UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
DOUTORADO EM MATEMÁTICA

ALAN PIO SOUSA

REGULARIDADE HÖLDER ATÉ A FRONTEIRA DO GRADIENTE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS SINGULARES/DEGENERADAS EM ESPAÇOS DE ORLICZ E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

FORTALEZA
2024

ALAN PIO SOUSA

REGULARIDADE HÖLDER ATÉ A FRONTEIRA DO GRADIENTE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS SINGULARES/DEGENERADAS EM ESPAÇOS DE ORLICZ E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

Orientador: Prof. Dr. J. Ederson Melo Braga.

FORTALEZA

2024

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

S696r Sousa, Alan Pio.
Regularidade Hölder até a fronteira do gradiente de soluções fracas de EDPs singulares/degeneradas em espaços de Orlicz e aplicações a problemas de fronteira livre. / Alan Pio Sousa. – 2024.
134 f. : il. color.

Tese (doutorado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática , Fortaleza, 2024.
Orientação: Prof. Dr. José Ederson Melo Braga.

1. EDPs singulares/degeneradas. 2. G-Laplaciano. 3. Problemas de fronteira livre. 4. Regularidade até a fronteira. 5. Problema de propagação de chamas. I. Título.

CDD 510

ALAN PIO SOUSA

REGULARIDADE HÖLDER ATÉ A FRONTEIRA DO GRADIENTE DE SOLUÇÕES FRACAS DE EDPS SINGULARES/DEGENERADAS EM ESPAÇOS DE ORLICZ E APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de doutor em Matemática. Área de Concentração: Equações Diferenciais Parciais Elípticas.

Aprovada em: 19/07/2024.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. J. Ederson Melo Braga (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Diego Ribeiro Moreira
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Gleydson Chaves Ricarte
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Jefferson Abrantes dos Santos
Universidade Federal de Campina Grande (UFCG)

Prof. Dr. Sérgio Henrique Monari Soares
Universidade de São Paulo (USP)

À minha família, pela confiança que sempre depositou em mim e pelo apoio dedicado em cada passo da minha jornada.

AGRADECIMENTOS

À minha mãe, Cristiane, pelo seu amor incansável. Desde a infância, ela me incentivou a buscar educação e me apoiou financeiramente nos momentos mais difíceis.

À minha avó, Maria do Socorro, pelo seu amor e carinho inabaláveis. Ela cuidou de mim com dedicação ao longo de todos esses anos.

À minha família mais próxima, por estarem sempre ao meu lado nesta jornada de estudos: Avô João (in memoriam), Aécio, Alex Zidane, Tia Viviane, Ana Vivyan e João Domicio.

Aos amigos que fiz durante todos esses anos no programa de pós-graduação, por compartilharem aprendizados e momentos memoráveis: Carlos André, Allen, Arthur, Bianca, Wallison, Valderlanio, Isnard, Caio, Gabriel, Selene, Pedro, João Paulo, Erivamberto, Patrícia, Israel, Samuel, Johnatan, Jaciane, Idalina, Hernandez, Caio, Lucas, André, João Vitor, Weslay, Junior e Rafael.

Aos membros da banca de defesa desta tese: Gleydson Ricarte (UFC), Jefferson Abrantes (UFCG) e Sérgio Henrique Monari Soares (USP) pela atenção e disponibilidade durante o processo. Ao Professor Diego Moreira, pela sua disponibilidade e esclarecimentos que foram fundamentais.

Agradeço especialmente ao meu orientador de mestrado e doutorado, Professor Ederson Braga, pelos ensinamentos e pela confiança constante em minha capacidade.

Agradecimentos a Andrea Dantas, secretária da PGMAT, pela competência nos inúmeros serviços prestados.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001. Por fim agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro.

"Nas profundezas do inconsciente humano, encontra-se uma necessidade difusa de um universo lógico e que faça sentido. Mas o universo real está sempre um passo adiante da lógica”
(HERBERT, 2017, local. 7760.)

RESUMO

Neste trabalho de tese discutimos resultados que dizem respeito a regularidade de soluções no sentido das distribuições para equações da forma divergente singular/degeneradas. Consideramos tais soluções definidas em semi-bolas. Sob a hipótese de um dado de fronteira $C^{1,\alpha}$ para algum $0 < \alpha < 1$, mostramos que a solução de um problema de Dirichlet deste tipo possui regularidade $C^{1,\beta}$ para algum $0 < \beta \leq \alpha$ até a fronteira. Em seguida, aplicamos este resultado a teoremas no contexto de problemas de fronteira livre e problemas de combustão e propagação de chamas.

Palavras-chave: EDPs singular/degeneradas; argumento de pertubação; g-Laplaciano; regularidade até a fronteira; problemas de fronteira livre; problema de propagação de chamas.

ABSTRACT

In this thesis work we discus results that concern the regularity of solutions in the weak sense for elliptical equations of divergent form singular/degenerate. We consider such solutions defined in half-balls. Under the hypothesis of a given boundary $C^{1,\alpha}$ for $0 < \alpha < 1$, we show that the solution of a Dirichlet problem of this type has regularity $C^{1,\beta}$ for some $0 < \beta \leq \alpha$ up to the boundary. We then apply this result to theorems in the context of free boundary problems and combustion and flame propagation problems.

Keywords: singular/degenerates PDEs; pertubation argument; g-Laplacian; regularity up to the boundary; free boundary problems; flame propagation problems.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbb{R}^n$	Espaço Euclidiano de dimensão n.
Ω	Denota um subconjunto aberto, convexo e de fronteira Lipschitz de $\mathbb{R}^n$.
B_r	Bola aberta em $\mathbb{R}^n$ de raio r.
B_r^+	A semi-bola dada por $B_r \cap \{x_n > 0\}$.
B_r^0	A fronteira "flat"da semi-bola dada por $B_r \cap \{x_n = 0\}$.
$C^{k,\alpha}(B_1)$	Denota um espaço com todas as derivadas até ordem k contínuas e todas derivada de ordem k são alpha-Hölder contínuas.
G	Denota uma N-função.
$W^{1,G}(B_1)$	Denota um espaço de Orlicz-Sobolev.
$\triangle_g$	O operador g-Laplaciano definido por $\triangle_g u = div\left(\frac{g(\lvert Du\rvert)}{\lvert Du\rvert} Du\right)$.
(CP)	Condição de Primitiva.
(CQ)	Condição Quociente.
$\mathscr{L}^{n,n+\alpha}$	Espaço de Campanato.
$C_0^\infty(\Omega)$	Denota o espaço das funções suaves que possuem suporte compacto no aberto Ω.
$W_0^{1,G}(\Omega)$	Denota o fecho do conjunto $C_0^\infty(\Omega)$ na topologia da norma de Orlicz-Sobolev.
$W_{comp}^{1,G}(\Omega)$	Denota o subconjunto de $W^{1,G}(\Omega)$ das funções que tem suporte compacto no aberto Ω.

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Com o passar do tempo, a análise da regularidade das soluções de equações diferenciais parciais (EDPs) e das soluções de certos Problemas de Fronteira Livre mostrou-se extremamente valiosa para uma variedade de questões na natureza e para a matemática, tanto pura quanto aplicada. Desde as equações mais simples até as mais complexas, cada teorema de regularidade adquirido possui sua importância específica. Da mesma forma, os resultados relacionados à baixa regularidade das soluções e aqueles que abordam a analiticidade também têm aplicações relevantes. Observamos um desenvolvimento muito positivo nas técnicas para a análise desses problemas. Novas ideias e argumentos inovadores surgiram, e essas técnicas prolíficas foram se consolidando ao longo do tempo. É importante ressaltar que, mesmo atualmente, variações interessantes das abordagens criadas por Schauder, De Giorgi, Moser, Krylov e Caffarelli, entre outros, continuam a influenciar significativamente os novos resultados que têm sido apresentados recentemente.

Neste trabalho de tese continuaremos o estudo sobre a regularidade de certas EDPs. Especificamente, investigamos regularidade até a fronteira de EDPs quasilineares com um Orlicz crescimento. Tais EDPs envolvem o operador g-Laplaciano dado por:

$$\triangle_g u := div\left(\frac{g(|Du|)}{|Du|}Du\right),$$

onde assumiremos as condições apropriadas para a N-funções $G:[0,\infty)\to[0,\infty)$:
(CP) Condição de Primitiva:

$$G'(t) = g(t) \text{ onde } g \in C^1((0,\infty)) \cap C^0([0,\infty)).$$

(CQ) Condição Quociente: para $0<\delta\leq g_0$ constantes fixadas

$$\delta < \frac{tg'(t)}{g(t)} \leq g_0, \ \forall t>0.$$

As condições de Primitiva e Quociente foram introduzidas por G. M. Lieberman em (LIEBERMAN, 1991). Para tais EDPs Lieberman apresenta várias estimativas clássicas e a teoria da regularidade. Precisamente, ao considerar soluções fracas para

$$\triangle_g u = f \quad \text{em} \quad \Omega,$$

onde $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ é um domínio limitado, resultados como as estimativas Weak Harnack, Local Maximum Principle, $C^{0,\alpha}$ e $C^{1,\alpha}$ (interior) foram lá obtidas. Ainda em (LIEBERMAN, 1991), comentários e observações sobre os resultados de regularidade na fronteira foram apontados por Lieberman para uma função limitada f, mas sem demonstrações. No caso em que o g-Laplaciano é substituído pela equação p-Laplaciano, e f é uma função limitada, os resultados na fronteira podem ser encontrados em (LIEBERMAN, 1988).

Como foi demonstrado em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) tais condições assumidas por Lieberman garantem que $\triangle_g u = 0$, são equivalentes a uma equação uniformemente elíptica com constantes de elipticidade dependendo apenas de δ, g_0 em um conjunto onde $Du \neq 0$. Com efeito, definindo $A(p) = \frac{g(|p|)}{|p|}p$ e $a^{ij} = \frac{\partial A^i}{\partial p_j}$ para $p \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ temos para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\min\{1,\delta\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1,g_0\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2.$$

Com respeito a quantidade de N-funções que satisfazem as condições (CP) e (CQ) observemos que este número é expressivo. Considere funções $G' = g$ tais que $g(t) = t^p$ com $\delta = g_0 = p$, $g(t) = at^p + bt^q$ com $a,b,p,q > 0$ e $\delta = min\{p,q\}$ e $g_0 = max\{p,q\}$. Além disso se $g(t) = t^p log(at+b)$ com $p,a,b > 0$ então neste caso $\delta = p$ e $g_0 = p+1$.

Pode-se verificar também que qualquer combinação linear com coeficientes positivos de funções que satisfazem as condições (CP) e (CQ) também satisfazem essas condições. Com efeito considerando as funções g_1, g_2 com as constantes δ_0^1, g_0^1 e δ_0^2, g_0^2 respectivamente então $g = c_1g_1 + c_2g_2$ satisfaz (CP) e (CQ) com $\delta_0 = min\{\delta_0^1, \delta_0^2\}$ e $g_0 = \max\{g_0^1, g_0^2\}$. Veja também que o produto de funções que satisfazem as condições (CP) e (CQ) também satisfaz essas condições, pois se $g = g_1g_2$ então

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{tg_1'(t)g(t)_2 + tg_1(t)g_2'(t)}{g_1(t)g_2(t)} = \frac{tg_1'(t)}{g_1(t)} + \frac{tg_2'(t)}{g_2(t)}$$

basta tomar $\delta = \delta_0^1 + \delta_0^2$ e $g_0 = g_0^1 + g_0^2$. Por fim se $g(t) = g_1(g_2(t))$ então como

$$\frac{tg'(t)}{g(t)} = \frac{tg_1'(g_2(t))g_2'(t)}{g_1(g_2(t))} = \frac{g_2(t)g_1'(g_2(t))tg_2'(t)}{g_1(g_2(t))g_2(t)}$$

segue que g satisfaz as condições (CP) e (CQ) com $\delta = \delta_0^1\delta_0^2$ e $g_0 = g_0^1g_0^2$. Tudo isso deixa evidente que a quantidade de funções que satisfazem tais condições é bem expressiva.

Assim, para uma função g satisfazendo (CP) e (CQ) começamos por considerar uma função $u \in W^{1,G}(B_1^+)$ (espaço apropriado de Orlicz-Sobolev), que é solução da seguinte equação

$$\triangle_g u = f \quad \text{em} \quad B_1^+,$$

num sentido fraco. Além disso, adicionamos a condição de fronteira

$$u = \phi \quad \text{em} \quad B_1^0,$$

onde definimos $B_1^+ = B_1 \cap \{x_n > 0\}$ e $B_1^0 = B_1 \cap \{x_n = 0\}$.

Sob as hipóteses de que $f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e $\phi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$, nosso objetivo é mostrar que u, solução do problema de Dirichlet acima, tem regularidade até a fronteira plana. Mais precisamente iremos mostrar que $u \in C^{1,\beta}(\overline{B_{1/2}^+})$ para algum $0 < \beta < \alpha$ que só depende dos parâmetros da equação. Além disso, vale a estimativa da norma $C^{1,\beta}$

$$||u||_{C^{1,\beta}(B_{1/2}^+)} \leq C \cdot \left(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) \right).$$

Observação 1.1. *A partir de um escalonamento podemos tratar o mesmo problema de Dirichlet para uma semi bola qualquer de raio $R > 0$. Com efeito seja $u \in W^{1,G}(B_R^+)$ solução no sentido das distribuições de $\triangle_g u = f$ em B_R^+. Definimos as funções $u_R(y) = \frac{u(Ry)}{R}$ e $f_R(y) = Rf(Ry)$ para todo $y \in B_1^+$. Então afirmamos que $u_R \in W^{1,G}(B_1^+)$ é solução de $\triangle_g u_R = f_R$ em B_1^+ no sentido das distribuições. Com efeito para $\eta \in C_0^\infty(B_1^+)$ tem-se*

$$\begin{aligned}
\int_{B_1^+} \frac{g(|\nabla u_R|)}{|\nabla u_R|} \nabla u_R \cdot \nabla \eta \, dy &= \int_{B_1^+} \frac{g(|\nabla u(Ry)|)}{|\nabla u(Ry)|} \nabla u(Ry) \cdot \nabla \eta(y) \, dy \\
&= R^{-n+1} \int_{B_R^+} \frac{g(|\nabla u(x)|)}{|\nabla u(x)|} \nabla u(x) \cdot \nabla \eta(x/R) \, dx \\
&= R^{-n+1} \int_{B_R^+} f(x) \eta(x/R) \, dx \\
&= \int_{B_1^+} \eta(y) R f(Ry) \, dy \\
&= \int_{B_1^+} f_R \eta \, dy.
\end{aligned}$$

A estratégia adotada neste trabalho de tese é baseada principalmente em (LIEBERMAN, 1988) e (LIEBERMAN, 1986). Com esse intuito, antes de tratarmos sobre os resultados de fronteira propriamente ditos, iremos em busca de estimativas interiores envolvendo o gradiente das soluções fracas de $\triangle_g u = 0$, primeiro para o caso em a função g é suave e então por um argumento de aproximação concluímos os mesmos resultados para o caso em que g satisfaz somente (CP) e (CQ). Isto é feito nos capítulos 2, 3 e 4.

Na segunda parte tratamos do problema até a fronteira. No capítulo 5 usamos as estimativas interiores demonstradas, para da mesma forma que em (LIEBERMAN, 1988) possamos obter estimativas até a fronteira para solução fraca de $\triangle_g u = 0$ em B_1^+, com dado de fronteira $\phi \in C^{1,\alpha}$. Por fim, no capítulo 6 consideramos o problema não homogêneo $\triangle_g u = f$ em

B_1^+, com $f \in L^q(B_1^+)$ para $q > n$. Utilizaremos argumentos similares presentes em (LIEBERMAN, 1991) e (LIEBERMAN, 1988) adaptados para este contexto até a fronteira.

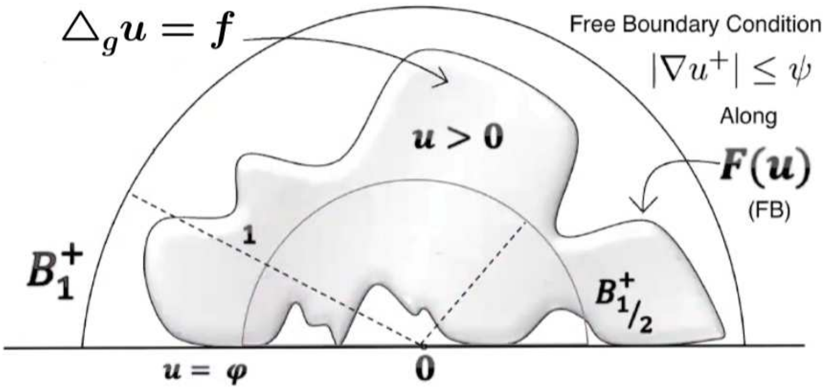
Nos capítulos 7 e 8 obtemos estimativas Lipschitz para soluções de problemas de fronteira livre e soluções de problemas com o operador g-laplaciano pertubado. Tais estimativas são obtidas como generalizações dos resultados em (BRAGA; MOREIRA, 2022) e (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023).

Analisamos duas aplicações relacionadas com estimativas até a fronteira para o gradiente das soluções. Primeiramente, investigamos o problema de fronteira livre (PFL)

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \quad \text{em} \quad \{u > 0\} \cap B_1^+ \\ |\nabla u^+| \leq \psi \quad \text{ao longo de} \quad F(u) \\ u = \varphi \quad \text{em} \quad B_1^0, \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $0 \leq \psi$ é uma função limitada e continua ao longo da fronteira livre de v, isto é $F(u) := \partial\{u > 0\} \cap B_1^+$. Também impomos uma condição natural em φ para que $\varphi^{\pm}$ permaneça uma função $C^{1,\alpha}$ na fronteira fixa.

Figura 1 – Problema de Fronteira Livre



Fonte: Elaborado pelo autor.

