contradição desejada. □

4 RESULTADO

Neste capítulo, com o auxílio das ferramentas apresentadas no capítulo anterior, provaremos nosso teorema principal, dividindo a explicação em três seções. Na primeira seção, através de uma construção que evita K_4 -rainbow, demonstraremos uma cota inferior não trivial para r -colorações do K_n livres de K_4 -rainbow, a qual acreditamos ser a de melhor ordem possível (a saber, a cota inferior encontrada é $r^{1+\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor}$).

Na segunda seção observaremos os templates que geram muitas colorações k_4 -rainbow-livres de K_n , isto é, templates T tais que $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}$, onde $\delta(n)$ é uma função $o(1)$. Para estes templates provaremos um teorema de estabilidade (Teorema 4.2.4), que é o principal resultado desta seção e nos auxiliará na prova do principal teorema deste dissertação (Teorema 4.3.1).

A última seção, por sua vez, é separada para formalizarmos a prova do resultado mais importante e maior objetivo deste texto (Teorema 4.3.1), que consiste em uma cota superior não trivial para a quantidade de r -colorações K_4 -rainbow-livres do K_n . Tal resultado é uma aplicação direta do método dos contêineres para hipergrafos, especificamente do Teorema 3.2.5, aliado ao nosso resultado de estabilidade contido na segunda seção deste capítulo (Teorema 4.2.4).

4.1 Cota inferior para r -colorações k_4 -rainbow-livres de K_n

Para começar a pensar sobre uma cota inferior para r -colorações K_4 -rainbow-livres de K_n , é interessante recapitularmos o que foi descoberto sobre Colorações de Gallai (aquelas que evitam triângulos rainbow). Ora, o estado da arte a respeito do tema nos diz que a *maioria* das r -colorações de Gallai são, na verdade, 2-colorações. Podemos formalizar a noção de *maioria* da seguinte forma: se $c(n, r)$ é a quantidade de r -colorações de Gallai do K_n , então dizemos que *a maioria das r -colorações de Gallai são 2-colorações* quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n, 2)}{c(n, r)} = 1$. De fato esse resultado foi provado independentemente por Bastos, Benevides e Han (2018) e Balogh e Li (2019). Bastos, Benevides e Han provaram um resultado mais forte, onde o número de colorações $r = r(n)$ pode ir ao infinito, limitado superiormente pela função $2^{n/4300}$, enquanto Balogh e Li provaram que, para cada r fixado, o limite acima é válido.

Portanto, é natural nos perguntarmos se existe um resultado similar para para r -colorações K_4 -rainbow-livres. Ora, apesar de imaginarmos um resultado análogo (isto é, um resultado em que a grande maioria das colorações sejam 5-colorações), devemos observar que

um triângulo tem propriedades únicas que não se encontram em outras cliques. Por exemplo, o triângulo é o único ciclo que também é grafo completo, o que nos faz pensar se a propriedade que desejamos vem por conta do triângulo ser um ciclo, porque é um grafo completo, ou nenhuma das duas opções.

Sabendo disso, tentaremos encontrar semelhanças e diferenças entre o caso dos triângulos rainbow e das cliques rainbow de ordem 4. Em particular, poderíamos pensar que as r -colorações K_4 -rainbow-livres seriam, em maioria, na verdade, 5-colorações, já que toda 5-coloração é obrigatoriamente K_4 -rainbow-livre, o que não acontece com r -colorações quando $r \geq 6$. Para formalizarmos esta ideia, vamos primeiro contar o número de 5-colorações de um grafo K_n .

Como dito no parágrafo anterior, é trivial perceber que, com 5 cores disponíveis, podemos colorir o K_n de $5^{\binom{n}{2}}$ distintas e, evidentemente, todas elas são K_4 -rainbow-livres, já que o K_4 possui 6 arestas. Mas veja que, se tivermos $r \geq 5$ cores disponíveis, podemos escolher de $\binom{r}{5}$ maneiras distintas, entre estas, 5 cores. Ao multiplicar $\binom{r}{5}$ por $5^{\binom{n}{2}}$ estaríamos contando uma mesma coloração mais de uma vez. De toda forma, a quantidade de 5-colorações de K_n é no máximo $r^5 5^{\binom{n}{2}}$. Assim, esta ideia de contar 5-colorações nos dá uma cota inferior para r -colorações K_4 -rainbow-livres de ordem que não chega a ser tão boa quanto $r^5 5^{\binom{n}{2}}$.

Agora vamos imaginar uma maneira alternativa de conseguir colorações (com r cores disponíveis) do K_n que evitem um K_4 -rainbow, que nos dá um número maior de colorações quanto r é grande. Uma boa maneira de fazer isto é bipartindo o conjunto de vértices do grafo completo a ser colorido e pintando, de uma cor fixada, todas as arestas em que ambas as extremidades caem dentro da mesma parte. Com efeito, começaremos formalizando este pensamento com o lema a seguinte.

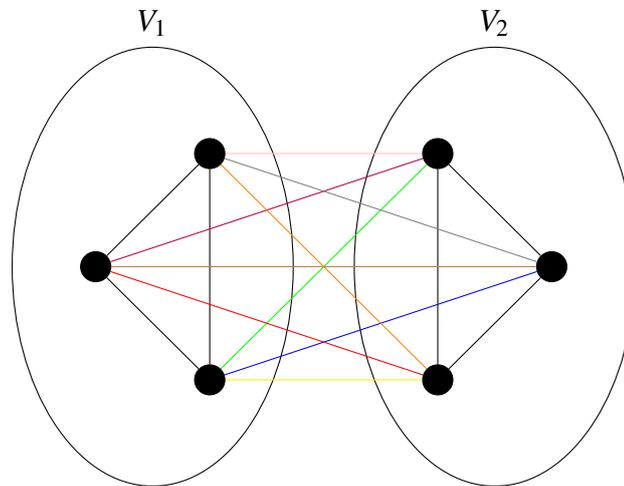
Lema 4.1.1. *Seja G um grafo completo de ordem $n \geq 4$ e $V(G) = V_1 \cup V_2$ uma bipartição do conjunto de vértices de G tal que $|V_1| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ e $|V_2| = \lceil \frac{n}{2} \rceil$, Toda cópia do K_4 em G possui pelo menos 2 de suas arestas em $E(V_1) \cup E(V_2)$*