A segunda aplicação surge ao consideramos um problema de perturbação singular relacionado ao g-Laplaciano. De fato, estudamos a regularidade Lipschitz uniforme até a fronteira das soluções $\{v_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ do problema de propagação de chamas

$$\begin{cases} \triangle_g v_\varepsilon = f + \beta_\varepsilon(v_\varepsilon) \quad \text{em} \quad B_1^+ \\ v_\varepsilon \geq 0 \quad \text{em} \quad B_1^+ \\ v_\varepsilon = \varphi \quad \text{ao longo de} \quad B_1^0. \end{cases} \tag{1.2}$$

Em (1.2) assumimos que $\beta_\varepsilon \geq 0$ converge para a Dirac mass δ_0 quando $\varepsilon \to 0^+$. Em termos precisos,

$$\beta \in C^0(\mathbb{R}), \quad supp\beta \subset [0,1] \quad \text{e definimos} \quad \beta_\varepsilon(s) := \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{s}{\varepsilon}\right) \quad 0 < \varepsilon < 1. \tag{1.3}$$

A motivação para o estudo de (1.2) vem das aplicações ao caso de uma fase na teoria da propagação de chamas, aparecendo na descrição de chamas laminares como um limite assintótico para alta energia de ativação com termos de forçamento, que corresponde ao limite quando $\varepsilon \to 0^+$.

2 ESPAÇOS DE ORLICZ E O OPERADOR G LAPLACIANO

Neste capítulo temos como objetivo estabelecer os fundamentos teóricos bem como alguns resultados já bem conhecidos que serão ferramentas importantes a serem utilizadas no decorrer deste trabalho de tese. Vamos iniciar apresentando as definições de N-função, Espaços de Orlicz e Espaços de Orlicz-Sobolev. Em seguida, verificamos algumas estimativas válidas sob as condições (CP) e (CQ).

2.1 Espaços de Orlicz

2.1.1 N-funções

Começamos por relembrar o conceito de N-função que é um ingrediente fundamental para a definição de Espaços de Orlicz. Uma N-função $G : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função do tipo:

$$G(t) = \int_0^t g(s)\,ds,$$

onde a função $g : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é não negativa e satisfaz as seguintes condições;

a) $g(0) = 0$ e $\lim_{t\to\infty} g(t) = \infty$;

b) g é contínua à direita isto é, $\forall t \geq 0 \Rightarrow \lim_{s\to t^+} g(s) = g(t)$.

Estas condições implicam que a função G é convexa, contínua e positiva com $G(0) = 0$. Agora vamos assumir que as condições (CP) e (CQ) são satisfeita para tais N-funções e com isso obtemos as seguintes propriedades cuja demonstrações podem ser encontradas em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) e (BRAGA, 2015).

Lema 2.1.1. *A função g satisfaz as seguintes propriedades:*

(g_1) $\min\{s^{\delta}, s^{g_0}\}g(t) \leq g(st) \leq \max\{s^{\delta}, s^{g_0}\}g(t)$,

(g_2) *G é convexa e C^2,*

(g_3) $\frac{tg(t)}{1+g_0} \leq G(t) \leq tg(t)$.

Observação 2.1. *Por (g_1) e (g_2) temos uma desigualdade análoga para G:*

(G_1) $\min\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}\frac{G(t)}{1+g_0} \leq G(st) \leq (1+g_0)\max\{s^{\delta+1}, s^{g_0+1}\}G(t)$,

e a convexidade de G nos dá a seguinte desigualdade

(G_2) $G(a+b) \leq 2^{g_0}(G(a)+G(b))$.

Uma N-função $\tilde{G}$ é dita ser a N-função complementar a G se

$$\tilde{G}(t) = \int_0^t \tilde{g}(s)\,ds,$$

onde $\tilde{g}(s) = \sup_{g(t)\leq s} t$. Como g é diferenciavel e crescente seque que $\tilde{g} = g^{-1}$. Além disso em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) é provado o seguinte resultado.

Lema 2.1.2. *A função g^{-1} satisfaz as condições (CP)) e (CQ) para constantes δ^{-1} e g_0^{-1}, além disso satisfaz as seguintes desigualdades:*

($\tilde{g_1}$) $\min\{s^{1/\delta}, s^{1/g_0}\}g^{-1}(t) \leq g^{-1}(st) \leq \max\{s^{1/\delta}, s^{1/g_0}\}g^{-1}(t)$,

e se $\tilde{G}$ é tal que $\tilde{G}'(t) = g^{-1}(t)$ então

($\tilde{g_2}$) $\frac{\delta t g^{-1}(t)}{1+g_0} \leq \tilde{G}(t) \leq t g^{-1}(t)\ \forall t \geq 0$,

($\tilde{G_1}$) $\frac{1+\delta}{\delta}\min\{s^{1+/\delta}, s^{1+/g_0}\}\tilde{G}(t) \leq \tilde{G}(st) \leq \max\{s^{1+/\delta}, s^{1+/g_0}\}\tilde{G}(t)$,

($\tilde{g_3}$) $ab \leq \varepsilon G(a) + c(\varepsilon)\tilde{G}(b)\ \forall a, b > 0,\ \varepsilon > 0$,

($\tilde{g_4}$) $\tilde{G}(g(t)) \leq g_0 G(t)$.

Demonstração. Ver em Lemma 2.2, (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Em seguida enunciamos algumas desigualdades já bem estabelecidas da teoria de espaços de Sobolev. A primeira é uma desigualdade do tipo Sobolev que é introduzida pela estimativa (1.4) em (LIEBERMAN, 1983). Como no artigo citado, essa estimativa é feita em um contexto mais amplo do que nós precisamos daremos aqui uma prova.

Lema 2.1.3 (Desigualdade de Sobolev)**.** *Seja $h \in W_0^{1,2}(B)$, então para $k = \frac{n+2}{n}$ temos*

$$\int_B |h|^{2k}\,dx \leq C(n)\left(\int_B |h|^2\right)^{\frac{2}{n}} \int_B |Dh|^2\,dx. \tag{2.1}$$

Demonstração. Vamos supor que $h \in C_0^1(B)$, o caso geral segue usando argumentos de aproximação. Pelo Teorema de Gagliardo-Nirenberg capítulo 5 de (EVANS,)

$$\left(\int_B |h|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n)\int_B |Dh|\,dx.$$

Seja $q = \frac{p}{n} + r + 1$, onde p, q, r são números não-negativos:

$$\begin{aligned}
\int |h|^q &= \int |h|^{\frac{p}{n}}|h|^{r+1} \\
&\leq \left(\int |g|^p\right)^{1/n}\left(\int (|h|^{r+1})^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\leq C(n)\left(\int |h|^p\right)^{1/n}\int |D(h^{r+1})| \\
&\leq C(n)(r+1)\left(\int |h|^p\right)^{1/n}\left(\int |h|^r|Dh|\right).
\end{aligned}$$

Em particular tomamos $q = 2\left(\frac{n+2}{n}\right), p = 1 + \frac{q}{2}, r = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^2}$. Pela desigualdade de Scharwz temos as seguintes desigualdades

1)
$$\int |h|^p = \int |h||h|^{\frac{q}{2}} \le \left(\int |h|^2\right)^{1/2} \left(\int |h|^q\right)^{1/2}.$$

2)
$$\int |h|^r |Dh| \le \left(\int |h|^{2r}\right)^{1/2} \left(\int |Dh|^2\right)^{1/2}.$$

A seguir vamos usar a seguinte versão da desigualdade de Holder para $\alpha \in (0,1), 0 < p < r < q$ com $\frac{1-\alpha}{p} + \frac{\alpha}{q} = \frac{1}{r}$ a saber,

$$||h||_r \le ||h||_p^{1-\alpha} ||h||_q^{\alpha}.$$

Usamos com os seguintes expoentes:

$$2 < 2r = 2 + \frac{4}{n} - \frac{4}{n^2} < q = \frac{4}{n} + 2.$$

3)
$$\left(\int |h|^{2r}\right)^{\frac{1}{2r}} \le \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1-\alpha}{2}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{\alpha}{q}}.$$

Daí juntando a), b), c) na desigualdade anterior temos:

$$\begin{aligned}
\int |h|^q \, dx &\le C(n,r) \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\int |h|^{2r}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |Dh|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{1}{2n}} \left(\int |h|^2\right)^{\frac{r(1-\alpha)}{2}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{r\alpha}{q}} \left(\int |Dh|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{2n} + \frac{r(1-\alpha)}{2}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{1}{2n} + \frac{r\alpha}{q}} \left(\int |Dh|^2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Tomamos $\alpha \in (0,1)$ de modo que $\frac{1}{2n} + \frac{r\alpha}{q} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{q}{r}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2n}\right)$. Para esta escolha de α temos

$$\int |h|^q \, dx \le C \left(\int |h|^2\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int |h|^q\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |Dh|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

isso implica que

$$\left(\int |h|^{2\left(\frac{n+2}{n}\right)}\right) \le C \left(\int |h|^2\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int |Dh|^2\right).$$

$\square$

Lema 2.1.4. *Sejam $E \subset B_R$ e $u \in W^{1,1}_{loc}(B_R)$ então para uma constante $C = C(n) > 0$ tem-se*

$$|\{u = 0\}| \, ||u||_{L^1(E)} \le CR^n |E|^{\frac{1}{n}} ||\nabla u||_{L^1(B_R)}.$$

Demonstração. Ver em (LADYZHENSKAYA O. A,), cap 2; lema 3.4. □

Lema 2.1.5 (Desigualdade do tipo Poincaré em Sobolev)**.** *Seja $u \in W^{1,p}_{loc}(B_R)$, $1 < p < \infty$, então para uma constante $C = C(n,p) > 0$ tem-se*

$$|\{u=0\}|^p \left(\int_{B_R} |u|^p\, dx\right) \leq CR^{np+p}\left(\int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx\right).$$

Demonstração. Com efeito, aplicando o Lema 2.1.4 a função u^p com $E = B_R$ temos

$$\begin{aligned}|\{u=0\}| \int_{B_R} |u|^p\, dx &\leq CR^n \cdot R \int_{B_R} p|u^{p-1}\nabla u|\, dx \\ &\leq CR^n p\left(\int_{B_R} |u|^p\, dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}},\end{aligned}$$

isso implica que

$$|\{u=0\}| \left(\int_{B_R} |u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq CR^n \cdot R\left(\int_{B_R} |\nabla u|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

□

Lema 2.1.6. *Seja $u \in W^{1,1}_{loc}(B_\rho)$ então*

$$(l-k)|A_{l,\rho}|^{1-\frac{1}{n}} \leq c\frac{\rho^n}{|B_\rho \setminus A_{k,\rho}|}\int_{A_{k,\rho}\setminus A_{l,\rho}} |\nabla u|\, dx.$$

Para quaisquer inteiros não negativos $k \leq l$, onde $c = c(n) > 0$ e $A_{k,\rho} = \{u > k\} \cap B_\rho$.

Demonstração. Ver em (LADYZHENSKAYA O. A,), cap 2; lema 3.5. □

2.1.2 Espaços de Orlicz e Orlicz-Sobolev

Nesta seção vamos definir os espaços apropriados no qual iremos trabalhar. Mas antes algumas definições se fazem nescessárias. No que se segue denotamos por $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e limitado.

Definição 2.1.1 (Classe de Orlicz)**.** *Seja G uma N-função, definimos a classe de Orlicz como sendo o conjunto*

$$\mathbf{K}_G(\Omega) := \left\{u : \Omega \to \mathbb{R}, \mathit{mensurável}; \int_\Omega G(|u|)\, dx < \infty\right\}.$$

Note que para $G(t) = |t|^p$ com $p \geq 1$ temos $\mathbf{K}_G(\Omega) = L^p(\Omega)$, mas em geral para uma N-função qualquer o conjunto $\mathbf{K}_G(\Omega)$ não é um espaço vetorial. Para que isso aconteça pedimos que a N-função satisfaça a seguinte condição: existem constantes $k > 0, t_0 \geq 0$ tais que

$$G(2t) \leq kG(t),\ \forall t \geq t_0.$$

Esta condição é chamada $\triangle_2$-regular, para mais detalhes consultar em (ADAMS; FOURNIER, 2003). A partir de agora tendo em vista a Observação a seguir vamos supor que g satisfaz as condições (CP) e (CQ).

Observação 2.2. *Se a função g satisfaz as condições (CP) e (CQ) então a N-função G satisfaz a condição $\triangle_2$. Com efeito por (G_1) temos*

$$G(2t) \leq 2^{1+g_0}(1+g_0)G(t) \ \forall t \geq 1.$$

Definimos o espaço de Orlicz $L^G(\Omega) := spam\{\mathbf{K}_G(\Omega)\}$, isto é o espaço gerado pela classe $\mathbf{K}_G(\Omega)$. É possivel demonstrar que se a N-função G satisfaz a condição $\triangle_2$ então $L^G(\Omega) = \mathbf{K}_G(\Omega)$ ver em (ADAMS; FOURNIER, 2003). Neste espaço definimos a norma de Orlicz

$$||u||_G := \inf\left\{M > 0; \int_\Omega G\left(\frac{|u|}{M}\right) dx \leq 1\right\}.$$

De maneira análoga a definição dos espaços de Sobolev definimos os espaços de Orlicz-Sobolev $W^{1,G}(\Omega)$ consistindo de todas funções $u \in L^G(\Omega)$ tais que suas derivadas distribucionais ∇u existem e pertencem também a $L^G(\Omega)$. Definimos a norma neste espaço como sendo;

$$||u||_{W^{1,G}(\Omega)} := \max\{||u||_G, ||\nabla u||_G\}.$$

Pode-se verificar em (ADAMS; FOURNIER, 2003) que estes são espaços de Banach. Definimos também de maneira análoga o espaço

$$W_0^{1,G}(\Omega) := \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{||_{W^{1,G}}}.$$

Agora enunciaremos alguns resultados da teoria de Espaços de Orlicz cuja demonstração podem ser encontrados em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008).

Teorema 2.1.1. *$L^{\tilde{G}}(\Omega)$ é o dual de $L^G(\Omega)$. Os espaços $L^G(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega)$ são reflexivos.*

Demonstração. Ver em Theorem 2.1, (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Teorema 2.1.2. *Temos a imersão contínua $L^G(\Omega) \hookrightarrow L^{1+\delta}(\Omega)$.*

Demonstração. Ver em Theorem 2.2, (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Lema 2.1.7. *Existe uma constante $C = C(g_0, \delta) > 0$ tal que*

$$||u||_G \leq C \max\left\{ \left(\int_\Omega G(|u|)\right)^{1/(\delta+1)}, \left(\int_\Omega G(|u|)\right)^{1/(g_0+1)} \right\}.$$

Demonstração. Ver em Lemma 2.3, (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Lema 2.1.8 (Desigualdade do tipo Poincaré)**.** *Seja $u \in W_0^{1,G}(\Omega)$ então existe uma constante $C > 0$ que depende de Ω tal que*

$$\int_\Omega G(|u|)\,dx \leq \int_\Omega G(C|\nabla u|)\,dx.$$

Demonstração. Ver em (ZHENG *et al.*, 2017) Lemma 2.1. □

Teorema 2.1.3. *$L^{\tilde{G}}(\Omega)$ é o dual de $L^G(\Omega)$. Além disso, $L^G(\Omega)$ e $W^{1,G}(\Omega)$ são espaços reflexivos.*

Demonstração. Ver em Theorem 2.1 de (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

2.2 O operador g-Laplaciano

Nesta seção apresentamos o operador $g-Laplaciano$ dado por

$$\triangle_g u = div\left(\frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\right),$$

e em seguida relembramos alguns resultados já bem estabelecidos. No que se segue a função g satisfaz as condições (CP) e (CQ).

Definição 2.2.1. *Dizemos que uma função $u \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ é solução fraca da equação $\triangle_g u = f$ em Ω se para toda $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos*

$$\int_\Omega \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u \cdot \nabla \xi\,dx = -\int_\Omega f\xi\,dx.$$

Dizemos que uma função $u \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ é uma subsolução fraca da equação $\triangle_g u = f$ em Ω se para toda $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u \cdot \nabla \xi\,dx \leq -\int_\Omega f\xi\,dx.$$

Dizemos que uma função $u \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ é uma supersolução fraca da equação $\triangle_g u = f$ em Ω se para toda $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tivermos

$$\int_\Omega \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u \cdot \nabla \xi\,dx \geq -\int_\Omega f\xi\,dx.$$

No caso particular quando uma função $u \in W_{loc}^{1,G}(\Omega)$ é uma solução de $\triangle_g u = 0$, dizemos que u é g-harmônica.

Observação 2.3. *Por resultados da teoria dos espaços de Orlicz presentes em (ADAMS; FOURNIER, 2003), podemos trocar $\xi \in C_0^\infty(\Omega)$ na definição acima por $\xi \in W_0^{1,G}(\Omega)$.*

O operador $g-Laplaciano$ satisfaz a seguinte condição de eliticidade.

Lema 2.2.1. *Sejam $A(p) = g(|p|)\frac{p}{|p|}p$ e $a^{ij} = \frac{\partial A_i}{\partial p_j}$, então para todo $\xi \in \mathbb{R}^n$ com $\xi = (\xi_1, ..., \xi_n)$ temos*

$$\min\{1,\delta\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1,g_0\}\frac{g(|p|)}{|p|}|\xi|^2. \tag{2.2}$$

Demonstração. Ver a estimativa (2.2) em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Teorema 2.2.1. *Seja $u \in W_{loc}^{1,G}$ e v solução fraca de*

$$\triangle_g v = 0 \text{ em } \Omega, \;\; u - v \in W_0^{1,G}(\Omega).$$

Existe uma constante $C = C(n,\delta,g_0) > 0$ tal que

$$\int_\Omega G(|\nabla u|) - \int_\Omega G(|\nabla v|) \geq C\left(\int_{A_2} G(|\nabla u - \nabla v|)\,dx + \int_{A_1} F(|\nabla u|)|\nabla u - \nabla v|^2\,dx\right), \tag{2.3}$$

onde $F(t) = \frac{g(t)}{t}$,

$$A_1 = \{|\nabla u - \nabla v| \leq 2|\nabla u|\} \quad e \quad A_2 = \{|\nabla u - \nabla v| > 2|\nabla u|\}.$$

Demonstração. Ver em Theorem 2.3, (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008). □

Em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) é estudado o problema de existência de soluções do problema:

$$\triangle_g u = 0 \quad \text{em} \quad \Omega, \quad u = \varphi \in \partial\Omega, \tag{2.4}$$

com dado de fronteira $\varphi \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\overline{\Omega})$. Tais soluções aparecem como minimizante do funcional

$$\mathbf{J}(\psi) := \int_\Omega G(|\nabla \psi|)\,dx,$$

sobre o conjunto

$$\mathbf{K} = \left\{\phi \in W^{1,G}(\Omega); \phi = \varphi \in \partial\Omega\right\},$$

além disso satisfazem

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_{\overline{\Omega}} |\varphi|. \tag{2.5}$$

A seguir vamos apresentar uma demonstração da unicidade de soluções do problema 2.4.

Teorema 2.2.2 (Unicidade)**.** *Existe uma única solução do problema 2.4 em* $W^{1,G}(\Omega)$.

Demonstração. Sejam u_1 e u_2 soluções, já sabemos que essas funções são $g-$harmônicas e em particular $u_1 - u_2 \in W_0^{1,G}(\Omega)$. Então usando 2.3 temos:

$$0 = \int_\Omega G(|\nabla u_2|) - \int_\Omega G(|\nabla u_1|) \geq C\left(\int_{A_2} G(|\nabla u_2 - \nabla u_2|) + \int_{A_1} \frac{g(|\nabla u_2|)}{|\nabla u_2|}|\nabla u_2 - \nabla u_1|^2\right),$$

onde $A_1 = \{|\nabla u_2 - \nabla u_1| \leq 2|\nabla u_2|\}$ e $A_2 = \{|\nabla u_2 - \nabla u_1| > 2|\nabla u_2|\}$. Daí concluímos que

$$\frac{g(|\nabla u_2|)}{|\nabla u_2|}|\nabla u_2 - \nabla u_1|^2 = 0 \quad \text{em} \quad A_1,$$

e pela definição de A_1 vemos que

$$|\nabla u_2 - \nabla u_1| = 0 \quad \text{em} \quad A_1.$$

Por outro lado temos

$$\int_{A_2} G(|\nabla u_2 - \nabla u_1|)\, dx = 0,$$

isso implica que

$$|\nabla u_2 - \nabla u_1| = 0 \quad \text{em} \quad A_2.$$

Como $A_1 \cup A_2 = \Omega$ concluimos que $|\nabla u_2 - \nabla u_1| = 0$ em Ω. Por fim, como $u_2 - u_1 \in W_0^{1,G}(\Omega)$ segue da desigualdade do tipo Poincaré Lema 2.1.4,

$$\int_\Omega G(|u_2 - u_1|)\, dx \leq \int_\Omega G(C|\nabla u_2 - \nabla u_1|)\, dx = 0.$$

Daí podemos concluir que $u_2 = u_1$ em Ω.

□

Proposição 2.2.3 (Desigualdade de Holder Generalizada)**.** *Se G e $\tilde{G}$ são N-funções complementares tem-se*

$$\left|\int_\Omega u(x)v(x)\, dx\right| \leq 2||u||_G \cdot ||v||_{\tilde{G}}.$$

Demonstração. Ver 8.11 (A Generalized Holder Inequality) em (ADAMS; FOURNIER, 2003).

□

Lema 2.2.2 (Lema de extensão)**.** *Seja $\triangle_g u = f \in L^q$ em B_R^+, não-negativa, se anulando continuamente em B_R^0, para $q > n$. Sejam $\overline{u}$ e $\overline{f}$ as extensões para zero de u e f na bola B_R. Então*

$$\int_{B_R} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|}\nabla \overline{u} \cdot \nabla \xi - |\overline{f}|\xi\, dx \leq 0,$$

onde $0 \leq \xi \in C_0^\infty(B_R)$.

Demonstração. Seja $u^+ = \max\{\overline{u}, 0\}$ então

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla \overline{u}, \text{ em } \{u > 0\} \\ 0, \text{ em } \{\overline{u} \leq 0\} = \{\overline{u} = 0\}, \end{cases}$$

observe que $u^+ \equiv \overline{u}$, e portanto faremos a prova para u^+. Temos da mesma forma que no Lema 4.1 em (BRAGA, 2015) que $\overline{u} \in W_{loc}^{1,G}(B_R) \cap C^0(B_R)$.

Agora considere $0 \leq \xi \in C_0^\infty(B_R)$, $\varepsilon > 0$ e w uma função definida em B_R por

$$w = \max\left\{\min\left\{1, 2 - \frac{u^+}{\varepsilon}\right\}, 0\right\}.$$

Essa função satisfaz as seguintes condições:

1. $w = 0 \Leftrightarrow \max\left\{\min\left\{1, 2 - \frac{u^+}{\varepsilon}\right\}, 0\right\} \leq 0 \Leftrightarrow 2 - \frac{u^+}{\varepsilon} \leq 0 \Leftrightarrow 2\varepsilon \leq \overline{u} = u$.
2. $w = 1 \Leftrightarrow \max\left\{\min\left\{1, 2 - \frac{u^+}{\varepsilon}\right\}, 0\right\} = 1 \Leftrightarrow 2 - \frac{u^+}{\varepsilon} \geq 1 \Leftrightarrow \overline{u} \leq \varepsilon$.
3. $0 < w < 1 \Leftrightarrow 0 < 2 - \frac{u^+}{\varepsilon} < 1 \Leftrightarrow \varepsilon < \overline{u} < 2\varepsilon$.

Como na integral temos a identidade,

$$\nabla(\xi(1-w)) + \nabla(\xi w) = \nabla \xi,$$

segue que

$$\begin{aligned} \int_{B_R} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \xi \, dx &= \int_{B_R \cap \{0 < 1-w \leq 1\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi(1-w)) \, dx + \int_{B_R} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w) \, dx \\ &= \int_{B_R^+ \cap \{u > \varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi(1-w)) + \int_{B_R \cap \{0 \leq \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w). \end{aligned}$$

Seja $supp(\xi) = K \subset\subset B_R$, como $B_R^- \subset \{\overline{u} \leq \varepsilon\}$ segue que $\xi(1-w) = 0$ em ∂B_R^+, e portanto $\xi(1-w) \in W_0^{1,G}(B_R^+)$. Assim temos

$$\int_{B_R^+ \cap \{u > \varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi(1-w)) = \int_{B_R^+} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi(1-w)) = \int_{B_R^+} f \xi (1-w) \, dx.$$

Então

$$\int_{B_R} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla \xi \, dx \leq \int_{B_R} |\overline{f}| \xi \, dx + \int_{K \cap \{0 \leq \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w).$$

Além disso, temos

$$\int_{K \cap \{0 \leq \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w) = \int_{K \cap \{\overline{u} = 0\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w) + \int_{K \cap \{0 < \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi w).$$

Como em $\{\overline{u} = 0\}$ temos $\nabla \overline{u} = 0 \Rightarrow \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} = 0$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{K \cap \{0 \leq \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla \overline{u}|)}{|\nabla \overline{u}|} \nabla \overline{u} \cdot \nabla(\xi w) &= \int_{K^+ \cap \{0 < \overline{u} < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi w) \\ &\leq \int_{K^+ \cap \{\varepsilon < u < 2\varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla(\xi \left(2 - \frac{u}{\varepsilon}\right)) + \int_{K^+ \cap \{0 < u \leq \varepsilon\}} \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|} \nabla u \cdot \nabla \xi. \\ &\leq \int_{K^+ \cap \{\varepsilon < u < 2\varepsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \left(2 - \frac{u}{\varepsilon}\right) + \int_{K^+ \cap \{0 < u \leq \varepsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \\ &\leq 2 \int_{K^+ \cap \{0 < u < 2\varepsilon\}} g(|\nabla u|) |\nabla \xi| \, dx. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Holder paras espaços de Orlicz juntamente com (G_1) e (G_2) obtemos:

$$\int_{K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}} g(|\nabla u|)|\nabla\xi|\,dx \le C||g(|\nabla u|)||_{L^{\tilde{G}}(K^+)} \cdot \sup_K (1+|\nabla\xi|)^{\frac{1+g_0}{1+\delta}} \cdot |K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}|$$
$$\le C(\delta, g_0, \xi)\left(1+\int_K G(|\nabla u|)\,dx\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \cdot |K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}|.$$

Como

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} |K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}| = |\cap_{\varepsilon>0} K^+\cap\{0<u<2\varepsilon\}| = 0,$$

chegamos a conclusão que

$$\int_{B_R} \frac{g(|\nabla\overline{u}|)}{|\nabla\overline{u}|}\nabla\overline{u}\cdot\nabla\xi \le \int_{B_R} |\overline{f}|\xi\,dx.$$

□

2.3 Existência de soluções e Estimativa L^∞

Agora vamos nos voltar para a questão de existência de soluções no sentido das distribuições para o seguinte problema:

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \quad \text{em } \Omega \\ u = \varphi \quad \text{em } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi \in W^{1,G}(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ e $f \in L^q(\Omega)$ $q \ge n$. A estratégia para demonstrarmos a existência basea-a se em técnicas de cálculo das variações. Com isso em mente, vamos usar o seguinte resultado que, em particular, nos diz que tal estratégia faz sentido ser considerada.

Lema 2.3.1. *Considere o funcional linear $\Lambda_f : W_0^{1,G}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por*

$$\Lambda_f(\xi) = \int_\Omega f(x)\xi(x)\,dx.$$

Então existe $C = C(n, |\Omega|, ||f||_{L^q(\Omega)}, \delta, g_0) > 0$ tal que

$$|\Lambda_f(\xi)| \le C\cdot ||\xi||_{W_0^{1,G}(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver o Lemma 14.5 em (BRAGA; MOREIRA, 2022). □

Para o que segue utilizaremos as ideias presentes em (GIUSTI, 2003), capitulo 4. Mais precisamente consideramos o conjunto

$$V := \{\psi \in W^{1,G}(\Omega); \psi - \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)\}.$$

Definimos o funcional

$$\mathscr{F}(u) := \int_\Omega G(|Du|) + f(x)u\,dx \quad \forall u \in V.$$

Afirmamos que um minimizante do funcional $\mathscr{F}$ em V é solução no sentido das distribuições do problema de Dirichlet.

Com efeito, seja $u \in V$ um minimizante e tomamos uma $\eta \in W_0^{1,G}(\Omega)$ arbitrária. Note que para todo $t \in \mathbb{R}$ temos que a função $u + t\eta \in V$. Então a função $H(t) = \mathscr{F}(u + t\eta)$ tem um minimo local em $t = 0$, e portanto obtemos

$$0 = H'(0) = \int_\Omega \frac{g(|Du)}{|Du|} Du \cdot D\eta\,dx + \int_\Omega \eta \cdot f\,dx.$$

A seguir provaremos dois lemas a respeito do funcional $\mathscr{F}$. Escrevemos $u_k \rightharpoonup u$ denotando a convergência da sequencia $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ para a função u na topologia fraca do espaço $W^{1,G}(\Omega)$.

Lema 2.3.2. *Sejam $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ tal que $u_k \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,G}(\Omega)$. Então*

$$\mathscr{F}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathscr{F}(u_k).$$

Demonstração. Começamos provando um fato básico que decorre da convexidade da N-função G.

Afirmação: para todo par de funções $u, v \in W^{1,G}(\Omega)$ tem-se

$$\int_\Omega G(|Dv|) \geq \int_\Omega G(|Du|) + \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (Dv - Du).$$

Com efeito, seja $w^s = sv + (1-s)u$ então pelo Teorema do valor médio para integrais temos a igualdade

$$\int_\Omega G(|Dv|) - G(|Du|) = \int_0^1 \int_\Omega \frac{g(|Dw^s|)}{|Dw^s|} Dw^s \cdot (Dv - Du)\,dx\,ds.$$

Então usando o Lema 2.2.1 obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_\Omega \frac{g(|Dw^s|)}{|Dw^s|} Dw^s \cdot (Dv - Du)\,dx\,ds - \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (Dv - Du) \\
&= \int_0^1 \int_\Omega \left[\frac{g(|Dw^s|)}{|Dw^s|} Dw^s - \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \right] \cdot (Dv - Du)\,dx\,ds \\
&= \int_0^1 \frac{1}{s} \int_\Omega \left[\frac{g(|Dw^s|)}{|Dw^s|} Dw^s - \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \right] \cdot (Dw^s - Du)\,dx\,ds \\
&= \sum_{i,j} \int_0^1 \frac{1}{s} \int_\Omega \int_0^1 a^{ij}(Dw^s + (1-t)(Du - Dw^s))(D_j w^s - D_j u)(D_i w^s - D_i u)\,dt\,dx\,ds \\
&\geq \int_0^1 \frac{1}{s} \int_\Omega \int_0^1 \min\{1, \delta\} \frac{g(|Dw^s + (1-t)(Du - Dw^s)|)}{|Dw^s + (1-t)(Du - Dw^s)|} |Dw^s - Du|\,dt\,dx\,ds \geq 0.
\end{aligned}
$$

Agora como por $(\tilde{g}_4)$ tem-se $\tilde{G}(g(|Du|)) \leq g_0 G(|Du|)$ segue que

$$
g(|Du|) \frac{Du}{|Du|} \in L^{\tilde{G}}(\Omega).
$$

Dessa forma vemos pela desigualdade de Holder para espaços de Orlicz que o funcional linear $T : W^{1,G}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$
T(\psi) = \int_\Omega g(|Du|) \frac{Du}{|Du|} \cdot D\psi\,dx
$$

é limitado. Então em particular vale que

$$
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (Du_k - Du)\,dx = 0.
$$

Assim pela Afirmação obtemos

$$
\int_\Omega G(|Du|) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega G(|Du_k|). \tag{2.6}
$$

Por fim, como vimos no Lema 2.3.1, o funcional linear $\Lambda_f : W_0^{1,G}(\Omega) \to \mathbb{R}$ dado por

$$
\Lambda_f(\xi) = \int_\Omega f(x)\xi(x)\,dx,
$$

é contínuo e então pela convergência fraca segue que

$$
\lim_{k\to\infty} \int_\Omega f \cdot u_k\,dx = \int_\Omega f \cdot u\,dx.
$$

Portanto usando isso juntamente com a estimativa 2.6 concluímos que

$$
\int_\Omega G(|Du|) + f \cdot u\,dx \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega G(|Du_k|) + f \cdot u_k\,dx.
$$

□

Lema 2.3.3. *Para toda sequência* $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ *tal que*

$$\lim_{k\to\infty} ||u_k||_{W^{1,G}} = +\infty$$

ocorre

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{F}(u_k) = +\infty.$$

Demonstração. Seja $u \in V$ então $u - \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)$. Pela desigualdade triangular temos

$$|f(x)u(x)| \leq |f(x)||\varphi(x)| + |f(x)||u(x) - \varphi(x)|.$$

Queremos estimar

$$\int_\Omega |f(x)(u(x) - \varphi(x))|\,dx.$$

De forma semelhante ao Lema 2.3.1 consideramos três casos para $p = 1+\delta$ onde teremos sempre em vista o fato de que como já foi mencionado termos a imersão contínua $W_0^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$.

Caso 1: $p > n$.

Neste caso $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$ e para $q' = \frac{q}{q-1}$, usando as desigualdades de Holder e Poincaré juntamente com a propriedade (G_1) obtemos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f(u-\varphi)| &\leq ||f||_{L^q}||u-\varphi||_{L^{q'}} \\
&\leq |\Omega|^{1/q'}||f||_{L^q}||u-\varphi||_{L^\infty} \\
&\leq C\cdot|\Omega|^{1/q'}||f||_{L^q}||u-\varphi||_{W_0^{1,p}} \\
&\leq C\cdot|\Omega|^{1/q'}||f||_{L^q}||Du-D\varphi||_{L^p} \\
&\leq C\cdot||f||_{L^q}\left(\int_\Omega |Du|^{1+\delta} + \int_\Omega |D\varphi|^{1+\delta}\right)^{\frac{1}{1+\delta}} \\
&\leq C(\varepsilon)||f||_{L^q}^{\frac{1+\delta}{\delta}} + \frac{\varepsilon}{1+\delta}\left(\int_\Omega |Du|^{1+\delta} + \int_\Omega |D\varphi|^{1+\delta}\right) \\
&\leq C(\varepsilon)||f||_{L^q}^{\frac{1+\delta}{\delta}} + \frac{\varepsilon}{1+\delta}\left(C(g_0, G(1))\int_\Omega G(|Du|) + |\Omega| + \int_\Omega |D\varphi|^{1+\delta}\right).
\end{aligned}$$

Caso 2: $p = n$.

Neste caso temos $W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^r(\Omega)$ para todo $r \in [1, +\infty)$. Em particular fazendo $r = q'$, utilizando as desigualdades de Holder, Poincaré juntamente com a propriedade (G_1) da mesma forma que no caso 1 obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u-\varphi)| &\leq ||f||_{L^q}||u-\varphi||_{L^{q'}}\\ &\leq C\cdot||f||_{L^q}||u-\varphi||_{W_0^{1,p}}\\ &\leq C(\varepsilon)||f||_{L^q}^{\frac{1+\delta}{\delta}}+\frac{\varepsilon}{1+\delta}\left(C(g_0,G(1))\int_\Omega G(|Du|)+|\Omega|+\int_\Omega|D\varphi|^{1+\delta}\right).\end{aligned}$$

Caso 3: $1<p<n$.