Demonstração. Suponha por contradição que H seja uma cópia do K_4 contida no K_n que tenha mais que 4 arestas em comum com $E(V_1, V_2)$. Se este H existe, é possível então remover uma aresta dele de tal forma que grafo resultante esteja contido em $G[V_1, V_2]$ (digamos $H' = H - e \subseteq G[V_1, V_2]$). Observe que o grafo $G[V_1, V_2]$ é o grafo de Turán $T_2(n)$ e, como tal, não contém triângulos como subgrafo. Por outro lado, $e(H') = 5 > 4 = \frac{4^2}{4} = \frac{|V(H')|^2}{4}$ e, pelo Teorema de

Mantel, H' contém ao menos um triângulo como subgrafo (Digamos T). Como $T \subseteq H' \subseteq G[V_1, V_2]$, temos, então, uma contradição. \square

Ora, se V_1 e V_2 como no enunciado do lema anterior, fixada uma cor p , se colorirmos $E(V_1)$ e $E(V_2)$ com esta cor p , teremos um K_n livre de K_4 rainbow, independente da maneira que sejam coloridas as arestas do conjunto $E(V_1, V_2)$, pois, pelo Lema 4.1.1, qualquer K_4 colorido terá pelo menos duas arestas da cor p , o que evita que ele seja rainbow. Esta observação feita prova próximo lema que iremos enunciar. Veja, na figura a seguir, um exemplo do K_6 colorido da maneira descrita neste parágrafo.

Figura 5 – K_6 colorido livre de K_4 -rainbow



Fonte: elaborada pelo autor.

Lema 4.1.2. *Seja $V(K_n) = V_1 \cup V_2$ uma bipartição balanceada, fixada uma cor p , se c é uma coloração de K_n tal que $c(e) = p$ para todo $e \in E(V_1) \cup E(V_2)$, então c é K_4 -rainbow-livre.*

Demonstração. Segue trivialmente pelas observações feitas no parágrafo anterior. \square

Ora, dito isto, fixada uma partição $V(K_n) = V_1 \cup V_2$ contamos quantas colorações possuem todas as arestas internas a V_1 ou a V_2 de uma mesma cor. Veja que, bipartindo balanceadamente $V(K_n)$ em V_1, V_2 , considerando uma r -coloração, temos r formas de colorir $E(V_1) \cup E(V_2)$ como no Lema 4.1.2. Por outro lado, podemos colorir da maneira que quisermos as arestas em $E(V_1, V_2)$, ou seja, como entre V_1 e V_2 existem $t_2(n) = \lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arestas, então existem $r^{t_2(n)}$ formas de colorir o conjunto $E(V_1, V_2)$. Por fim, pelo princípio multiplicativo, segue que existem, com r cores disponíveis, $r \cdot r^{t_2(n)} = r^{1+t_2(n)}$ colorações de K_n com as mesmas propriedades de c do lema anterior. Agora, podemos enunciar o teorema seguinte, que fica óbvio após a observação feita neste parágrafo.

Teorema 4.1.3. *Sejam $n \geq 3$ e r naturais, então $c_4(n, r) \geq r^{1+t_2(n)}$.*

Demonstração. Segue trivialmente das observações anteriores. \square

Observe que a cota inferior $r^{1+t_2(n)}$ é melhor que $5^{\binom{n}{2}}$ apenas para $r > 25$. De toda forma, ambas as cotas contabilizam apenas um subconjunto das colorações viáveis.

Após encontrarmos a cota inferior do Teorema 4.1.3, é natural nos perguntarmos se, com a mesma técnica utilizada, podemos aumentar a ordem da cota inferior. A saber, fixar um certo conjunto de arestas para colorir todas de uma mesma cor e colorir as demais arestas livremente. Seja h_n o mínimo de aresta que um grafo G de ordem n deve ter para garantir que qualquer conjunto de 4 vértices induza em G pelo menos duas arestas. Ora, se K_4^- é o grafo K_4 com uma aresta removida, é fácil ver que $h_n = \binom{n}{2} - ex(n, K_4^-)$. Agora vejamos que $\chi(K_3) = \chi(K_4^-)$ e lembremos do Corolário 3.1.3.B (corolário do teorema de Erdos-Stone). Grosseiramente falando, temos que $ex(n, K_4^-) \approx ex(n, K_3) = t_2(n)$. Ora, isto indica que a técnica utilizada para encontrar a cota inferior obtida não tem condições de entregar uma cota inferior de ordem maior do que a que obtivemos (apesar de que, podem existir outros tipos de colorações livres de K_4 -rainbow). Por esse motivo acreditamos que esta cota é boa quando r é grande e, agora, focamos nosso trabalho, a partir da próxima seção, em encontrar uma cota superior o mais ajustada possível. Para tanto utilizaremos ferramentas de contêineres em hipergrafos e, no tópico seguinte, estudaremos os templates que geram muitas colorações livres de K_4 -rainbow.

4.2 Templates que Geram Muitas r -colorações K_4 -rainbow-livres

A ideia para se obter uma cota superior é utilizar o Método dos Containers. O teorema 3.2.5 nos diz que há uma família pequena de templates que podemos usar para gerar todas as possíveis colorações K_4 -rainbow-livre. A ideia da prova é particionar em duas famílias, uma formada por templates que geram muitas colorações e outra formada pelos templates que geram poucas colorações. Nesta seção, tratamos dos templates que geram muitas colorações.

Nesta seção vamos estudar o comportamento de templates T tais que, para $\delta(n) = o(1)$, temos $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}$. Nesta seção, definimos a função $g(\cdot)$ tal qual está definida no Teorema 3.2.5, ou seja, $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ é tal que $g(n) \cdot n \rightarrow \infty$ e $g(n) \rightarrow 0$.

Fixado um template T , para $i \in [r]$, Seja $E_i^T \subset E(K_n)$ o conjunto de todas as arestas de K_n com exatamente i cores em suas paletas. Além disso, defina $G_i^T = (V(K_n), E_i^T)$, $G_{i+}^T = (V(K_n), E_i^T \cup \dots \cup E_r^T)$ e $G_{i-}^T = (V(K_n), E_1^T \cup \dots \cup E_i^T)$. Seja $v \in V(K_n)$, denotamos $N_i^T(v)$ como

a vizinhança de v no grafo G_i^T . De forma análoga definimos $N_{i\pm}^T(v)$. Finalmente, quando o template T estiver claro pelo contexto, omitiremos T da notação.

Lema 4.2.1. *Para $\delta > 0$ e $r > 5^y$, com $y > 2$, seja $0 \leq \alpha < (\delta y + 1)/4$ dado. Se T é um r -template de K_n tal que $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}$ e $e(G_1) \geq \alpha n^2$, então $e(G_{6+}^T) \geq \left(1 - \frac{\delta y + 1}{y-1} + \frac{4\alpha}{y-1}\right) \frac{n^2}{4}$.*

Demonstração. Sejam δ , r , α e T como no enunciado. Suponha por contradição que $m := e(G_{6+}^T) < \left(1 + \frac{4\alpha}{y-1} - \frac{\delta y + 1}{y-1}\right) \frac{n^2}{4}$. Podemos estimar $NR_4(T)$ por cima, simplesmente contando o total de colorações geradas por T , ao invés de contar apenas as que são K_4 -rainbow-livres. Logo, temos que

$$\begin{aligned} NR_4(T) &\leq 5^{\binom{n}{2} - \alpha n^2 - m} \cdot r^m \\ &< r^{m + (\frac{n^2}{2} - \alpha n^2 - m) \log_r 5} \\ &< r^{\frac{n^2}{2y} - \frac{\alpha n^2}{y} + \frac{(y-1)}{y} m} \\ &< r^{\left(\frac{2}{y} - \frac{4\alpha}{y} + \frac{(y-1)}{y}\right) \left(1 + \frac{4\alpha}{y-1} - \frac{\delta y + 1}{y-1}\right) \frac{n^2}{4}} \\ &= r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}, \end{aligned}$$

uma contradição. □

Lembre de que um template T é $g(n)$ -viável para K_4 quando: para todo $e \in E(K_n)$, temos $|T(e)| \geq 1$ e $R_4(T) \leq g(n) \binom{n}{4}$.

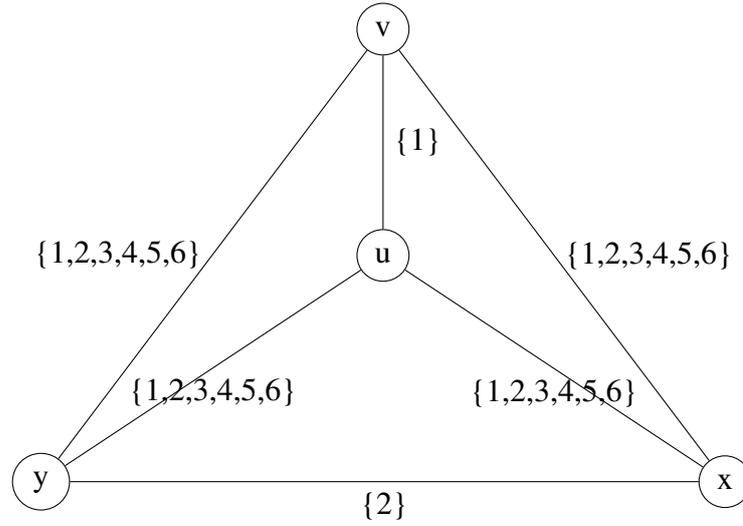
Seja uv uma aresta tal que a interseção da vizinhança de u e de v em G_{6+} não é muito pequena. O próximo resultado afirma que, em um template $g(n)$ -viável a maioria das arestas uv desse tipo tem exatamente uma cor em sua paleta. Ademais, quase todas as arestas cujas extremidades estão na vizinhança comum de u e v também possuem apenas uma cor em sua paleta e tal cor coincide com a cor de uv . Esses conceitos são definidos de forma mais precisa na notação a seguir. Para $uv \in E(K_n)$, $i \in [r]$ e $0 \leq \beta \leq 1$, definimos

$$Co^T(uv) = \{xy \in E(K_n) : x, y \in N_{6+}(u, v) \text{ and } |T(uv) \cup T(xy)| \geq 2\}$$

e

$$Bad_e^T(i, \beta) = \{uv \in E(K_n) : |T(uv)| \geq i \text{ e } |Co^T(uv)| \geq \beta n^2\}.$$

Quando o template T estiver claro pelo contexto, omitir-lo-emos da notação apresentada. Note que se $xy \in Co^T(uv)$, então $\{x, y, u, v\}$ induz um K_4 -rainbow em G . Veja o exemplo esclarecedor

Figura 6 – Exemplo de $xy \in Co^T(uv)$.

Fonte: elaborada pelo autor.

da Figura 6, que mostra um template T tal que a aresta xy tem paleta $\{2\}$, uv tem paleta $\{1\}$ e as demais arestas têm paleta $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Neste exemplo fica claro que $xy \in Co^T(uv)$.

Note, ainda, que, na definição de $Bad_e^T(i, \beta)$, quando $i \geq 2$, temos que $|T(uv)| \geq 2$ e para uma tal aresta uv temos que $Co^T(uv) = E(K_n[N_{6^+}(u, v)])$. Além disso, temos $Bad_e^T(i, \beta) \subseteq Bad_e^T(i+1, \beta)$ para todo $i \in [r-1]$.