Neste caso temos $W_0^{1,p}\hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$ com $p*=\frac{np}{n-p}$. Observe que $(p*)'=\frac{np}{np-n+p}$, logo como $p+1+\delta>1$ vemos que $(p*)'<n\leq q$. Então utilizando as desigualdades de Holder, Poincaré juntamente com a propriedade (G_1) da mesma forma que nos casos anteriores obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(u-\varphi)| &\leq ||f||_{L^{(p*)'}}||u-\varphi||_{L^{p*}}\\ &\leq |\Omega|^{\frac{1}{(p*)'}-\frac{1}{q}}||f||_{L^q}||u-\varphi||_{L^{p*}}\\ &\leq C\cdot|\Omega|^{\frac{1}{(p*)'}-\frac{1}{q}}||f||_{L^q}||u-\varphi||_{W_0^{1,p}}\\ &\leq C(\varepsilon)||f||_{L^q}^{\frac{1+\delta}{\delta}}+\frac{\varepsilon}{1+\delta}\left(C(g_0,G(1))\int_\Omega G(|Du|)+|\Omega|+\int_\Omega|D\varphi|^{1+\delta}\right).\end{aligned}$$

Assim levando em consideração os três casos temos

$$\begin{aligned}\mathscr{F}(u)&\geq\int_\Omega G(|Du|)-\int_\Omega|f\cdot\varphi|-\int_\Omega|f\cdot(u-\varphi)|\\ &\geq\int_\Omega G(|Du|)-\int_\Omega|f\cdot\varphi|-C(\varepsilon,||f||_{L^q},\delta,|\Omega|,g_0,G(1)||D\varphi||_{L^{1+\delta}})\\ &-\frac{\varepsilon}{1+\delta}C(G(1),g_0)\int_\Omega G(|Du|).\end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon=\frac{1+\delta}{2C(g_0,G(1))}$ obtemos

$$\mathscr{F}(u)\geq\frac{1}{2}\int_\Omega G(|Du|)-\int_\Omega|f\cdot\varphi|-C.$$

Portanto chegamos a conclusão de que existe uma constante

$$\tilde{C}=\tilde{C}(n,||f||_{L^q},\delta,|\Omega|,g_0,G(1),||D\varphi||_{L^{1+\delta}},||\varphi||_{L^\infty})>0$$

para qual tem-se

$$\int_\Omega G(|Du|)\,dx\leq\tilde{C}\cdot[\mathscr{F}(u)+1]\quad\forall u\in V. \tag{2.7}$$

Concluímos a demonstração com a desigualdade acima juntamente do Lema 2.1.7. □

Para o próximo resultado iremos utilizar o seguinte lema de iteração.

Lema 2.3.4. *Seja $\{J_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números não negativos satisfazendo*

$$J_{m+1} \leq C \cdot D^m J_m^{1+\xi}, \;\; \forall m \in \mathbb{N},$$

onde $C, \xi > 0$ e $D > 1$ são constantes independentes de m. Se

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\xi}} \cdot D^{-\frac{1}{\xi^2}},$$

então $\lim_{m\to\infty} J_m = 0$.

Demonstração. Ver Lemma A.1 de (ZHENG; TAVARES, 2022). □

Denotaremos $p* = \frac{np}{n-p}$ para $1 \leq p < n$.

Teorema 2.3.1 (Existência)**.** *Seja $\varphi \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$, e $f \in L^q(\Omega)$ com $q \geq n$. Existe uma solução no sentido das distribuições para o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \quad em \;\; \Omega \\ u = \varphi \quad em \;\; \partial\Omega. \end{cases}$$

Além disso, existe uma constante $C_0 > 0$ que depende somente de $n, g_0, ||f||_{L^n(\Omega)}, \delta, G(1), \tilde{G}(1)$, $||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}, ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)}$ e do diâmetro de Ω tal que

$$||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||u||_{W^{1,G}(\Omega)} \leq C_0.$$

Demonstração. Como comentamos anteriormente é suficiente mostrarmos que existe um minimizante local para o funcional $\mathscr{F}$ no conjunto $V = \{\psi \in W^{1,G}(\Omega); \psi - \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)\}$. Seja $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset V$ uma sequência minimizante, isto é

$$\lim_{k\to\infty} \mathscr{F}(u_k) = \inf_V \mathscr{F}.$$

Observe que por 2.7 temos

$$-\infty < \inf_V \mathscr{F} < +\infty,$$

então pelo Lema 2.3.3 vemos que a sequência (u_k) é limitada na norma do espaço $W^{1,G}(\Omega)$. Sendo este espaço $W^{1,G}(\Omega)$ reflexivo segue que existe uma função $u \in W^{1,G}(\Omega)$ tal que

$$u_k \rightharpoonup u \;\; \text{em} \;\; W^{1,G}(\Omega).$$

Como o conjunto V é fechado na topologia fraca de $W^{1,G}(\Omega)$ vemos que $u \in V$. Por fim, do Lema 2.3.2 concluímos que

$$\mathscr{F}(u) \leq \liminf_{k\to\infty} \mathscr{F}(u_k) = \inf_V \mathscr{F}.$$

Agora vamos provar a limitação uniforme das normas L^∞ e $W^{1,G}$. Seguiremos as ideias presentes no Theorem 2.1 em (ZHENG; TAVARES, 2022).

Seja $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $k_0 \geq ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}$. Para cada $k \geq k_0$ definimos a sequência de truncamentos $u_k : \Omega \to \mathbb{R}$ dadas por

$$u_k = \begin{cases} k \cdot sgn(u), & |u| > k \\ u, & |u| \leq k. \end{cases}$$

Seja $A_k = \{|u| > k\}$, para cada $k \geq k_0$ temos

$$u = u_k \quad \text{em} \quad A_k^c \quad \text{e} \quad u_k = k \cdot sgn(u) \quad \text{em} \quad A_k.$$

Pela minimalidade de u

$$\begin{aligned} \int_{A_k} G(|Du|) &= \int_\Omega G(|Du|) - \int_{A_k^c} G(|Du_k|) \\ &= \int_\Omega G(|Du|) - G(|Du_k|) \\ &\leq \int_\Omega f \cdot (u_k - u) \\ &= \int_{A_k} f \cdot (u_k - u), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \int_{A_k} f \cdot (u_k - u) &= \int_{A_k \cap \{u \geq 0\}} f \cdot (k - u) + \int_{A_k \cap \{u < 0\}} f \cdot (-k - u) \\ &\leq 2 \int_{A_k} |f| \cdot (|u| - k). \end{aligned}$$

Observamos que $(|u| - k)^+ \in W_0^{1,G}(\Omega)\ \forall k \geq k_0$, então usando as imersões contínuas $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1}(\Omega)$ e $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{1*}(\Omega)$ jutamente da propriedade $(\tilde{g}_3)$ obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{A_k} |f|(|u|-k) &\le \left(\int_{A_k} |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{A_k} (|u|-k)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\le \left(\int_{A_k} |f|^n\right)^{\frac{1}{n}} \left(\int_{\Omega} ((|u|-k)^+)^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\le C||f||_{L^n} \int_{\Omega} |D(|u|-k)^+| \\
&= C||f||_{L^n} \int_{A_k} |Du| \\
&\le C||f||_{L^n} \left(\varepsilon \int_{A_k} G(|Du|) + C(\varepsilon)\tilde{G}(1)|A_k|\right).
\end{aligned}
$$

Então para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno dependendo de $||f||_{L^n(\Omega)}, n, \delta, g_0, G(1)$ e $\tilde{G}(1)$ temos para uma constante $C > 0$ que depende dos mesmos parâmetros

$$
\int_{A_k} G(|Du|) \le C|A_k|.
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_{A_k} G(|Du|) &= \int_{A_k \cap \{|Du| \le 1\}} G(|Du|) + \int_{A_k \cap \{|Du| > 1\}} G(|Du|) \\
&\le C(\delta) \left[\int_{A_k \cap \{|Du| \le 1\}} |Du|^{1+g_0} + \int_{A_k \cap \{|Du| > 1\}} |Du|^{1+\delta}\right],
\end{aligned}
$$

e obtemos para uma nova constante $C > 0$ que ainda depende dos mesmos parâmetros

$$
\int_{A_k} |Du|^{1+\delta} \le C|A_k|.
$$

Como $D|u| = (Du)sgn(u)$ chegamos a seguinte desigualdade

$$
\int_{A_k} |D|u||^{1+\delta} \le C|A_k|. \tag{2.8}
$$

Agora fixamos $k > 4k_0$ e definimos

$$
k_m = \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) \quad \forall m \in \mathbb{N}.
$$

Dessa forma temos $k_m \ge k_0,\ k_m < k_{m+1}$ e em particular $A_{k_{m+1}} \subset A_{k_m}$. Como temos a imersão contínua $W_0^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W_0^{1,1+\delta}(\Omega)$ faz sentido considerarmos

$$
J_m := \int_{A_{k_m}} ((|u|-k)^+)^{1+\delta}.
$$

Afirmamos que

$$
J_{m+1} \le C \cdot D^m J_m^{1+\xi} \quad \forall m \in \mathbb{N},
$$

onde $C,\xi > 0$ e $D > 1$ são constantes independestes de m.

Com efeito, a imersão contínua $W_0^{1,1+\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{(1+\delta)*}(\Omega)$ e o fato de que $(|u|-k_m)^+ \in W_0^{1,1+\delta}(\Omega)$ implicam em

$$\begin{aligned}
J_{m+1} &\leq \left(\int_{A_{k_{m+1}}} ((|u|-k_{m+1})^+)^{(1+\delta)*}\right)^{\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} |A_{k_{m+1}}|^{1-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} \\
&\leq \left(\int_{\Omega} ((|u|-k_{m+1})^+)^{(1+\delta)*}\right)^{\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} |A_{k_{m+1}}|^{1-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} \\
&\leq C\left(\int_{\Omega} |D(|u|-k_{m+1})^+|^{1+\delta}\right) |A_{k_{m+1}}|^{1-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} \\
&= C\left(\int_{A_{k_{m+1}}} |D|u||^{1+\delta}\right) |A_{k_{m+1}}|^{1-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}}.
\end{aligned}$$

Então usando essas estimativas juntamente com 2.8 obtemos para uma constante $C = C(n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), ||f||_{L^n(\Omega)}) > 0$

$$J_{m+1} \leq C|A_{k_{m+1}}|^{2-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}}.$$

Note que $k_{m+1} - k_m = \frac{k}{2^{m+3}}$ $\forall m \in \mathbb{N}$, logo

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k}{2^{m+3}}\right)^{1+\delta} |A_{k_{m+1}}| &= (k_{m+1}-k_m)^{1+\delta}|A_{k_{m+1}}| \\
&= \int_{A_{k_{m+1}}} |k_{m+1}-k_m|^{1+\delta} \\
&\leq \int_{A_{k_{m+1}}} ((|u|-k_m)^+)^{1+\delta} \\
&\leq J_m,
\end{aligned}$$

e sendo $k \geq 1$ obtemos

$$|A_{k_{m+1}}| \leq \left(\frac{2^{m+3}}{k}\right)^{1+\delta} \cdot J_m \leq 2^{(m+3)(1+\delta)} J_m.$$

Portanto

$$J_{m+1} \leq C(2^{(m+3)(1+\delta)})^{2-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} J_m^{2-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}}.$$

Isso prova a afirmação feita.

Observamos que

$$|A_{k_0}|\left(\frac{k}{4}\right)^{(1+\delta)*} = |A_{k_0}|k_0^{(1+\delta)*} \leq \int_{A_{k_0}} |u|^{(1+\delta)*} \leq \int_{\Omega} |u|^{(1+\delta)*},$$

o que implica

$$|A_{k_0}| \leq \left(\frac{4}{k}\right)^{(1+\delta)*} ||u||_{L^{(1+\delta)*}}^{(1+\delta)*}.$$

Assim, temos

$$\begin{aligned}
J_0 &= \int_{A_{k_0}} ((|u|-k_0)^+)^{1+\delta} \\
&\leq \int_{A_{k_0}} |u|^{1+\delta} \\
&\leq ||u||_{L^{(1+\delta)*}}^{\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} |A_{k_0}|^{1-\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}} \\
&\leq \left(\frac{4}{k}\right)^{(1+\delta)*-(1+\delta)} \cdot ||u||_{L^{(1+\delta)*}}^{\frac{1+\delta}{(1+\delta)*}+(1+\delta)*-(1+\delta)}.
\end{aligned}$$

Portanto é possível tomar k suficientemente grande, dependendo de $||u||_{L^{(1+\delta)*}}$ e que pela imersão continua $W^{1,G}(\Omega) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(\Omega) \hookrightarrow L^{(1+\delta)*}(\Omega)$ depende de $||u||_{W^{1,G}}$, de modo que

$$J_0 \leq C^{-\frac{1}{\xi}} D^{-\frac{1}{\xi^2}}.$$

Daí pelo Lema 2.3.4 vemos que $J_m \to 0$ quando $m \to +\infty$.

Por outro lado, temos

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{A_{k_m}} ((|u|-k_m)^+)^{1+\delta} = \int_{A_{k/2}} \left(\left(|u|-\frac{k}{2}\right)^+\right)^{1+\delta}.$$

Então segue que $|u| \leq k$ em quase todo ponto de Ω.

Agora vamos tratar da estimativa para a norma $||u||_{W^{1,G}(\Omega)}$. Usando a imersão contínua $W_0^{1,1}(\Omega) \hookrightarrow L^{1*}(\Omega)$ juntamente do fato de que $u-\varphi \in W_0^{1,1}(\Omega)$, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |f\cdot u| &\leq ||f||_{L^n} ||u||_{L^{1*}} \\
&\leq ||f||_{L^n} (||u-\varphi||_{L^{1*}} + ||\varphi||_{L^{1*}}) \\
&\leq C||f||_{L^n} \left(C||Du-D\varphi||_{L^1(\Omega)} + ||\varphi||_{L^{1*}(\Omega)}\right) \\
&\leq C||f||_{L^n} \left(||Du||_{L^1(\Omega)} + ||D\varphi||_{L^1(\Omega)} + ||\varphi||_{L^{1*}(\Omega)}\right) \\
&\leq C||f||_{L^n} \left(\tau \int_\Omega G(|Du|) + C(\tau)|\Omega|\tilde{G}(1) + ||D\varphi||_{L^1(\Omega)} + ||\varphi||_{L^{1*}(\Omega)}\right) \\
&= M + C||f||_{L^n} \tau \int_\Omega G(|Du|),
\end{aligned}$$

onde $M = M(\tau, n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), ||f||_{L^n}, |\Omega|, ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)}, ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)}) > 0$. Mais uma vez por u ser minimizante temos que

$$\int_\Omega G(|Du|) \leq \int_\Omega G(|D\varphi|) + \int_\Omega f \cdot u - \int_\Omega f \cdot \varphi \tag{2.9}$$

$$\leq \int_\Omega G(|D\varphi|) + ||\varphi||_{L^\infty}||f||_{L^n} + M + C||f||_{L^n}\tau \int_\Omega G(|Du|). \tag{2.10}$$

Assim tomando $\tau = \frac{1}{2C||f||_{L^n}}$ temos para uma constante $M > 0$ possivelmente maior que a anterior mas dependendo dos mesmos parâmetros, a seguinte desigualdade

$$\int_\Omega G(|Du|) \leq M.$$

Como $u - \varphi \in W_0^{1,G}(\Omega)$ usando a desigualdade de Poincaré segue que

$$\int_\Omega G(|u|) \leq C \left[\int_\Omega G(|u-\varphi|) + \int_\Omega G(|\varphi|) \right] \tag{2.11}$$

$$\leq C \left[\int_\Omega G(|Du - D\varphi|) + \int_\Omega G(|\varphi|) \right] \tag{2.12}$$

$$\leq M + C \int_\Omega (G(|D\varphi|) + G(|\varphi|)), \tag{2.13}$$

onde $C > 0$ depende apenas de δ, g_0 e do diâmetro de Ω. Assim essas desigualdades juntamente do Lema 2.1.7 nos dá a estimativa para $||u||_{W^{1,G}(\Omega)}$ que buscávamos.

□

Observação 2.4. *No Teorema 2.3.1 se supusermos que* $\max\{||f||_{L^q}, ||\varphi||_{L^\infty}, ||\varphi||_{W^{1,G}}\} \leq 1$ *então fica evidente na demonstração que a constante* $C_0 > 0$ *pode ser tomada dependendo somente dos parâmetros universais* $n, \delta, g_0, G(1), \tilde{G}(1)$ *e do diâmetro de* Ω.

Consideremos $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução do seguinte problema

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \quad \text{em} \quad \Omega \\ u = \varphi \quad \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi \in W^{1,G}(\Omega) \cap L^\infty(\overline{\Omega})$ e $f \in L^n(\Omega)$. Do Teorema 2.3.1 sabemos que $u \in L^\infty(\Omega)$, vamos mostrar que vale uma estimativa L^∞ para soluções do problema acima por constantes explicitas que dependem do termo não homogêneo, do dado de fronteira e dos parâmetros da equação. Mas antes, apresentamos a seguinte ferramenta que se mostrará muito útil no restante do trabalho.

Observação 2.5 (O problema escalonado)**.** *Como em (BRAGA et al., 2023) seja u solução fraca do problema de Dirichlet e* $K > 0$ *uma constante. Consideremos* $u_K(x) = \frac{u(x)}{K}$, $g_K(t) = \frac{g(Kt)}{g(K)}$ *e*

$f_K(x) = \frac{f(x)}{g(K)}$. *Então* u_K *é solução fraca de*

$$\triangle_{g_K} u_K = f_K \quad em \quad \Omega.$$

Com efeito,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \frac{g_K(|\nabla u_K|)}{|\nabla u_K|}\nabla u_K \cdot \nabla\varphi\, dx &= \int_\Omega \frac{g\left(K\frac{|\nabla u|}{K}\right)}{g(K)\frac{|\nabla u|}{K}}\frac{\nabla u}{K}\cdot\nabla\varphi\, dx \\ &= \frac{1}{g(K)}\int_\Omega \frac{g(|\nabla u|)}{|\nabla u|}\nabla u\cdot\nabla\varphi\, dx \\ &= -\frac{1}{g(K)}\int_\Omega f(x)\varphi(x)\, dx \\ &= -\int_\Omega f_K(x)\varphi(x)\, dx.\end{aligned}$$

Se G_K *é uma N-função tal que* $G_K(0) = 0$ *e* $(G_K)' = g_K$ *então* G_K *satisfaz as condições (CP) e (CQ) com as mesmas constantes* δ *e* g_0.

$$\frac{t\cdot(g_K)'(t)}{g_K(t)} = \frac{t\cdot[Kg'(Kt)]}{g(Kt)} = \frac{(Kt)\cdot g'(Kt)}{g(Kt)}.$$

Por fim, segue da definição de $g_k(t)$ *que* $G_K(t) = \frac{G(K\cdot t)}{Kg(K)}$ *e* $g_k(t)^{-1} = \frac{g^{-1}(t\cdot g(K))}{K}$. *Então temos pela propriedade* (g_3) *a seguinte limitação uniforme para* $G_K(1) = \frac{G(K)}{Kg(K)}$

$$\frac{1}{1+g_0} \le G_K(1) \le 1,$$

além disso temos pela propriedade $(\tilde{g}_2)$ *uma limitação uniforme para* $\tilde{G_K}(1)$ *uma vez que* $g_K^{-1}(1) = 1$

$$\frac{\delta}{1+g_0} \le \tilde{G_K}(1) \le 1.$$

Proposição 2.3.2 (Estimativa L^∞)**.** *Seja* $u \in W^{1,G}(\Omega)$ *solução do seguinte problema*

$$\begin{cases}\triangle_g u = f \quad em \quad \Omega \\ u = \varphi \quad em \quad \partial\Omega,\end{cases}$$

onde $\varphi \in W^{1,G}(\Omega)\cap L^\infty(\overline{\Omega})$ *e* $f \in L^n(\Omega)$. *Então existe uma constante* $C = C(n, \tilde{G}(1), G(1), g_0, |\Omega|, \delta) > 0$ *tal que*

$$\sup_\Omega |u| \le C\cdot\left[g^{-1}(||f||_{L^n(\Omega)}) + ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)} + ||\varphi||_{L^\infty(\overline{\Omega})}\right].$$

Demonstração. Primeiramente note que podemos supor

$$\max\{||f||_{L^n(\Omega)}, ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)}, ||\varphi||_{L^\infty(\overline{\Omega})}\} \le 1. \tag{2.14}$$

Caso contrário tomamos $K = g^{-1}(||f||_{L^n(\Omega)}) + ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)} + ||\varphi||_{L^\infty(\overline{\Omega})}$ na Observação 2.5. Então u_K é solução do problema escalonado

$$\begin{cases} \triangle_{g_K} = f_K & \text{em} \quad \Omega \\ u_K = \varphi_K & \text{em} \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

onde $\varphi_K = \frac{\varphi}{K}$ e pelas definições de g_K, f_K e $K > 0$ temos

$$\max\{||f_K||_{L^n(\Omega)}, ||\varphi_K||_{W^{1,G}(\Omega)}, ||\varphi_K||_{L^\infty(\overline{\Omega})}\} \leq 1.$$

Assim é suficiente provarmos que existe uma constante positiva $C = C(n, \tilde{G}(1), G(1), g_0, |\Omega|, \delta)$ tal que

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C.$$

No que segue sempre denotaremos $C > 0$ uma constante que só dependerá dos parâmetros $n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), |\Omega|$. Sejam $k_0 = \sup_{\partial\Omega} u^+$ e $A_k = \{x \in \Omega; u^+(x) > k\}$.

Passo 1:

$$\int_{A_k} g(|\nabla u|)|\nabla u| \leq C \cdot |A_k|, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Tomando $\eta = \max\{u^+ - k, 0\}$ para $k \geq k_0$ temos $\eta \in W_0^{1,1}(\Omega) \cap W^{1,G}(\Omega) = W_0^{1,G}(\Omega)$. Então usando η como função teste na definição de solução fraca obtemos e como $k > 0$ tem-se $\nabla u = \nabla u^+$ em A_k, obtemos

$$\int_{A_k} g(|\nabla u|)|\nabla u| = -\int_{A_k} f \cdot (u^+ - k). \tag{2.15}$$

Por outro lado, usando as desigualdades de Holder e Young juntamente do teorema do mergulho de Sobolev

$$\begin{aligned} \left|\int_{A_k} f \cdot (u^+ - k)\right| &\leq ||f||_{L^n} \left(\int_{A_k} |u^+ - k|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} && (2.16) \\ &\leq C(n, diam(\Omega))||f||_{L^n} \int_{A_k} |\nabla u| && (2.17) \\ &\leq \int_{A_k} \tilde{G}(2C) + \int_{A_k} G\left(\frac{1}{2}|\nabla u|\right) && (2.18) \\ &\leq \tilde{G}(2C)|A_k| + \frac{1}{2}\int_{A_k} |\nabla u| g\left(\frac{1}{2}|\nabla u|\right) && (2.19) \\ &\leq \tilde{G}(2C)|A_k| + \frac{1}{2}\int_{A_k} |\nabla u| g\left(|\nabla u|\right), && (2.20) \end{aligned}$$

daí juntando 2.20 com 2.15 obtemos o passo 1.

Passo 2:

$$\int_{A_k} |\nabla u| \leq C \cdot |A_k|, \ \ \forall k \geq k_0.$$

Com efeito, usando o Passo 1

$$\begin{aligned}
\int_{A_k} |\nabla u| &\leq \int_{A_k \cap \{|\nabla u| \leq 1\}} |\nabla u| + \int_{A_k \cap \{|\nabla u| > 1\}} |\nabla u| \\
&\leq |A_k| + \frac{1}{g(1)} \int_{A_k} |\nabla u| g(|\nabla u|) \\
&\leq |A_k| + C \cdot |A_k|.
\end{aligned}$$

Note que mais uma vez

$$\int_{A_k} (u^+ - k)\, dx \leq |A_k|^{\frac{1}{n}} \left(\int_{A_k} |u^+ - k|^{\frac{n}{n-1}} \right)^{\frac{n-1}{n}} \leq C(n) |A_k|^{\frac{1}{n}} \int_{A_k} |\nabla u|\, dx.$$

Assim usando o passo 2 concluímos que

$$\int_{A_k} (u-k)\, dx \leq C \cdot |A_k|^{1+\frac{1}{n}} \quad \forall k \geq k_0. \tag{2.21}$$

Agora usando as ideias de (LADYZHENSKAYA O. A,) no Lemma 5.1, definimos a função

$$F(k) = \int_{A_k} (u^+ - k)\, dx = \int_k^\infty |A_t|\, dt \leq ||u^+||_{L^1}.$$

Daí temos que $F'(k) = -|A_k|$, e reescrevendo 2.21 em termos de F obtemos

$$F(K) \leq C(-F'(k))^{1+\frac{1}{n}}.$$

Isto é

$$-F'(k) F(k)^{-\frac{n}{n+1}} \geq C^{-\frac{n}{n+1}} \ \ \forall k \geq k_0. \tag{2.22}$$

Então integrando 2.22 com respeito k de k_0 a k_1 obtemos

$$\begin{aligned}
(k_1 - k_0) C^{-\frac{n}{n+1}} &\leq \int_{k_0}^{k_1} -F'(k) F(k)^{-\frac{n}{n+1}}\, dk \\
&= -\int_{k_0}^{k_1} (F(k)^{\frac{1}{n+1}})'\, dk \\
&= -\left(F(k_1)^{\frac{1}{n+1}} - (F(k_0))^{\frac{1}{n+1}} \right) \\
&= F(k_0)^{\frac{1}{n+1}},
\end{aligned}$$

isto é para $k_1 > k_0$ temos uma constante universal $C = C(n, g_0, \delta, n, diam(\Omega)) > 0$ tal que

$$k_1 \leq C^{\frac{n}{n+1}} \cdot F(k_0)^{\frac{1}{n+1}} + k_0. \tag{2.23}$$

Como $F(k_0) \leq ||u^+||_{L^1}$ e $k_1 = \sup_{\overline{\Omega}} u^+$, $k_0 = \sup_{\partial\Omega} u^+$ obtemos

$$\sup_{\Omega} u^+ \leq C^{\frac{n}{n+1}} F(k_0)^{\frac{1}{n+1}} + \sup_{\partial\Omega} u^+. \tag{2.24}$$

Observe que trocando u^+ por u^- obtemos um resultado análogo, isto é

$$\sup_{\Omega} u^- \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C \cdot ||u^-||_{L^1}^{\frac{1}{n+1}}.$$

Agora pelas desigualdades 2.10 e 2.13 no Teorema 2.3.1 tornando explicita a dependência da constante M dos parâmetros da equação temos que

$$\int_{\Omega} (G(|\nabla u|) + G(|u|))\, dx \leq C \cdot \left[\int_{\Omega} (G(|\nabla \varphi|) + G(|\varphi|))\, dx + ||f||_{L^n} \cdot ||\varphi||_{L^\infty(\Omega)} + |\Omega| \tilde{G}(1) ||f||_{L^n}^{(1+\delta)(1+\frac{1}{g_0})} + ||\varphi||_{W^{1,G}(\Omega)} \right]$$

Daí relembrando que assumimos 2.14 e usando a seguinte propriedade da norma dos espaços de Orlicz

$$||v||_G \leq 1 \Rightarrow \int_{\Omega} G(|v|) \leq 1,$$

obtemos

$$\int_{\Omega} (G(|\nabla u|) + G(|u|))\, dx \leq C \cdot (4 + |\Omega| \tilde{G}(1)).$$

Então pelo Lema 2.1.7 vemos que

$$||u||_{W^{1,G}(\Omega)} \leq C,$$

logo, como pela imersão contínua temos $||u||_{L^1} \leq C||u||_{W^{1,G}}$, segue portanto aplicando isso na desigualdade 2.24 que obtemos como desejávamos

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C.$$

$\square$

Observação 2.6. *Vale ressaltar que usando um escalonamento no problema de Dirichlet da Proposição anterior e aplicando 2.23 como na demonstração acima, obtemos a estimativa*

$$\sup_{\Omega} u^+ \leq C \cdot \left[g^{-1}(||f||_{L^n(\Omega)}) + ||\varphi||_{L^\infty(\partial\Omega)} + ||u^+||_{L^1} \right]$$

onde $C = C(n, g_0, \delta, diam(\Omega)) > 0$. Além disso, podemos fazer todas as estimativas a partir de 2.15 trocando u^+ por u^- repetindo passos análogos, e obtermos a partir de 2.23

$$\sup_{\Omega} u^- \leq C[g^{-1}(||f||_{L^n}) + ||\varphi||_{L^\infty} + ||u^-||_{L^1}].$$

2.4 O Princípio do Máximo

Nesta seção vamos demonstrar um princípio do máximo para soluções no sentido das distribuições de $\triangle_g u = f$ em Ω, onde $f \in L^n(\Omega)$ e Ω é aberto limitado. Para tal vamos adaptar ideias presentes em (PUCCI; SERRIN,), como lá para $M \in \mathbb{R}$ dizemos que $u \in W^{1,G}(\Omega)$ satisfaz

$$u \leq M \text{ em } \partial\Omega,$$

se dado $\varepsilon > 0$ existe uma vizinhança V_ε de $\partial\Omega$ tal que

$$u \leq M + \varepsilon \text{ em } V_\varepsilon \cap \Omega.$$

Para a demonstração iremos precisar de dois ingredientes.

Lema 2.4.1. *Seja $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução no sentido das distribuições de $\triangle_g u = f$ em Ω. Então para cada função $0 \leq \xi \in C_0^\infty(\Omega)$ tem-se*

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot D\xi \, dx \leq -\int_\Omega f \cdot \xi \cdot \chi_{\{u>0\}} \, dx, \tag{2.25}$$

e

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^-|)}{|Du^-|} Du^- \cdot D\xi \, dx \leq \int_\Omega f \cdot \xi \cdot \chi_{\{u<0\}} \, dx. \tag{2.26}$$

Aqui usamos a seguinte notação $u^+ = \max\{u,0\}$ e $u^- = \max\{-u,0\}$.

Demonstração. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos $v_k = \max\{\min\{ku,1\},0\}$, logo $v_k \in W^{1,G}(\Omega)$ e

$$Dv_k = \begin{cases} 0, \text{ em } \{u \geq \frac{1}{k}\} \\ kDu, \text{ em } \{0 < u < \frac{1}{k}\} \\ 0, \text{ em } \{u \leq 0\}. \end{cases}$$

Então usando $\psi_k = \xi \cdot v_k$ como função teste temos

$$\int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\psi_k = -\int_\Omega f \cdot \psi_k.$$

Para o lado esquerdo veja que

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\psi_k &= \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (v_k D\xi + \xi Dv_k) \\ &= \int_\Omega \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\xi \cdot v_k + \underbrace{\int_{\{0<u<\frac{1}{k}\}} k\xi g(|Du|)|Du|}_{\geq 0}, \end{aligned}$$

logo

$$\int_{\Omega} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\xi \cdot v_k \leq -\int_{\Omega} f \cdot \xi \cdot v_k,$$

e como $v_k \to \chi_{\{u>0\}}$ q.t.p em Ω, aplicando o Teorema da Convergência Dominada obtemos 2.25. A demonstração da desigualdade 2.26 é feita de forma análoga utilizando a função $v_k = \max\{\min\{-ku, 1\}, 0\}$. $\square$

O segundo ingrediente é na verdade uma generalização do primeiro.

Lema 2.4.2. *Sejam $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ uma função contínua, com $\psi(t) = 0$ em $(-\infty, l]$, crescente no intervalo $(l, +\infty)$ e uma quina em $t = l$ tal que $\psi \in C^1(l, +\infty)$ e $||\psi'||_{L^\infty} \leq L$. Sejam $w \in W^{1,G}(\Omega)$ tal que $w \leq l' < l$ em $\partial\Omega$ e $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução fraca de $\triangle_g u = f$ em Ω, então as desigualdades 2.25 e 2.26 são válidas para a função $\varphi = \psi(w)$.*

Demonstração. Pelo Theorem 7.8 em (GILBARG; TRUDINGER,) temos

$$D\varphi = \begin{cases} \psi'(w)Dw, & \text{em } \{w \neq l\} \\ 0, & \text{em } \{w = l\}. \end{cases}$$

Para $N > l$ definimos um sequência de truncamentos dada por $\varphi_N = \psi_N(w)$ onde

$$\psi_N(w) = \begin{cases} \psi(w), & \text{em } \{w < N\} \\ \psi(N), & \text{em } \{w \geq N\}. \end{cases}$$

Primeiramente observe que $\varphi_N \in W^{1,G}(\Omega)$, pois

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} G(|\varphi_N|) &= \int_{\{w<N\}} G(|\varphi_N|) + \int_{\{w \geq N\}} G(|\varphi_N|) \\ &\leq \int_{\{w<N\}} G(\psi(N)) + G(\psi(N))|\{w < N\}| < \infty, \end{aligned}$$

e

$$\int_{\Omega} G(|D\varphi_N|) = \int_{\Omega} G(\psi(w)|Dw|) \leq \int_{\Omega} G(L|Dw|) < \infty.$$

Afirmação 1: $supp(\varphi_N) := \overline{\{\varphi_N \neq 0\}} \subset \Omega$.

Com efeito, pela definição das funções em questão temos que

$$supp(\varphi) = supp(\varphi_N) \subset \overline{\{l < w\}}.$$

Suponha que exista um ponto $x' \in \overline{\{l < w\}} \cap \partial\Omega$, então existe uma sequência de pontos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{l < w\}$ tal que $x_j \to x'$. Além disso pela condição de fronteira imposta sobre a função w temos que para um $0 < \varepsilon < l - l'$ existe uma vizinhança V_ε de $\partial\Omega$ para a qual tem-se

$$w < l \quad \text{em} \quad V_\varepsilon \cap \Omega.$$

Logo para infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ teríamos $x_j \in V_\varepsilon \cap \Omega$, e isso contradiz o fato de que a sequência $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{l < w\}$. Portanto $\overline{\{l < w\}} \cap \partial\Omega = \varnothing$. Isto prova a Afirmação 1.

Agora consideramos a molificação da pela convolução

$$(\varphi_N)_h := \varphi_N * \rho_h,$$

como na seção 7.2 de (GILBARG; TRUDINGER,), onde $0 \leq \rho \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ satisfaz $supp(\rho) \subset B_1$, $||\rho||_{L^1(B_1)} = 1$, e para $h > 0$ $\rho_h(x) = h^{-n}\rho(h^{-1}x)$. Então da mesma forma temos $\rho_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, e como pela Afirmação 1 $supp(\varphi_N) \subset \Omega$ segue que $0 \leq (\varphi_N)_h \in C_0^\infty(\Omega)$. Logo podemos usa-la como função teste em 2.25 e obtermos

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot D(\varphi_N)_h \leq -\int_\Omega f \cdot \chi_{\{u>0\}} \cdot (\varphi_N)_h. \tag{2.27}$$

Como $(\varphi_N)_h \to \varphi_N$ q.t.p em Ω e $(\varphi_N)_h(x) \leq \psi(N)||\rho||_{L^1}$ segue do Teorema da Convergência Dominada

$$\int_\Omega f \cdot \chi_{\{u>0\}} \cdot (\varphi_N)_h \to \int_\Omega f \cdot \chi_{\{u>0\}} \cdot \varphi_N.$$

Para o lado esquerdo de 2.27 primeiramente observe que no aberto $\Omega \setminus supp(\varphi_N)$ temos $\varphi_N = 0$ e $D\varphi_N = 0$. Além disso pelo Lemmma 3.1.1 de (PUCCI; SERRIN,) temos que para $h > 0$ suficientemente pequeno $D(\varphi_N)_h = (D\varphi_N)_h$ em $supp(\varphi_N) = supp(\varphi)$, dessa forma temos

$$\int_{supp(\varphi)} \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot (D\varphi_N)_h = \int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot D(\varphi_N)_h,$$

e a desigualdade 2.27 implica que

$$\int_{supp(\varphi)} \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot (D\varphi_N)_h \leq -\int_\Omega f \cdot \chi_{\{u>0\}} \cdot (\varphi_N)_h. \tag{2.28}$$

Afirmação 2: $(D\varphi_N)_h \to D\varphi_N$ em norma $L^G(\Omega)$.