Lema 4.2.2. *Sejam $n \geq 4$ e T um r -template $g(n)$ -viável. Sejam $\alpha = \alpha(n)$ e $\beta = \beta(n)$ tais que $\alpha\beta > g(n)/4$. Então para todo $i \in [r]$, temos que $|Bad_e(i, \beta)| \leq \alpha n^2$.*

Demonstração. Sejam T , α e β como no enunciado. Sabendo que $Bad_e^T(i, \beta) \subseteq Bad_e^T(i+1, \beta)$ para todo $i \in [r-1]$, precisamos apenas provar o caso em que $i = 1$. Assuma, por contradição, que $|Bad_e(1, \beta)| > \alpha n^2$. Primeiro veja que, fixada uma aresta uv , temos que para toda aresta $xy \in Co(uv)$ o template T restrito a $K_n[\{u, v, x, y\}]$ induz pelo menos um K_4 -rainbow. Portanto, segue que

$$\begin{aligned}
 R_4(T) &\geq \frac{\sum_{uv \in Bad_e(1, \beta)} |Co(uv)|}{6} \\
 &\geq \frac{\sum_{uv \in Bad_e(1, \beta)} \beta n^2}{6} \\
 &= \frac{|Bad_e(1, \beta)| \beta n^2}{6} \\
 &> \frac{\alpha \beta n^4}{6} \\
 &> g(n) \binom{n}{4},
 \end{aligned}$$

O que contradiz o fato de T ser $g(n)$ -viável. □

Para $0 \leq \beta \leq 1$, definimos

$$Bad_v^T(\beta) = \{xy \in E(K_n) : |T(xy)| \geq 2 \text{ e } |N_{6^+}(x,y)| \geq \beta n\}.$$

Novamente, quando o template T estiver claro pelo contexto, omitir-lo-emos da notação apresentada.

Lema 4.2.3. *Sejam $n \geq 4$ e T um template $g(n)$ -viável. Sejam $\alpha = \alpha(n)$ e $\beta = \beta(n) \geq \frac{2}{n}$ tais que $\alpha\beta^2 \geq g(n)$, então temos que $|Bad_v(\beta)| \leq \alpha n^2$.*

Demonstração. Sejam T , α e β como dito no enunciado. Assuma $|Bad_v(\beta)| > \alpha n^2$, por contradição. Primeiro, note que, fixada $uv \in E(K_n)$, com $|T(uv)| \geq 2$, temos que para todo $x \neq y$ pertencentes a $N_{6^+}(u,v)$, o template T restrito a $K_n[\{u,v,x,y\}]$ induz pelo menos um K_4 -rainbow. Portanto, temos que

$$\begin{aligned} R_4(T) &\geq \frac{\sum_{uv \in Bad_v(\beta)} \binom{|N_{6^+}(u,v)|}{2}}{6} \\ &\geq \frac{\sum_{uv \in Bad_v(\beta)} \frac{\beta n(\beta n - 1)}{2}}{6} \\ &\geq \frac{\sum_{uv \in Bad_v(\beta)} \frac{\beta^2 n^2}{4}}{6} \\ &= \frac{|Bad_v(\beta)| \beta^2 n^2}{24} \\ &> \frac{\alpha n^2 \beta^2 n^2}{24} \\ &\geq \alpha \beta^2 \binom{n}{4} \\ &\geq g(n) \binom{n}{4} \end{aligned}$$

o que contradiz o fato de que T é $g(n)$ -viável. \square

Finalmente, estamos prontos para provar o principal resultado desta seção, que é um resultado de estabilidade para templates que induzem muitas colorações.

Teorema 4.2.4. *Seja $\delta : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $\delta(n) \rightarrow 0$ e $\delta(n) \geq \frac{8^3}{n^2}$ para todo $n \geq 4$. Seja $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(n) \rightarrow 0$, $ng(n) \rightarrow \infty$ e $g(n) \geq \frac{8}{n^3}$ para todo $n \geq 4$; fixado $r > 5^y$, com $y \geq 10$, existe n_0 tal que se $n > n_0$ e T é um template $g(n)$ -viável tal que $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}$, então existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ tal que, para $i \in \{1, 2\}$, o seguinte vale:*

1. $|V_i| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1,1}{\sqrt{y-1}}\right)n$;

$$2. e(G_1[V_i]) \geq \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \binom{|V_i|}{2}.$$

Demonstração. Sejam δ, g, r e y como no enunciado. Tome $n_0 \geq 110$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale que:

$$\begin{aligned} g(n)^{1/3} &< 1/20, \\ \frac{2\delta y + 2}{y-1} + 12g^{1/3}(n) &\leq \frac{1}{2} - g^{1/3}(n), \\ \left(\frac{4\delta y + 4 + 24(y-1)g^{1/3}(n)}{(y-1)(1-2g^{1/3}(n))}\right) &\leq \frac{4,1}{y-1}, \\ \sqrt{\delta y + 6(y-1)g^{1/3}(n)} &\leq 0,1. \end{aligned}$$

e seja T um template $g(n)$ -viável tal que $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}}$. Pelo Lema 4.2.1, com $\alpha = 0$, temos que

$$e(G_{6+}) \geq \left(1 - \frac{\delta y + 1}{y-1}\right) \frac{n^2}{4}. \quad (4.1)$$

Tome $H = (V(K_n), E_{6+} \setminus \text{Bad}_v(g^{1/3}(n)))$. Pelo Lema 4.2.3, fazendo $\alpha = \beta = g^{1/3}(n)$ (veja que podemos tomar $\beta = g^{1/3}(n) \geq \left(\frac{8}{n^3}\right)^{1/3} = \frac{2}{n}$) e por (4.1), temos que

$$e(H) \geq \left(1 - \frac{\delta y + 1}{y-1} - 4g^{1/3}(n)\right) \frac{n^2}{4}. \quad (4.2)$$

Note que para toda $uv \in E(H)$ temos que $|N_H(u, v)| \leq g^{1/3}(n)n$, portanto, pelo Teorema 3.3.4, existe uma partição $V(H) = V_1 \cup V_2$ tal que

$$\begin{aligned} e(H[V_1]) + e(H[V_2]) &\leq \left(\frac{\delta y + 1}{4(y-1)} + g^{1/3}(n)\right) n^2 + g^{1/3}(n)n^2 \\ &= \left(\frac{\delta y + 1}{4(y-1)} + 2g^{1/3}(n)\right) n^2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Afirmamos que esta partição é a que procuramos.

Defina o grafo bipartido $H_2 = (V(K_n), E_H(V_1, V_2))$. Por (4.2) e (4.3), temos que

$$\begin{aligned} e(H_2) &\geq \left(1 - \frac{\delta y + 1}{y-1} - 4g^{1/3}(n)\right) \frac{n^2}{4} - \left(\frac{\delta y + 1}{4(y-1)} + 2g^{1/3}(n)\right) n^2 \\ &= \frac{n^2}{4} - \left(\frac{2(\delta y + 1)}{y-1} + 12g^{1/3}(n)\right) \frac{n^2}{4}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Pelo Teorema 3.3.5, que pode ser aplicado dado que

$$t = \left(\frac{\delta y + 1}{2(y-1)} + 3g^{1/3}(n)\right) n^2 \geq \left(\frac{\delta y}{2(y-1)}\right) n^2 \geq \frac{\delta}{2} n^2 \geq 4,$$

juntamente com o fato de que $(1 + \sqrt{x}) \geq \sqrt{1+x}$ para todo $x \geq 0$, podemos concluir que, para $i \in \{1, 2\}$,

$$\begin{aligned}
|V_i| &\geq \frac{n}{2} - \sqrt{2 \left(\frac{\delta y + 1}{2(y-1)} + 3g^{1/3}(n) \right) n^2} \\
&= \frac{n}{2} - \sqrt{\left(\frac{\delta y + 1}{(y-1)} + 6g^{1/3}(n) \right) n^2} \\
&= \frac{n}{2} - \frac{n}{\sqrt{y-1}} \sqrt{\delta y + 1 + 6(y-1)g^{1/3}(n)} \\
&\geq \frac{n}{2} - \frac{n}{\sqrt{y-1}} \left(1 + \sqrt{\delta y + 6(y-1)g^{1/3}(n)} \right) \\
&\geq n \left(\frac{1}{2} - \frac{1,1}{\sqrt{y-1}} \right)
\end{aligned}$$

portanto a partição $V_1 \cup V_2$ satisfaz o item 1 do enunciado.

por ser $y \geq 10$, $|V_i| \geq n/8$ para $i \in \{1, 2\}$.

Defina

$$A = \left\{ v \in V_1 : |N_{H_2}(v)| \leq \left(\frac{1}{2} + g^{1/3}(n) \right) |V_2| \right\}.$$

Pelo Lema 3.3.6, com $\alpha = g^{1/3}(n)$ e (4.4), temos que

$$|A| \leq \left(\frac{4\delta y + 4 + 24(y-1)g^{1/3}(n)}{(y-1)(1-2g^{1/3}(n))} \right) |V_1| \leq \frac{4,1}{y-1} |V_1|. \quad (4.5)$$

Considere agora o conjunto $Z = V_1 \setminus A$. Note que para todo $u, v \in Z$ temos

$$\begin{aligned}
|N_{H_2}(u, v)| &= |N_{H_2}(u) \cap N_{H_2}(v)| \\
&= |N_{H_2}(u)| + |N_{H_2}(v)| - |N_{H_2}(u) \cup N_{H_2}(v)| \\
&\geq 2g^{1/3}(n)|V_2| \geq \frac{g^{1/3}(n)}{4}n.
\end{aligned}$$

Tomando, $\beta = g^{1/3}(n)/4$, a inequação acima quer dizer que toda aresta em Z que tenha pelo menos 2 cores em sua paleta está em $|Bad_v(\beta)|$. Então, pelo Lema 4.2.3 com $\alpha = 16g^{1/3}(n)$ (e lembrando que a escolha de g implica $\beta \geq \frac{2}{n}$), temos que existem no máximo

$$16g^{1/3}(n)n^2 \leq 2^{10}|V_1|^2g^{1/3}(n) \quad (4.6)$$

arestas com as duas extremidades em Z e com pelo menos duas cores em suas respectivas paletas.

Veja agora que, como n é grande e $|V_1| \geq n/8$ então $|V_1|^2 \leq 2,1 \binom{|V_1|}{2}$. Finalmente, todas as arestas $uv \in E(K_n[V_1])$ tais que $|T(uv)| \geq 2$ ou têm as duas extremidades em Z ou pelo

menos uma extremidade em A . Logo, podemos concluir que o número de arestas uv tais que $|T(uv)| \geq 2$ é no máximo

$$\begin{aligned} 2^{10}g^{1/3}(n)|V_1|^2 + |A||V_1| &\leq 2^{10}g^{1/3}(n)|V_1|^2 + \frac{4,1}{y-1}|V_1|^2 \\ &\leq \left(2200g^{1/3}(n) + \frac{9}{y-1}\right) \binom{|V_1|}{2}. \end{aligned}$$

Veja que, analogamente, o mesmo vale para $|V_2|$, o que encerra a prova do teorema. \square

Diante do resultado de contêineres (3.2.5) e estabilidade (4.2.4) obtidos, agora estamos prontos para provarmos nosso teorema principal na seção a seguir. O Teorema finaliza nosso trabalho oferecendo uma cota superior não trivial para o $c_4(n, r)$.

4.3 Prova do teorema principal

Nesta seção enunciaremos e provaremos nosso principal resultado, uma cota superior não trivial para o número de r -colorações do K_n livres de K_4 -rainbow. Nosso teorema será uma aplicação direta do Teorema 3.2.5 e do Teorema 4.2.4. Sem mais delongas, enunciemos o a majoração do $c_4(n, r)$ a seguir.