Com efeito, dada uma função $v \in L^G(\Omega)$ e estendendo-a para ser zero em $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$ é suficiente provarmos que

$$(v)_h \to v \quad \text{em norma} \quad L^G_{loc}(\mathbb{R}^n).$$

Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um fechado contendo Ω tal que $(v)_h = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus U$, então para $x \in U$ usando que G é convexa

$$
\begin{aligned}
G(|(v)_h(x) - v(x)|) &\leq G\left(\int_{\mathbb{R}^n} |v(x-y) - v(x)| h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right) dy\right) \\
&= G\left(\int_{|y|\leq h} |v(x-y) - v(x)| h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right) dy\right) \\
&\leq h^{-n} \int_{|y|\leq h} G\left(|v(x-y) - v(x)| \rho\left(\frac{y}{h}\right)\right) dy,
\end{aligned}
$$

então

$$
\int_U G(|(v)_h(x) - v(x)|)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} G\left(|v(x-y) - v(x)| \rho\left(\frac{y}{h}\right)\right) dy\, dx. \tag{2.29}
$$

Denotando

$$
I := \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \int_{\mathbb{R}^{\ltimes}} G\left(|v(x-y) - v(x)| \rho\left(\frac{y}{h}\right)\right) dy\, dx,
$$

$$
O_1 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \rho\left(\frac{y}{h}\right) \leq 1 \right\} \quad \text{e} \quad O_2 = \left\{ y \in \mathbb{R}^n; \rho\left(\frac{y}{h}\right) > 1 \right\},
$$

usando o Teorema de Fubini juntamente da convexidade de G com a propriedade (G_1) temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \left[\int_{O_1} G\left(|v(x-y) - v(x)| \rho\left(\frac{y}{h}\right)\right) dy + \int_{O_2} G\left(|v(x-y) - v(x)| \rho\left(\frac{y}{h}\right)\right) dy \right] dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \int_{O_1} \rho\left(\frac{y}{h}\right) G(|v(x-y) - v(x)|)\, dy\, dx + C(g_0, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \int_{O_2} \rho\left(\frac{y}{h}\right)^{1+g_0} G(|v(x-y) - v(x)|)\, dy\, dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right) \phi(y)\, dy + C(g_0, \delta) \int_{\mathbb{R}^n} h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right)^{1+g_0} \phi(y)\, dy,
\end{aligned}
$$

onde

$$
\phi(y) = \int_{\mathbb{R}^n} G(|v(x-y) - v(x)|)\, dx.
$$

Agora observe que pelo Teorema da Convergência Dominada temos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $\phi(y) < \varepsilon$ se $|y| < \eta$, e obviamente para todo $y \in \mathbb{R}^n$

$$
\phi(y) \leq 2 \int_U G(|v|)\, dx.
$$

Além disso dados $\varepsilon > 0$ e $\eta > 0$, da mesma forma pelo Teorema da Convergência Dominada temos que para $h > 0$ suficientemente pequeno

$$
\int_{|y|\geq \eta} h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right) dy < \varepsilon \quad \text{e} \quad \int_{|y|\geq \eta} h^{-n} \rho\left(\frac{y}{h}\right)^{1+g_0} dy < \varepsilon.
$$

Então obtemos as estimativas

$$\int_{\mathbb{R}^n} h^{-n}\rho\left(\frac{y}{h}\right)\phi(y)\,dy = \int_{|y|<\eta} h^{-n}\rho\left(\frac{y}{h}\right)\phi(y)\,dy + \int_{|y|\geq\eta} h^{-n}\rho\left(\frac{y}{h}\right)\phi(y)\,dy$$
$$\leq ||\rho||_{L^1}\cdot\varepsilon + 2\int_U G(|v|)\cdot\varepsilon,$$

e por 2.29 segue que para $h>0$ suficientemente pequeno temos

$$\int_U G(|(v)_h(x)-v(x)|)\,dx \leq 2\varepsilon\cdot\left(||\rho||_{L^1}+\int_U G(|v|)\right).$$

Esta desigualdade juntamento do Lema 2.1.7 provam a Afirmação 2.

Agora como pela propriedade $(\tilde{g}_4)$ a função $g(|Du|)\frac{Du}{|Du|}\in L^{\tilde{G}}(\Omega)$, segue que o funcional linear $T: L^G(\Omega)\to\mathbb{R}$ dado por

$$T(D\xi)=\int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|}Du^+\cdot D\xi,$$

é contínuo, e portanto a partir da Afirmação 2 fazendo $h\to 0^+$ em 2.28

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|}Du^+\cdot D\varphi_N \leq -\int_\Omega f\cdot\xi_{\{u>0\}}\cdot\varphi_N. \tag{2.30}$$

Finalmente,

$$\int_\Omega G(|D\varphi_N - D\varphi|) = \int_{\{w\geq N\}} G(|D\varphi|) \longrightarrow_{N\to\infty} 0,$$

logo do Lema 2.1.7 temos que $D\varphi_N\to D\varphi$ em norma $L^G(\Omega)$. Daí usando o Teorema da Convergência Monótona ($\varphi_N\nearrow\varphi$) fazendo $N\to\infty$ em 2.30 obtemos

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|}Du^+\cdot D\varphi \leq -\int_\Omega f\cdot\chi_{\{u>0\}}\cdot\varphi.$$

Analogamente prova-se que

$$\int_\Omega \frac{g(|Du^-|)}{|Du^-|}Du^-\cdot D\varphi \leq \int_\Omega f\cdot\chi_{\{u<0\}}\cdot\varphi.$$

□

Vamos utilizar a seguinte versão da desigualdade de Poincaré.

Lema 2.4.3. *Seja $p\geq 1$, então existe uma constante positiva $Q=Q(n)=\omega_n^{-\frac{1}{n}}$ tal que para qualquer função $u\in W_0^{1,p}(\Omega)$ tem-se*

$$||u||_{L^p(\Omega)}\leq Q\cdot|\Omega|^{1/n}\cdot||Du||_{L^p(\Omega)}.$$

Demonstração. Ver o Theorem 3.9.4 em (PUCCI; SERRIN,). □

Teorema 2.4.1 (Princípio do Máximo). *Seja $u \in W^{1,G}(\Omega)$ solução fraca de $\triangle_g u = f$ em Ω, satisfazendo a seguinte condição de fronteira para $M \in \mathbb{R}^+$*

$$u \leq M \quad em \;\; \partial\Omega.$$

Então existe uma constante $C = C(n, g_0, \delta, |\Omega|, G(1), \tilde{G}(1)) > 0$ tal que

$$\sup_{\Omega} |u| \leq C \cdot g^{-1}(||f||_{L^n(\Omega)}) + M.$$

Demonstração. Primeiramente note que podemos supor sem perda de generalidade que $M = 0$ caso contrario tomamos a função $u - M$. Além disso a menos de considerarmos um escalonamento como na Observação 2.5 com $K = g^{-1}(||f||_{L^n}(\Omega))$ podemos supor que $||f||_{L^n(\Omega)} \leq 1$.

Pela Observação 2.6 temos para uma constante $C = C(n, g_0, \delta, |\Omega|, G(1)) > 0$

$$\sup_{\Omega} u^+ \leq C \cdot \left[||u^+||_{L^1} + g^{-1}(1) \right]. \tag{2.31}$$

Seja $k = k(n, g_0, \delta, \tilde{G}(1)) > 0$ uma constante a ser definida mais tarde. Trataremos dois casos.

Caso 1: $||u^+||_{L^1(\Omega)} \leq k|\Omega|$.

Neste caso o resultado fica evidente a partir da estimativa 2.31.

Caso 2: $||u^+||_{L^1(\Omega)} > k|\Omega|$.

Neste caso definimos a função $w = u^+ + k$, logo $w = k$ em $\partial\Omega$. Para $l \in (k, ||w||_{L^\infty})$ definimos

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t \leq l \\ \int_l^t \frac{ds}{G(s)} & \text{se } l < t \leq ||w||_{L^\infty}. \end{cases}$$

Com o intuito de usarmos o Lema 2.4.2 tomamos a função teste $\varphi = \psi(w)$, então

$$\int_{\Omega} \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot D\varphi \leq -\int_{\Omega} f \cdot \xi_{\{u>0\}} \cdot \varphi.$$

Sendo $\Gamma = \{l < w \leq ||w||_{L^\infty}\}$ temos $\varphi = 0$ e $D\varphi = 0$ em $\Omega \setminus \Gamma$. Além disso $\overline{\Gamma} \subset \Omega$. Com efeito, suponha que existe $x' \in \partial\Omega \cap \overline{\Gamma}$, então temos uma sequência de pontos $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$ tal que $x_j \to x'$. Como $w \leq k$ em $\partial\Omega$ segue que tomando $\varepsilon < l - k$ temos uma vizinhança V_ε de $\partial\Omega$ tal que $w < l$ em $V_\varepsilon \cap \Omega$. Porém para infinitos índices $j \in \mathbb{N}$ devemos ter $x_j \in V_\varepsilon \cap \Omega$, e isso gera uma contradição. Logo podemos nos restringir a tal conjunto e obter

$$\int_{\Gamma} \frac{g(|Du^+|)}{|Du^+|} Du^+ \cdot D\varphi \leq -\int_{\Gamma} f \cdot \xi_{\{u>0\}} \cdot \varphi.$$

Como $u = u^+$ e $D\varphi = \psi'(w)Dw = G(w)^{-1}Dw$ em Γ vemos que

$$\int_\Gamma G(w)^{-1}g(|Dw|)|Dw| \leq \int_\Gamma |f|\cdot\varphi. \tag{2.32}$$

Para o lado direito da desigualdade acima, como g é não decrescente temos $1 \leq \frac{g(w)}{g(k)}$ além disso

$$\frac{|Dw|}{G(w)}\cdot\frac{g(w)}{g(k)} \leq \frac{|Dw|g(|Dw|)}{G(w)g(k)} + \frac{wg(w)}{G(w)g(k)}.$$

Daí a desigualdade de Holder juntamente do Teorema de Sobolev (Theorem 3, cap 5) em (EVANS,) e propriedade (g_3) nos dá

$$\int_\Gamma |f|\cdot\varphi \leq ||f||_{L^n}\left(\int_\Omega \varphi^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}} \tag{2.33}$$

$$\leq C(n, diam(\Omega))||f||_{L^n}\int_\Omega |D\varphi| \tag{2.34}$$

$$\leq C(n, diam(\Omega))\int_\Gamma \frac{|Dw|}{G(w)} \tag{2.35}$$

$$\leq C(n, diam(\Omega))\int_\Gamma \frac{|Dw|g(|Dw|)}{G(w)g(k)} + C(n, diam(\Omega))\int_\Gamma \frac{wg(w)}{G(w)g(k)} \tag{2.36}$$

$$\leq \frac{1}{2}\int_\Gamma G(w)^{-1}|Dw|g(|Dw|) + C(n, g_0, diam(\Omega))||\Gamma|, \tag{2.37}$$

desde que tomemos $k > 0$ de modo que $2\cdot C(n, diam(\Omega)) \leq g(k)$. Então $k > 0$ fica assim determinado e juntando 2.32 com 2.37 obtemos

$$\int_\Gamma G(w)^{-1}g(|Dw|)|Dw| \leq C\cdot|\Omega|,$$

onde $C = C(n, g_0, diam(\Omega)) > 0$. Usando essa estimativa obtemos

$$\int_\Gamma |D\log w| = \int_\Gamma \frac{|Dw|}{w}\cdot\frac{g(w)}{g(w)} \tag{2.38}$$

$$\leq \int_\Gamma \frac{|Dw|g(|Dw|)}{wg(w)} + \int_\Gamma \frac{wg(w)}{wg(w)} \tag{2.39}$$

$$\leq \int_\Gamma G(w)^{-1}|Dw|g(|Dw|) + |\Gamma| \tag{2.40}$$

$$\leq (C+1)|\Omega|. \tag{2.41}$$

Como $\log\left(\frac{w}{l}\right) \leq 0$ em $\Omega\setminus\Gamma$ segue que $\log\left(\frac{w}{l}\right)^+ = 0$ em $\Omega\setminus\Gamma$. Então aplicando a desigualdade de Poincaré (Lema 2.4.3) a função $\log\left(\frac{w}{l}\right)^+$ obtemos

$$\left|\left|\log\left(\frac{w}{l}\right)^+\right|\right|_{L^1(\Omega)} \leq Q\cdot|\Omega|^{1/n}\left|\left|D\log\left(\frac{w}{l}\right)^+\right|\right|_{L^1(\Omega)},$$

e usando esta desigualdade juntamente de 2.41 vemos que

$$\left|\left|\log\left(\frac{w}{l}\right)\right|\right|_{L^1(\Gamma)} \leq Q\cdot|\Omega|^{\frac{1}{n}+1}(C+1). \tag{2.42}$$

Denotando $\Omega^+ := \{w > k\}$, como neste caso $||w||_{L^1(\Omega)} > 2k|\Omega|$ temos

$$\begin{aligned}||w||_{L^1(\Omega)} &\leq ||w||_{L^1(\Omega^+)} + k|\Omega| \\ &\leq ||w||_{L^1(\Omega^+)} + \frac{1}{2}||w||_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

isto é,

$$||w||_{L^1(\Omega)} \leq 2||w||_{L^1(\Omega^+)}. \tag{2.43}$$

Por outro lado, como $1 < \frac{w}{l} \leq \frac{||w||_{L^\infty(\Omega)}}{l}$ em Γ segue que

$$w \leq \frac{||w||_{L^\infty}}{1+\log\left(\frac{||w||_{L^\infty}}{l}\right)}\left(1+\log\left(\frac{w}{l}\right)\right) \quad \text{em } \Gamma.$$

Integrando em Γ e usando 2.42 vemos que

$$\begin{aligned}||w||_{L^1(\Gamma)} &\leq \frac{||w||_{L^\infty}}{1+\log\left(\frac{||w||_{L^\infty}}{l}\right)}\left(|\Gamma| + \left|\left|\log\left(\frac{w}{l}\right)\right|\right|_{L^1(\Gamma)}\right) \\ &\leq \frac{||w||_{L^\infty}}{1+\log\left(\frac{||w||_{L^\infty}}{l}\right)}\left(|\Omega| + Q\cdot(C+1)|\Omega|^{1+\frac{1}{n}}\right).\end{aligned}$$

Fazendo $l \to k$ obtemos

$$||w||_{L^1(\Omega^+)} = \lim_{l\to k}||w||_{L^1(\Gamma)} \leq \frac{||w||_{L^\infty(\Omega)}}{1+\log\left(\frac{||w||_{L^\infty(\Omega)}}{k}\right)}\left(|\Omega| + Q\cdot(C+1)|\Omega|^{1+\frac{1}{n}}\right).$$

Em particular vale a seguinte estimativa para uma constante $C = C(n, g_0, |\Omega|) > 0$

$$\log\left(\frac{w}{k}\right) \leq C\cdot\frac{||w||_{L^\infty(\Omega)}}{||w||_{L^1(\Omega)}} \quad \text{em } \Omega. \tag{2.44}$$

Agora usando a desigualdade 2.31 temos

$$\begin{aligned}||w||_{L^\infty(\Omega)} &\leq C\cdot||u^+||_{L^1(\Omega)} + 2k \\ &\leq C||u^+||_{L^1(\Omega)} + 2k\frac{|\Omega|}{|\Omega|} \\ &\leq C\max\{1, 2|\Omega|^{-1}\}||w||_{L^1(\Omega)}.\end{aligned}$$

Então as desigualdades acima e 2.44 implicam que para uma nova constante $C = C(n, g_0, \delta, |\Omega|, G(1), \tilde{G}(1)) > 0$ temos

$$\log\left(\frac{w}{k}\right) \leq C \quad \text{em } \Omega.$$

Portanto, lembrando que k é uma constante positiva que depende dos parâmetros $n, g_0, \delta, |\Omega|, \tilde{G}(1)$, temos a estimativa para a parte positiva de u

$$u^+ \leq k \cdot \exp[C] \quad \text{em} \;\; \Omega.$$

De forma análoga usando que a Observação 2.6 nos dá a desigualdade

$$\sup_{\Omega} u^- \leq C \cdot \left[||u^-||_{L^1(\Omega)} + g^{-1}(||f||_{L^n}) \right],$$

podemos repetir os passos e estimativas feitos acima considerando $w = u^- + k$ e obtermos assim que vale para a parte negativa de u

$$u^- \leq k \cdot \exp[C] \quad \text{em} \;\; \Omega.$$

$\square$

3 UMA EQUAÇÃO COM MAIS REGULARIDADE

Alguns resultados apresentados ao longo deste trabalho dependem de um argumento de aproximação. Com esse intuito, neste capítulo vamos obter uma família de N-funções $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ que de acordo com (CIANCHI; MAZ'YA, 2018) são suaves e convergem uniformemente em compactos para a nossa N-função G. Além disso tais funções satisfazem as condições de Lieberman (CP) e (CQ) com os mesmos parâmetros g_0 e δ.

3.1 Construindo $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$

Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ tomamos $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C^\infty(\mathbb{R})$ núcleos tais que

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon \, dt = 1 \quad \text{e} \quad supp(\psi_\varepsilon) \subset (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Agora, denotando $H(t) = \frac{g(t)}{t}$ tomamos a composta

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,+\infty) \\ s &\longmapsto H(e^s). \end{aligned}$$

Feito isso consideramos uma família $\{\Phi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ por convoluções a saber,

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon : \mathbb{R} &\longrightarrow [0,+\infty) \\ s &\longmapsto (\psi_\varepsilon * \Phi)(s). \end{aligned}$$

Finalizando esse processo de suavização de H, cancelamos o efeito da exponencial pondo

$$\begin{aligned} h_\varepsilon : (0,+\infty) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \Phi_\varepsilon(\log t). \end{aligned}$$

Mediante todo esse processo podemos definir $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ da seguinte forma

$$G_\varepsilon(t) = \int_0^t g_\varepsilon(s)\, ds,$$

onde $g_\varepsilon(s) = H_\varepsilon(t) \cdot t$, para

$$H_\varepsilon(t) = \frac{h_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon + t^2}) + \varepsilon}{1 + \varepsilon \cdot h_\varepsilon(\sqrt{\varepsilon + t^2})}.$$

É conhecido em (CIANCHI; MAZ'YA, 2018) pagina 587, que

(A) $H_\varepsilon \in C^\infty(0,+\infty)$;

(B) $\varepsilon \leq H_\varepsilon(t) \leq \frac{1}{\varepsilon}, \ \forall t \geq 0$;

(C) $\min\{\delta - 1, 0\} \leq \frac{t \cdot H'_\varepsilon(t)}{H_\varepsilon(t)} \leq \max\{g_0 - 1, 0\}$;

(D) $\lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(|\xi|)\xi = H(|\xi|)\xi$, uniformemente em B_R qualquer que seja $R > 0$.

Por (A) concluímos que $g_\varepsilon \in C^\infty(0, +\infty)$, em particular $G_\varepsilon \in C^\infty(0, +\infty)$. Por (B) e da forma como foi definida temos que G_ε é uma N-função. Observe que por (D) concluímos que $g_\varepsilon \to g$ uniformemente nas partes compactas de $[0, +\infty)$. Em particular temos que $G_\varepsilon \to G$ uniformemente nas partes compactas de $[0, +\infty)$. Além disso obviamente vemos que g_ε satisfaz (CP), quanto a (CQ) temos:

$$\frac{t \cdot g'_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(t)} = \frac{t \cdot [H_\varepsilon(t) \cdot t]'}{H_\varepsilon(t) \cdot t} = \frac{t \cdot H'_\varepsilon(t)}{H_\varepsilon(t)} + 1.$$

Então graças a (C) obtemos

$$\min\{\delta, 1\} \leq \frac{t \cdot g'_\varepsilon(t)}{g_\varepsilon(t)} \leq \max\{g_0, 1\}.$$

Como podemos supor que $0 < \delta < 1 \leq g_0$, segue que (CQ) é satisfeita com os mesmos parâmetros.

Seja $u_\varepsilon \in W^{1,G_\varepsilon}(\Omega)$ solução fraca de

$$\triangle_{g_\varepsilon} v = div\left(\frac{g_\varepsilon(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\nabla v\right) = 0 \ \text{em} \ \Omega.$$

Por (CIANCHI; MAZ'YA, 2018) se $u_\varepsilon|_{\partial\Omega} \in C^\infty$ e $\partial\Omega$ é suave então $u_\varepsilon \in C^\infty(\overline{\Omega})$. Ainda que $u_\varepsilon|_{\partial\Omega}$ não seja C^∞ ou $\partial\Omega$ não seja suave, se $A_\varepsilon(p) = H_\varepsilon(|p|)$ então $A_\varepsilon \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e para $a_\varepsilon^{ij} = \frac{\partial A_\varepsilon^i}{\partial p_j}$ da mesma forma que em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) (2.2) temos

$$\min\{1, \delta\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a_\varepsilon^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1, g_0\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2,$$

e por (B) obtemos

$$\min\{1, \delta\}\varepsilon|\xi|^2 \leq a_\varepsilon^{ij}\xi_i\xi_j \leq \frac{\max\{1, g_0\}}{\varepsilon}|\xi|^2. \tag{3.1}$$

Isso implica que o operador $\triangle_{g_\varepsilon} v$ é uniformemente elíptico, pelos resultados em (LIEBERMAN, 1991) tem-se que as soluções $u_\varepsilon \in C^{1,\alpha}_{loc}(\Omega)$ e pela Teoria de Schauder concluímos que soluções de $\triangle_{g_\varepsilon} v = 0$ tem regularidade $u_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(\Omega)$.

Observe que como $g_\varepsilon \to g$ uniformemente em compactos de $[0, +\infty)$ segue que existe $\varepsilon_0 > 0$ para o qual tem-se

$$\frac{g(1)}{2} \leq g_\varepsilon(1) \leq 2g(1), \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0).$$

3.2 Convergência das soluções

Nosso objetivo agora é mostrar que existe uma subsequência da família de soluções fracas $(u_\varepsilon)_{0<\varepsilon<1}$, que converge pontualmente a menos de um conjunto de medida nula para a solução fraca de $\triangle_g u = 0$.

Seja $u \in W^{1,G}(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ solução no sentido das distribuições de

$$\triangle_g u = 0 \quad \text{em} \quad B_1^+, \quad u = \phi \quad \text{em} \quad B_1^0,$$

onde $\phi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$. Além disso, também tomemos o seguinte problema de Dirichlet

$$\triangle_{g_\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad B_1^+, \quad u_\varepsilon = \phi \quad \text{em} \quad B_1^0.$$

Assim a Proposição 2.3.2 aplicada a soluções do problema

$$\triangle_{g_\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \quad \text{em} \quad B_{3/4}^+, \quad u_\varepsilon = u \quad \text{em} \quad \partial B_{3/4}^+,$$

garante que a norma L^∞ das funções u_ε são uniformemente limitadas por constantes que dependem de $g_0, \delta, ||u||_{1,G}$. Então a estimativa obtida pela Proposição 5.0.1 juntamente da construção das funções $\{G_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ implicam que existe $v \in W^{1,G}(B_1^+)$ tal que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup v \quad \text{em} \quad W^{1,G}(B_1^+).$$

Pela regularidade uniforme interior (Theorem 1.7, (LIEBERMAN, 1991)) sabemos que $v \in C^1(B_{3/4}^+)$. De forma análoga ao que foi feito em (CIANCHI; MAZ'YA, 2018) (pg. 588) segue que v é uma solução fraca de

$$\begin{cases} \triangle_g v = 0 \quad \text{em} \quad B_{3/4}^+ \\ v = u \quad \text{em} \quad \partial B_{3/4}^+, \end{cases}$$

e por unicidade obtemos $u = v$ em $B_{3/4}^+$. Portanto a menos de uma subsequência temos a convergência fraca quando $\varepsilon \to 0$

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{em} \quad W^{1,G}(B_{3/4}^+). \tag{3.2}$$

Agora vamos mostrar que a convergência fraca implica numa convergência pontual a menos de um conjunto de medida nula.

Proposição 3.2.1. *Seja* $(u_n)_{n=1}^{\infty} \subset W_0^{1,p}(\Omega)$ $1 < p < \infty$ *tal que* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$*. Então existe uma subsequência tal que* $u_{n_k}^+ \rightharpoonup u^+$ *em* $W^{1,p}(\Omega)$*, onde* $u^+ = \max\{u,0\}$.

Demonstração. Pelo Teorema de Rellich-Kondrachov temos a imersão compacta

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega).$$

Então para uma subsequência temos $u_{n_k} \to u$ em $L^p(\Omega)$ isso implica que $u_{n_k}^+ \to u^+$ em $L^p(\Omega)$. Além disso como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p}(\Omega)$ segue que a subsequência $(u_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega)$. Daí usando o Lema de Staampacchia e a reflexividade de $W^{1,p}(\Omega)$, segue que para uma nova subsequência temos:

$$u_{n_k}^+ \rightharpoonup w \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

Novamente pela compacidade da imersão temos $u_{n_k}^+ \to w$ em $L^p(\Omega)$, o que nos dá $w = u^+$. Portanto

$$u_{n_k}^+ \rightharpoonup u^+ \quad \text{em} \quad W^{1,p}(\Omega).$$

□

Proposição 3.2.2. *Seja* $(f_n) \subset L^p(\mathbb{R}^d)$ *uma sequência de funções não-negativas tais que para toda* $g \in L^q(\Omega)$ *temos*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_n g \, dx \to 0.$$

Então existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ *tal que* $f_{n_k}(x) \to 0$ *em quase todo ponto.*

Demonstração. Para cada $m \in \mathbb{N}$ como $f_n \geq 0$ temos

$$||f_n||_{L^1(B_m)} = \int_{B_m} f_n \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f_n \chi_{B_m} \longrightarrow_{n\to\infty} 0,$$

pois $g = \chi_{B_m} \in L^q$. Logo existe uma subsequência de (f_n) convergindo para zero em quase todo ponto de B_m. Por um argumento de diagonal de Cantor existe uma subsequência $(f_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ tal que $f_{n_k}(x) \to 0$ em quase todo $x \in B_m$, $\forall m \in \mathbb{N}$. Por fim observe que $\mathbb{R}^d = \cup_{m=1}^{\infty} B_m$. □

Teorema 3.2.3. *Existe uma sequência* $\varepsilon_k \to 0$ *quando* $k \to \infty$ *para a qual temos em quase todo ponto de* $B_{3/4}^+$

$$u_{\varepsilon_k}(x) \to u(x) \quad e \quad \nabla u_{\varepsilon_k}(x) \to \nabla u(x),$$

onde u *é solução fraca de* $\triangle_g u = 0$ *em* $B_{3/4}^+$.

Demonstração. Pela imersão contínua $W^{1,G}(B_1^+) \hookrightarrow W^{1,1+\delta}(B_1^+)$, e por 3.2

$$D_j u_\varepsilon \rightharpoonup D_j u \quad \text{em} \quad L^{1+\delta}(B_{3/4}^+) \quad \forall j = 1, ..., n.$$

Daí pelas Proposições 3.2.1 e 3.2.2 existe $\varepsilon_k \to 0$ para a qual tem-se a convergência a menos de um conjunto de medida nula

$$[D_j(u_{\varepsilon_k} - u)]^{\pm}(x) \to 0 \quad \text{em} \quad B_{3/4}^+.$$

Relembrando que podemos escrever $Du_{\varepsilon_k} = (Du_{\varepsilon_k})^+ - (Du_{\varepsilon_k})^-$, segue o resultado desejado. $\square$

Seja $\eta \in C_0^\infty(B_{3/4}^+)$, usando a definição de solução fraca juntamente com integração por partes obtemos $\forall k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_{3/4}^+} \frac{g_\varepsilon(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} D_i u_\varepsilon D_{ki}\eta = -\int_{B_{3/4}^+} D_k \left(\frac{g_\varepsilon(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} D_i u_\varepsilon \right) D_i \eta \\ &= -\int_{B_{3/4}^+} a^{ij} D_{kj} u_\varepsilon D_i \eta \, dx. \end{aligned}$$

De agora em diante, a menos que escrevamos explicitamente vamos omitir o índice ε ao nos referirmos a função u_ε.

Proposição 3.2.4. *Para toda função* $\eta \in W^{1,G}_{comp}(B_{3/4}^+)$ *temos*

$$\int_{B_{3/4}^+} a^{ij} D_{kj} u D_i \eta \, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Com efeito, seja $supp(\eta) \subset\subset K \subset B_{3/4}^+$ por 3.1

$$|a^{ij}| \leq C(g_0) \frac{g(|\nabla u_\varepsilon|)}{|\nabla u_\varepsilon|} \leq C(g_0, \varepsilon),$$

e usando que $u_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(B_1^+)$ é solução de uma equação uniformemente elíptica temos a estimativa no conjunto $K \subset\subset B_{3/4}^+$

$$||D_{jk} u_\varepsilon||_{L^\infty(K)} \leq C ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)},$$

onde $C = C(g_0, \delta, n, \varepsilon, dist(K, \partial B_{3/4}^+)) > 0$.

Assim, o funciona linear $T : W^{1,G}(K) \to \mathbb{R}$ dado por

$$T(f) = \int_K a^{ij} D_{kj} u \cdot Df \, dx,$$

é contínuo pois pela desigualdade de Holder em espaços de Orlicz

$$\left|\int_K a^{ij} D_{kj} u \cdot f \, dx\right| \leq ||a^{ij} D_{kj} u||_{\tilde{G}} ||Df||_G.$$

Então para $\eta \in W^{1,G}_{comp}(K)$ temos uma sequência $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0^\infty(K)$ que converge para η em norma $W^{1,G}$. Em particular $\eta \in W_0^{1,G}(K)$. Pelo que foi feito anteriormente usando integração por partes

$$\int_K a^{ij} D_{kj} u D_i \psi_n \, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Por fim, sendo o funcional T contínuo concluímos que

$$\int_K a^{ij} D_{kj} u D_i \eta \, dx = 0.$$

4 ESTIMATIVAS INTERIORES

Neste capítulo nosso objetivo é obter duas estimativas interiores para o gradiente de soluções fracas da equação $\triangle_{g_\varepsilon} v = 0$, onde $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ são a família de funções suaves que construímos no capítulo anterior. A primeira é uma estimativa da norma L^∞ de $G(|\nabla u_\varepsilon|)$ pelo valor médio do mesmo. A segunda diz respeito ao decaimento da oscilação do gradiente de funções g-harmônicas em bolas.

Vamos seguir de perto o método da iteração de Moser como em (LIEBERMAN, 1988), para isso definimos a função $F : (0,+\infty) \to \mathbb{R}$

$$F(t) = \frac{g_\varepsilon(t)}{t},$$

onde $0 < \varepsilon < 1$. Temos a seguinte proposição.

Proposição 4.0.1. *A fução $F : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

(F_1) $0 < t \leq s \Rightarrow F(t)t \leq F(s)s.$

(F_2) $r \geq 1 \Rightarrow F(t) \geq C(g_0, \delta, r)F(rt).$

Demonstração. Como g_ε é não decrescente segue (F_1). Para (F_2) veja que se $r \geq 1$ usando (g_1) obtemos

$$\frac{g_\varepsilon(rt)}{rt} \leq \max\{r^{\delta-1}, r^{g_0-1}\}\frac{g(t)}{t}.$$

□

Ao longo deste capítulo iremos sempre considerar $u \in W^{1,G}(B_1^+)$ solução limitada no sentido das distribuições do problema

$$\triangle_g u = 0 \quad \text{em} \quad B_1^+, \quad u = \phi \quad \text{em} \quad B_1^0, \tag{4.1}$$

onde $\phi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$. Os resultados a seguir são estimativas no interior do domínio, tendo isso em vista iremos considerar $R \in (0,1)$ de modo que a bola $B_{4R} \subset\subset B_1^+$.

Teorema 4.0.2 (Estimativa interior do gradiente)**.** *Seja $u_\varepsilon \in W^{1,G}_{loc}(B_{4R})$ solução fraca de*

$$div\left(\frac{g_\varepsilon(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\nabla v\right) = 0 \ \ em \ \ B_{4R}.$$

Então existe uma constante $C > 0$ que depende somente de n, δ e g_0 tal que para todo $0 < \sigma < 1$ e todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tem-se

$$\sup_{B_{\sigma 4R}} |Du_\varepsilon| g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|) \leq C(1-\sigma)^{-n} R^{-n} \int_{B_{4R}} |Du_\varepsilon| g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)\, dx.$$

Demonstração. A prova é baseada no método de iteração de Moser presente em (LIEBERMAN, 1988). Como vimos no capítulo anterior $u_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(B_{4R})$, além disso temos por 3.3 que para toda $\eta \in W^{1,G}_{comp}(\Omega)$

$$\int_\Omega a^{ij} D_{kj} u_\varepsilon D_i \eta\, dx = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Definimos

$$w = \int_0^{|Du_\varepsilon|} tF(t)\, dt, \;\; b^{ij} = \frac{a^{ij}}{F(|Du_\varepsilon|)},$$

daí

$$\int b^{ij} D_j w D_i \eta\, dx = \int a^{ij} D_i u D_{ij} u_\varepsilon D_i \eta\, dx.$$

Trocando η por $\eta D_k u$ em 3.3 temos

$$\int a^{ij} D_{jk} u_\varepsilon \left(D_i \eta D_k u_\varepsilon + \eta D_{ik} u_\varepsilon\right) dx = 0,$$

logo para $\lambda = \min\{1, \delta\}$ usando a eliticidade

$$\int \lambda F(|Du_\varepsilon|) |DD_k u_\varepsilon|^2 \eta\, dx + \int a^{ij} D_{jk} u_\varepsilon D_k u_\varepsilon D_i \eta\, dx \leq 0.$$

Portanto segue que

$$\int_{B_{4R}} b^{ij} D_j w D_i \eta\, dx \leq 0. \tag{4.2}$$

Seja $\zeta \in C^\infty_0(B_{4R})$ tal que para $\sigma \in (0,1)$

$$|D\zeta| \leq \frac{C(n)}{(1-\sigma)4R}, \quad \zeta \equiv 1 \text{ em } B_{\sigma 4R}.$$

Para $q \geq 2$, tomando $\eta = \zeta^{(n+2)q-n} w^{q-1}$ em 4.2 temos usando a eliticidade com $\Lambda = \max\{1, g_0\}$

$$\int (q-1) b^{ij} w^{q-2} D_j w D_i w \zeta^{(n+2)q-n}\, dx \leq \int \Lambda[(n+2)q-n] \zeta^{(n+2)q-(n+1)} |Dw||D\zeta| w^{q-1}\, dx.$$

Usando a desigualdade $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}$,

$$\Lambda[(n+2)q-n]\zeta^{(n+2)q-n} w^{q-2} \underbrace{w|D\zeta|\zeta^{-1}}_{b} \underbrace{|Dw|}_{a} \leq \Lambda[(n+2)q-n]\zeta^{(n+2)q-n} w^{q-2} \left[\frac{w^2|D\zeta|^2\zeta^{-2}}{4\varepsilon} + \varepsilon|Dw|^2\right].$$