Teorema 4.3.1. *Fixado $r \geq 5^y$, com $y \geq 10$, para todo n suficientemente grande, vale que*

$$c_4(n, r) \leq r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + o(1)\right) \frac{n^2}{4}}.$$

Demonstração. Defina $g(n) = n^{-1/3}$ e $\delta(n) = 6 \log^3(n) n^{-1/9}$, fixado $r > 5^y$, com $y \geq 10$, tome $n_0 \geq 110$ como no Teorema 4.2.4. Sejam $n > n_0$ e T um template $g(n)$ -viável tal que $NR_4(T) \geq r^{(1-\delta) \frac{n^2}{4}}$. Veja que δ, g satisfazem as condições do Teorema 4.2.4 e, portanto, existe uma partição $V(K_n) = V_1 \cup V_2$ tal que, para $i \in \{1, 2\}$, o seguinte vale:

1. $|V_i| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1,1}{\sqrt{y-1}}\right)n$;
2. $e(G_1[V_i]) \geq \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200n^{-1/9}\right) \binom{|V_i|}{2}$.

Logo, o teorema 3.2.5, com $s = 4$ e, portanto $\ell = 6$, afirma que existem constantes $n_0 > 0$ e $c = c(r)$ tais que para todo $n > n_0$ existe um conjunto de templates \mathcal{T} que satisfaz as propriedades do teorema. Note que o item 1 do teorema 3.2.5 implica, em particular, que toda r -coloração K_4 -rainbow-livre é gerada por algum template de \mathcal{T} .

Definimos

$$\mathcal{T}_1 = \{T \in \mathcal{T} : NR_4(T) \leq r^{(1-\delta) \frac{n^2}{4}}\} \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_2 = \mathcal{T} \setminus \mathcal{T}_1.$$

Vamos estimar o número de colorações K_4 -rainbow-livres induzidas pelos templates em \mathcal{T}_1 e em \mathcal{T}_2 , separadamente, começando por \mathcal{T}_1 . Por definição de \mathcal{T}_1 e o Item 3 do Theorem 3.2.5, nós temos que

$$\begin{aligned}
NR_4(\mathcal{T}_1) &= \sum_{T \in \mathcal{T}_1} NR_4(T) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_1} r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}} \\
&\leq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}} 2^{c(ng(n))^{-1/6} \log(1/g(n)) \log(ng(n))} \binom{n}{2} \\
&= r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}} 2^{c(n^{2/3})^{-1/6} \log(n^{1/3}) \log(n^{2/3})} \binom{n}{2} \\
&= r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}} 2^{\frac{2c \log^2(n)}{9n^{1/9}}} \binom{n}{2} \\
&\leq r^{(1-\delta)\frac{n^2}{4}} r^{\frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}}} \frac{n^2}{4} \\
&= r^{\left(\frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} - \delta\right) \frac{n^2}{4}} r^{\frac{n^2}{4}}
\end{aligned}$$

Por outro lado, pelo Item 2 do Teorema 4.2.4, cada $T \in \mathcal{T}_2$ é tal que existe uma partição $V = V_1 \cup V_2$ tal que

$$\begin{aligned}
e(G_1^T) &\geq \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \left(\binom{|V_1|}{2} + \binom{|V_2|}{2}\right) \\
&= \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \left(\binom{n}{2} - |V_1||V_2|\right) \\
&\geq \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \left(\binom{n}{2} - \frac{n^2}{4}\right) \\
&\geq \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}\right)
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Logo, para um template fixado $T \in \mathcal{T}_2$, temos que

$$\begin{aligned}
NR_4(T) &\leq r^{\binom{n}{2} - \left(1 - \frac{9}{y-1} - 2200g^{1/3}(n)\right) \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}\right)} \\
&= r^{\frac{n^2}{4} + \left(\frac{9}{y-1} + 2200^{-1/9}\right) \left(\frac{n^2}{4} - \frac{n}{2}\right)} \\
&\leq r^{\frac{n^2}{4} + \left(\frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&= r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Concluimos, então, que

$$\begin{aligned}
NR_4(\mathcal{T}_2) &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_2} NR_4(T) \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}_2} r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&= |\mathcal{T}_2| r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&\leq 2 \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} \frac{n^2}{4} r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&= r^{\left(\frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} \frac{n^2}{4}\right) \log_r(2) + \left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&\leq r^{\frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} \frac{n^2}{4} + \left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&= r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9} + \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}}\right) \frac{n^2}{4}}
\end{aligned}$$

Finalmente concluimos que

$$\begin{aligned}
c_4(n, r) &\leq NR_4(\mathcal{T}_1) + NR_4(\mathcal{T}_2) \\
&\leq r^{\left(\frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} - \delta\right) \frac{n^2}{4}} r^{\frac{n^2}{4}} + r^{\left(1 + \frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9} + \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}}\right) \frac{n^2}{4}} \\
&\leq \left(r^{\left(\frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9} + \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}}\right) \frac{n^2}{4}} + 1 \right) r^{\frac{n^2}{4}}.
\end{aligned}$$

onde na última inequação assumimos n suficientemente grande.

Como $r > 5^{10}$ e sabendo que para todo $x > 0$ vale que $r^{x+1} > r^x + 1$, temos que, para todo n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
\left(r^{\left(\frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9} + \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}}\right) \frac{n^2}{4}} + 1 \right) r^{\frac{n^2}{4}} &\leq \left(r^{\left(\frac{9}{y-1} + 2200n^{-1/9} + \frac{4c \log^2(n)}{9n^{1/9}} + 4n^{-2}\right) \frac{n^2}{4}} \right) r^{\frac{n^2}{4}} \\
&= \left(r^{\left(\frac{9}{y-1} + o(1)\right) \frac{n^2}{4}} \right) r^{\frac{n^2}{4}}.
\end{aligned}$$

Como queríamos demonstrar. □

Encerramos este capítulo destacando que, apesar de não ser apertada, esta não é uma cota trivial e pode ser um ponto de partida para encontrar uma cota melhor, visto que esta é a melhor majoração que existe atualmente para o problema de colorir K_n livre de K_4 -rainbow. No próximo capítulo veremos as conclusões e as expectativas para os trabalhos futuros que podem ser desenvolvidos a partir deste.

5 CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Nessa dissertação encontramos uma cota superior não trivial para o número de colorações k_4 -rainbow-livre de um grafo completo de ordem n . Apresentamos também uma cota inferior trivial, que acreditamos fortemente que é um bom limitante. Também foi apresentado o método dos contêineres, utilizado de maneira central nos nossos resultados, e outras ferramentas que permeiam a Teoria Extremal de Grafos. Para fins de contexto, um breve histórico a respeito de colorações de Gallai foi introduzido até o estado da arte do estudo.

Conjecturamos que o expoente do limitante inferior obtido pelo Teorema 4.1.3 para k -colorações de K_4 -Gallai seja assintoticamente justo quando o número de cores cresce. Uma questão importante é se podemos ou não melhorar/remover a dependência de y no expoente da cota superior do Teorema 4.3.1, para obter algo que se aproxime mais da cota inferior $r^{1+n^2/4}$, por exemplo para um limitante do tipo $(1 + o(1))r^{\frac{n^2}{4}+1}$. Note que, a existência da cota inferior $5^{\binom{n}{2}}$, nos mostra que a cota r^{1+n^2} pode não ser a melhor possível para r pequeno. Assim, a hipótese $y \geq 10$ do Teorema 4.3.1 só poderia ser melhorada para $y \geq 2$, no melhor dos casos.

Outro ponto que acreditamos poder avançar é, para n pequeno, encontrar o grafo extremal relativo a colorações k_4 -rainbow-livres, ou seja, responder à seguinte pergunta: Dados n e k naturais, para valores pequenos de n , qual o grafo de ordem n que maximiza o número de k -colorações de modo a evitar uma cópia do K_4 -rainbow?

Os resultados mais recentes relativos a colorações de Gallai nos fazem acreditar que a resposta para esta questão é binária, ou é o grafo completo K_n , ou é o grafo bipartido completo balanceado $T_2(n)$. Por fim, podemos ir na seguinte direção: generalizar o problema exposto para o K_s -rainbow e descobrir como os limites se comportam a medida que s cresce. Para tanto, esperamos continuar utilizando o método dos contêineres e, se nos for exigida outra abordagem, utilizar também ferramentas tradicionais como o Lema da Regularidade.

REFERÊNCIAS

- ALLEN, P. *et al.* Blow-up lemmas for sparse graphs. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2016. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1612.00622>. Acesso em: jan. 2025.
- ALON, N. *et al.* The number of edge colorings with no monochromatic cliques. **Journal of the London Mathematical Society**, United Kingdom, v. 70, n. 2, p. 273–288, 2004.
- ALON, N.; SHIKHELMAN, C. Many t copies in h -free graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, v. 121, p. 146–172, 2016.
- BALOGH, J. A remark on the number of edge colorings of graphs. **European Journal of Combinatorics**, Netherlands, v. 27, n. 4, p. 565–573, 2006.
- BALOGH, J.; LI, L. The typical structure of Gallai colorings and their extremal graphs. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, United States, v. 33, n. 4, p. 2416–2443, 2019.
- BALOGH, J. *et al.* The typical structure of maximal triangle-free graphs. In: CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. **Forum of Mathematics, Sigma**, United Kingdom, v. 3, e20, p. 1-19, 2015. Disponível em: <https://www.cambridge.org/core/journals/forum-of-mathematics-sigma/article/typical-structure-of-maximal-trianglefree-graphs/23CDD1F94F13D646376C40526CF9FBBD>. Acesso em: jan. 2025.
- BALOGH, J.; MORRIS, R.; SAMOTIJ, W. Independent sets in hypergraphs. **Journal of the American Mathematical Society**, United States, v. 28, n. 3, p. 669–709, 2015.
- BALOGH, J.; SAMOTIJ, W. The number of k m , m -free graphs. **Combinatorica**, Germany, v. 31, p. 131–150, 2011.
- BALOGH, J.; SOLYMOSI, J. On the number of points in general position in the plane. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2017. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1704.05089>. Acesso em: jan. 2025.
- BASTOS, J. O. *et al.* Counting Gallai 3-colorings of complete graphs. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 342, n. 9, p. 2618-2631, 2019.
- BASTOS, J. O.; BENEVIDES, F. S.; HAN, J. The number of Gallai k -colorings of complete graphs. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1812.10465>. Acesso em: jan. 2025.
- BASTOS, J. O.; BENEVIDES, F. S.; HAN, J. The number of Gallai k -colorings of complete graphs. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, United States, 2019. Disponível em: <https://doi.org/10.1016/j.jctb.2019.12.004>. Acesso em: jan. 2025.
- BENEVIDES, F. S.; HOPPEN, C.; SAMPAIO, R. M. Edge-colorings of graphs avoiding complete graphs with a prescribed coloring. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 340, n. 9, p. 2143–2160, 2017.
- BOLLOBÁS, B. **Extremal graph theory with emphasis on probabilistic methods**. [S.l.]: American Mathematical Soc., 1986.
- BONDY, J. A.; MURTY, U. S. R. **Graph theory**. [S.l.]: Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.

- BOTLER, F. H. *et al.* **Combinatória. 33o Colóquio Brasileiro de Matemática**, Brasil, 2022.
- CAMERON, K.; EDMONDS, J.; LOVÁSZ, L. A note on perfect graphs. **Periodica Mathematica Hungarica**, Hungary, co-published with Springer Science+Business Media BV..., v. 17, n. 3, p. 173–175, 1986.
- CHUA, L.; GYÁRFÁS, A.; HOSSAIN, C. Gallai-colorings of triples and 2-factors of B_3 . **International Journal of Combinatorics**, Egypt, v. 2013, 2013.
- CORMEN, T. H. *et al.* **Introduction to algorithms**. [S.l.]: MIT press, 2022.
- DIESTEL, R. **Graph theory**. [S.l.]: Springer, 2024.
- ERDŐS, P.; SIMONOVITS, M. On a valence problem in extremal graph theory. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 5, n. 4, p. 323–334, 1973.
- ERDŐS, P.; STONE, A. H. On the structure of linear graphs. **Bulletin of the American Mathematical Society**, United States, 1946.
- ERDŐS, P.; ROTHSCHILD, B. **Some new applications of probability methods to Combinatorial Analysis and Graph Theory**. [S.l.]: University of Calgary, 1974.
- FALGAS-RAVRY, V.; O'CONNELL, K.; UZZELL, A. Multicolor containers, extremal entropy, and counting. **Random Structures & Algorithms**, United States, v. 54, n. 4, p. 676–720, 2019.
- FUJITA, S.; MAGNANT, C. Gallai–Ramsey numbers for cycles. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 311, n. 13, p. 1247–1254, 2011.
- FUJITA, S.; MAGNANT, C.; OZEKI, K. Rainbow generalizations of Ramsey Theory—a dynamic survey. **Theory and Applications of Graphs**, United States, n. 1, p. 1, 2014.
- FÜREDI, Z. A proof of the stability of extremal graphs, simonovits' stability from szemerédi's regularity. **Journal of Combinatorial Theory, Series B**, Netherlands, v. 115, p. 66–71, 2015.
- GALLAI, T. Transitiv orientierbare Graphen. **Acta Mathematica Hungarica**, Hungary, v. 18, n. 1-2, p. 25–66, 1967.
- GERKE, S.; STEGER, A. The Sparse Regularity Lemma and its applications. **Surveys in Combinatorics 2005**, United Kingdom, p. 227–258, 2005.
- GYÁRFÁS, A.; SÁRKÖZY, G. N. Gallai colorings of non-complete graphs. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 310, n. 5, p. 977–980, 2010.
- GYÁRFÁS, A.; SIMONYI, G. Edge colorings of complete graphs without tricolored triangles. **J. Graph Theory**, United States, v. 46, n. 3, p. 211–216, 2004. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1002/jgt.v46:3>. Acesso em: jan. 2025.
- HERO, A. O.; MICHEL, O. J. Asymptotic theory of greedy approximations to minimal k-point random graphs. **IEEE Transactions on Information Theory**, United States, v. 45, n. 6, p. 1921–1938, 1999.

- HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; NOLIBOS, D. An extension of the rainbow erdős-rothschild problem. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 344, n. 8, p. 112443, 2021.
- HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; ODERMANN, K. A rainbow erdős-rothschild problem. **Electronic Notes in Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 49, p. 473–480, 2015.
- HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; ODERMANN, K. On graphs with a large number of edge-colorings avoiding a rainbow triangle. **European Journal of Combinatorics**, Netherlands, v. 66, p. 168–190, 2017.
- HOPPEN, C.; LEFMANN, H.; ODERMANN, K. A rainbow Erdős–Rothschild problem. **SIAM Journal on Discrete Mathematics**, United States, v. 31, n. 4, p. 2647–2674, 2017.
- HORA, A. Central limit theorems and asymptotic spectral analysis on large graphs. **Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics**, Singapore, v. 1, n. 02, p. 221–246, 1998.
- KLEITMAN, D. J.; WINSTON, K. J. On the number of graphs without 4-cycles. **Discrete Mathematics**, Netherlands, v. 41, n. 2, p. 167–172, 1982.
- KOHAYAKAWA, Y. Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs. **Foundations of computational mathematics**, Germany, p. 216–230, 1997.
- KOMLÓS, J. *et al.* The Regularity Lemma and its applications in Graph Theory. **Theoretical Aspects of Computer Science**, France, v. 2292, p. 84–112, 2000.
- KOMLÓS, J.; SIMONOVITS, M. **Szemerédi's Regularity Lemma and its applications in graph theory**. [S.l.]: Center for Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science, 1995.
- KÖRNER, J.; SIMONYI, G. Graph pairs and their entropies: modularity problems. **Combinatorica**, Germany, v. 20, n. 2, p. 227–240, 2000.
- KÖRNER, J.; SIMONYI, G.; TUZA, Z. Perfect couples of graphs. **Combinatorica**, Germany, v. 12, n. 2, p. 179–192, 1992.
- MAFFRAY, F.; PREISSMANN, M. A translation of Gallai's paper: "Transitiv Orientierbare Graphen". In: RAMÍREZ-ALFONSÍN, Jorge L.; REED, Bruce A. (ed.). **Perfect graphs**. Chichester: Wiley, 2001. (Wiley-Intersci. Ser. Discrete Math. Optim.). p. 25–66.
- MANTEL, W. Problem 28. **Wiskundige Opgaven**, Netherlands, v. 10, p. 60–61, 1907.
- MORRIS, R.; SAXTON, D. The number of c_2 -free graphs. *Advances in Mathematics*, Netherlands, v. 298, p. 534–580, 2016.
- PIKHURKO, O.; STADEN, K.; YILMA, Z. B. The Erdős–Rothschild problem on edge-colourings with forbidden monochromatic cliques. **Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society**, United Kingdom, v. 163, n. 2, p. 341–356, 2017.
- ROTH, K. Sur quelques ensembles dentiers. **COMPTE RENDUS HEBDOMADAIRES DES SEANCES DE L'ACADEMIE DES SCIENCES**, France, v. 234, n. 4, p. 388–390, 1952.

- RUKHIN, A. **Asymptotic analysis of various statistics for random graph inference**. [S.l.]: The Johns Hopkins University, 2009.
- SAPOZHENKO, A. A. On the number of independent sets in expanders. **Discrete Mathematics and Applications**, Germany, vol. 11, n. 2, p. 155-162, 2001.
- SAXTON, D.; THOMASON, A. Hypergraph containers. **Inventiones mathematicae**, Germany, v. 201, n. 3, p. 925–992, 2015.
- SZEMERÉDI, E. **Regular partitions of graphs**. [S.l.]: Stanford University, 1975.
- TURÁN, P. On an external problem in graph theory. **Mat. Fiz. Lapok**, Hungary, v. 48, p. 436–452, 1941.
- WAGNER, A. Z. Large subgraphs in rainbow-triangle free colorings. **Journal of Graph Theory**, United States, v. 86, n. 2, p. 141–148, 2017.
- WEST, D. B. *et al.* **Introduction to graph theory**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2001.
- ZHANG, F.; CHEN, Y.; SONG, Z. Gallai-Ramsey numbers of cycles. **arXiv.org**, [Ithaca, N. Y.], 2018. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/1809.00227>. Acesso em: jan. 2025.