Daí temos

$$[\lambda(q-1)-\varepsilon\Lambda((n+2)q-n)]\int|Dw|^2w^{q-2}\zeta^{(n+2)q-n}\,dx\leq\frac{\Lambda[(n+2)q-n]}{4\varepsilon}\int\zeta^{(n+2)q-n-2}w^q|D\zeta|^2\,dx,$$

tomando $\varepsilon=\frac{\lambda(q-1)}{2\Lambda[(n+2)q-n]}$, segue que

$$\lambda\frac{(q-1)}{2}\int|Dw|^2w^{q-2}\zeta^{(n+2)q-n}\,dx\leq\int\frac{\Lambda^2[(n+2)q-n]^2}{2\lambda(q-1)}\zeta^{(n+2)q-n-2}w^q|D\zeta|^2\,dx,$$

então

$$\int|Dw|^2w^{q-2}\zeta^{(n+2)q-n}\,dx\leq\frac{\Lambda^2[(n+2)q-n]^2}{2\lambda^2}\int\zeta^{(n+2)q-n-2}w^q|D\zeta|^2\,dx.$$

Daí

$$\int|Dw|^2w^{q-2}\zeta^{(n+2)q-n}\,dx\leq\frac{C(n)\Lambda^2q^2}{\lambda^2}[(1-\sigma)4R]^{-2}\int(w\zeta^{n+2})^q\zeta^{-n-2}\,dx.$$

Agora vamos usar a seguinte desigualdade de Sobolev onde $k=\frac{n+2}{n}$

$$\left(\int h^{2k}\,dx\right)^n\leq c(n)\left(\int|Dh|^2\,dx\right)^n\left(\int h^2\,dx\right)^2,$$

com $h=\zeta^{\frac{(n+2)q-n}{2}}w^{\frac{q}{2}}$ temos

$$|Dh|^2\leq 2q^2(\zeta^{(n+2)q-n-2}|D\zeta|^2w^q+\zeta^{(n+2)q-n}w^{q-2}|Dw|^2),$$

isso implica que

$$\int|Dh|^2\,dx\leq C(n)\frac{\Lambda^2}{\lambda^2}q^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\int(w\zeta^{n+2})^q\zeta^{-n-2}\,dx,$$

$$\Rightarrow\left(\int(w\zeta^{n+2})^{kq}\zeta^{-n-2}\right)^n\leq C\left(q^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\int(w\zeta^{n+2})^q\zeta^{-n-2}\,dx\right)^n\left(\int w^q\zeta^{(n+2)q-n}\,dx\right)^2,$$

e obtemos

$$\left(\int(w\zeta^{n+2})^{kq}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{kq}}\leq C^{\frac{1}{q}}\left(q^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\frac{1}{kq}}\left(\int(w\zeta^{n+2})^{kq}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{q}}. \tag{4.3}$$

Fixamos $q_0\geq 2$ e vamos iterar a desigualdade 4.3 fazendo $q=kq_0$.

$$\begin{aligned}\left(\int(w\zeta^{n+2})^{k^2q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{k^2q_0}}&\leq C^{\frac{1}{kq_0}}\left((kq_0)^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\frac{1}{k^2q_0}}\left(\int(w\zeta^{n+2})^{kq_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{kq_0}}\\&\leq C^{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{kq_0}}\left((q_0)^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\frac{1}{k^2q_0}+\frac{1}{kq_0}}k^{\frac{4}{k^2q_0}}\left(\int(w\zeta^{n+2})^{q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{q_0}},\end{aligned}$$

agora fazendo $q=k^2q_0$ em 4.3 temos $kq=k^3q_0$ e portanto

$$\left(\int (w\zeta^{n+2})^{k^3 q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{k^3 q_0}} \leq C^{\frac{1}{k^2 q_0}}\left((k^2q_0)^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\frac{1}{k^3 q_0}}\left(\int (w\zeta^{n+2})^{k^2 q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{k^2 q_0}}$$
$$\leq C^{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{kq_0}+\frac{1}{k^2q_0}}\left((q_0)^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\frac{1}{k^2 q_0}+\frac{1}{kq_0}+\frac{1}{k^3q_0}} k^{\frac{8}{k^3q_0}} k^{\frac{4}{k^2q_0}}\left(\int (w\zeta^{n+2})^{q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{q_0}},$$

portanto de forma geral para $m \in \mathbb{N}$ temos

$$\left(\int (w\zeta^{n+2})^{k^m q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{k^m q_0}} \leq C^{\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{k^j q_0}}\left((q_0)^4[(1-\sigma)4R]^{-2}\right)^{\sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k^j q_0}} k^{\sum_{j=1}^{m}\frac{4(j-1)}{k^j q_0}}\left(\int (w\zeta^{n+2})^{q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{q_0}}, \tag{4.4}$$

como

$$\sum_{j=0}^{m-1}\frac{1}{k^j} \to \frac{n+2}{2}, \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{k^j} \to \frac{n}{2},$$

temos fazendo $m \to \infty$ em 4.4 usando que $\zeta \equiv 1$ em $B_{\sigma 4R}$

$$\sup_{B_{\sigma 4R}} w \leq C q_0^{\frac{2n}{q_0}}[(1-\sigma)4R]^{-\frac{n}{q_0}}\left(\int_{B_{4R}}(w\zeta^{n+2})^{q_0}\zeta^{-n-2}\right)^{\frac{1}{q_0}}. \tag{4.5}$$

Fazendo $q_0 = 2$ em 4.5 fixado $\sigma \in (0,1)$ para $\sigma \leq \sigma_1 \leq \sigma_2 < 1$,

$$\begin{aligned}
\sup_{B_{\sigma_1 4R}} w &\leq C_1(\sigma_2-\sigma_1)^{-\frac{n}{2}}\left(R^{-n}\int_{B_{\sigma_2 4R}} w^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= C_1\left[(\sigma_2-\sigma_1)^{-1}R^{-n}\int_{B_{\sigma_2 4R}} w\cdot w\,dx\right]^{1/2} \\
&\leq C_1\left[(\sigma_2-\sigma_1)^{-1}R^{-n}\int_{B_{\sigma_2 4R}} w\left(\sup_{B_{\sigma_2 4R}} w\right)dx\right]^{1/2} \\
&\leq \underbrace{C_1\left((\sigma_2-\sigma_1)^{-n}R^{-n}\int_{B_{\sigma_2 4R}} w\,dx\right)^{1/2}}_{a}\underbrace{\left(\sup_{B_{\sigma_2 4R}} w\right)^{1/2}}_{b}
\end{aligned}$$

usando que $ab \leq \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$, obtemos

$$\sup_{B_{\sigma_1 4R}} w \leq C_1^2\left((\sigma_2-\sigma_1)^{-n}R^{-n}\int_{B_{\sigma_2 4R}} w\,dx\right)+\frac{1}{2}\sup_{B_{\sigma_2 4R}} w.$$

Definimos a função $\varphi : [\sigma,1) \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = \sup_{B_{t4R}} w$, $C_2 = C_1^2$ e

$$A = \left(R^{-n}\int_{B_{4R}} w\,dx\right).$$

Assim temos pelo que foi feito acima

$$\varphi(\sigma_1) \leq C_2(\sigma_2-\sigma_1)^{-n}A+\frac{1}{2}\varphi(\sigma_2).$$

Afirmação 4.0.1. *Existe uma constante $C_3 > 0$ que depende somente de n e de C_2 tal que*

$$\varphi(\sigma) \leq C_3(1-\sigma)^{-n}A.$$

Tomamos $\gamma \in (0,1)$ a ser determinado e definimos a sequência de números $\sigma_j = \sigma + (1-\gamma^j)(1-\gamma)$, para $j = 0,1,2,...$ como $\sigma_j - \sigma_{j-1} = (1-\gamma)\gamma^{j-1}(1-\sigma)$ e $\sigma_0 = \sigma$ temos

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma) &\leq C_2(\sigma_1-\sigma_0)^{-n}A + \frac{1}{2}\varphi(\sigma_1) \\
&= C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A + \frac{1}{2}\varphi(\sigma_1) \\
&\leq C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A + \frac{1}{2}\left[C_2(\sigma_2-\sigma_1)^{-n}A + \frac{1}{2}\varphi(\sigma_1)\right] \\
&= C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A + \frac{1}{2}\left[C_2[(1-\gamma)\gamma(1-\sigma)]^{-n}A + \frac{1}{2}\varphi(\sigma_2)\right],
\end{aligned}$$

isso implica que

$$\begin{aligned}
\varphi(\sigma) &\leq C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A\left(1+\frac{1}{2}\gamma^{-n}\right) + \frac{1}{2^2}\varphi(\sigma_2) \\
&\leq C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A\left(1+\frac{1}{2}\gamma^{-n}\right) + \frac{1}{2^2}\left[C_2[(1-\gamma)\gamma^2(1-\sigma)]^{-n}A + \frac{1}{2}\varphi(\sigma_3)\right] \\
&= C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A\left(1+\frac{1}{2}\gamma^{-n} + \frac{1}{2^2}\gamma^{-2n}\right) + \frac{1}{2^3}\varphi(\sigma_3).
\end{aligned}$$

Prosseguindo dessa forma para $l \in \mathbb{N}$,

$$\varphi(\sigma) \leq C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{\gamma^{-n}}{2}\right)^j + \frac{1}{2^l}\varphi(\sigma_l),$$

como φ é uma função limitada, tomando γ de modo que $\frac{\gamma^{-n}}{2} < 1$, temos que a série converge fazendo $l \to \infty$ assim obtemos

$$\varphi(\sigma) \leq C_2[(1-\gamma)(1-\sigma)]^{-n}A\frac{1}{1-\frac{1}{2}\gamma^{-n}}.$$

Tomando

$$C_3 = \frac{C_2(1-\gamma)^{-n}}{1-\frac{1}{2}\gamma^{-n}},$$

obtemos

$$\sup_{B_{\sigma 4R}} w \leq C_3(1-\sigma)^{-n}R^{-n}\int_{B_{4R}} w\,dx.$$

Para $\sigma = \frac{3}{4}$ obtemos

$$\sup_{B_{3R}} w \leq CR^{-n}\int_{B_{4R}} w\,dx.$$

Usando as duas propriedades que demonstramos para F temos

$$
\begin{aligned}
w = \int_0^{|Du_\varepsilon|} tF(t)\,dt \geq \int_{\frac{|Du_\varepsilon|}{4}}^{|Du_\varepsilon|} tF(t)\,dt \geq \int_{\frac{|Du_\varepsilon|}{4}}^{|Du_\varepsilon|} \frac{|Du_\varepsilon|}{4} F\left(\frac{|Du_\varepsilon|}{4}\right) dt \\
= \frac{3|Du_\varepsilon|}{4}\frac{|Du_\varepsilon|}{4} F\left(\frac{|Du_\varepsilon|}{4}\right) \geq \frac{3}{16}|Du_\varepsilon|^2 C(g_0,\delta,n) F(|Du_\varepsilon|).
\end{aligned}
$$

Daí temos

$$
\frac{3}{16} C(g_0,\delta,n)|Du_\varepsilon|^2 F(|Du_\varepsilon|) \leq w \leq |Du_\varepsilon|^2 F(|Du_\varepsilon|),
$$

e obtemos a seguinte estimativa para uma constante $C > 0$ que só depende de g_0 e δ

$$
\sup_{B_{\sigma 4R}} |Du_\varepsilon|^2 F(|Du_\varepsilon|) \leq C R^{-n}(1-\sigma)^{-n} \int_{B_{4R}} |Du_\varepsilon|^2 F(|Du_\varepsilon|)\,dx. \tag{4.6}
$$

Isto é,

$$
\sup_{B_{\sigma 4R}} |Du_\varepsilon| g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|) \leq C(1-\sigma)^{-n} R^{-n} \int_{B_{4R}} |Du_\varepsilon| g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)\,dx.
$$

□

Como uma consequência obtemos a já conhecida em (MARTÍNEZ; WOLANSKI, 2008) estimativa interior para a norma L^∞ do gradiente de funções g-harmônicas.

Corolário 4.0.1. *Existe $C > 0$ que depende somente de n, δ e g_0 tal que para todo $0 < \sigma < 1$ tem-se*

$$
\sup_{B_{\sigma 4R}} G(|\nabla u|) \leq C(1-\sigma)^{-n} R^{-n} \int_{B_{4R}} G(|\nabla u|)\,dx.
$$

Demonstração. Pelo Teorema 3.2.3 existe uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ tal que em quase todo ponto temos

$$
Du_{\varepsilon_k}(x) \to Du(x).
$$

Daí por (g_3) juntamente com a convergência uniforme $G_\varepsilon \to G$ em compactos, fazemos $\varepsilon_k \to 0$ no Teorema 4.0.2 e concluímos o resultado. □

Agora vamos demonstrar uma estimativa para o decaimento da oscilação do gradiente que aparece em outro contexto envolvendo o p-Laplaciano em (LIEBERMAN, 1988). Antes precisamos do seguinte resultado mais técnico.

Lema 4.0.1. *Seja $H:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função C^1 por partes com derivada limitada, então para*

$$A(q)=\frac{g_\varepsilon(|q|)}{|q|}q$$

e toda $\psi\in C_0^\infty(B_r)$ tem-se

$$\int_{B_r} a^{ij}D_{jk}uD_{ik}uH'(D_ku)\psi\,dx=\int_{B_r} A^i(Du)D_{kk}uH'(D_ku)D_i\psi+A^i(Du)H(D_ku)D_{ki}\psi\,dx,$$

onde estamos denotando $u=u_\varepsilon$, que é solução fraca da equação $\triangle_{g_\varepsilon}v=0$ como no capítulo 3.

Demonstração. Vamos usar a seguinte formula de integração por partes com o operador Traço válida para $f\in W^{1,p}$ e $\phi\in C^1$,

$$\int_{B_R} fD_i\phi\,dx=-\int_{B_R} D_if\phi\,dx+\int_{\partial B_R}\phi\nu^iTf\,d\mathscr{H}^{n-1}.$$

Com efeito, fazendo $\eta=H(D_ku)\psi$ em 3.3 temos

$$0=\int a^{ij}D_{jk}uD_i(H(D_ku)\psi)\,dx=\int a^{ij}D_{jk}uD_{ik}uH'(D_ku)\psi\,dx+\int a^{ij}D_{jk}uH(D_ku)D_i\psi\,dx.$$

Portanto obtemos

$$\begin{aligned}\int a^{ij}D_{jk}uD_{ik}uH'(D_ku)\psi\,dx&=-\int a^{ij}D_{jk}uH(D_ku)D_i\psi\,dx\\&=-\int D_k(\underbrace{A^i(Du)}_{\phi})\underbrace{H(D_ku)D_i\psi}_{f}\,dx\\&=\int A^i(Du)D_k(H(D_ku)D_i\psi)\\&=\int A^i(Du)D_{kk}uH'(D_ku)D_i\psi+A^i(Du)H(D_ku)D_{ki}\psi\,dx.\end{aligned}$$

□

Teorema 4.0.3. *Seja $u_\varepsilon\in W^{1,G}_{loc}(B_{4R})$ solução fraca de*

$$div\left(\frac{g_\varepsilon(|\nabla v|)}{|\nabla v|}\nabla v\right)=0\quad em\quad B_{4R},$$

então existem constantes positivas C,β que só dependem de g_0,δ,n tais que para $0<\tau<1$ tem-se

$$osc_{B_{\tau R}}Du_\varepsilon\le C\tau^\beta osc_{B_R}Du_\varepsilon. \tag{4.7}$$

Além disso se é u é solução de 4.1, então Du é Hölder contínua com expoente $\beta\in(0,1)$, e estimativa para todo $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$[Du_\varepsilon]_{C^{0,\beta}(B_R)}\le R^{-\beta}g(1)^{-1}CR^{-n}\left[\int_{B_1^+}G(|Du|)\,dx+1\right].$$

Demonstração. Como já vimos anteriormente, usando a notação no capítulo 3 essa equação satisfaz a seguinte condição de elipticidade

$$\min\{1,\delta\}F(|\nabla u_\varepsilon|)|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1,g_0\}F(|\nabla u_\varepsilon|)|\xi|^2,$$

onde denotaremos $\lambda = \min\{1,\delta\}, \Lambda = \max\{1,g_0\}$,

$$A(q) = \frac{g_\varepsilon(|q|)}{|q|}q, \quad a^{ij} = \frac{\partial A^i}{\partial q_j}.$$

Ao longo da demonstração a menos que esclareçamos explicitamente vamos denotar $u = u_\varepsilon$.

Definimos

$$M = \max_{1\leq i\leq n}\sup_{B_{2R}}|D_i u|,$$

e para uma constante $\mu > 0$ a ser escolhida temos as seguinte possibilidades:

(I) $|\{D_k u < \frac{M}{2}\}\cap B_{2R}| \leq \mu|B_{2R}|$ para algum k,

(II) $|\{D_k u > -\frac{M}{2}\}\cap B_{2R}| \leq \mu|B_{2R}|$ para algum k,

(III) $|\{D_k u < \frac{M}{2}\}\cap B_{2R}|, |\{D_k u > -\frac{M}{2}\}\cap B_{2R}| > \mu|B_{2R}|$ $\forall k$.

Consideremos primeiro que ocorre o caso (I), definimos

$$w = \min\left\{\frac{M}{4}, \max\left\{\frac{M}{2} - D_k u, 0\right\}\right\},$$

vamos tomar uma função H que seja C^1 por partes com derivada limitada tal que para $q \geq \frac{n+2}{2}$

$$H(D_k u) = w^{2q-n-1}.$$

Para isso, seja

$$h(z) = \begin{cases} \frac{M}{4}, \text{ se } z \leq \frac{M}{4}, \\ z, \quad \text{se } \frac{M}{4} < z < \frac{M}{2}, \\ \frac{M}{2}, \quad \text{se } \frac{M}{2} \leq z. \end{cases}$$

Então definimos $H(z) = \left(\frac{M}{2} - h(z)\right)^{2q-n-1}$. No Lema 4.0.1 seja $\psi = \zeta^{2q-n}$ onde

$$|D\zeta| \leq \frac{c(n)}{R}, \quad |D^2\zeta| \leq \frac{c(n)}{R^2} \quad \text{e} \quad 0 \leq \zeta \leq 1 \quad \text{em} \quad B_{2R}.$$

Como $H'(D_k u) \neq 0 \Leftrightarrow \frac{M}{4} < D_k u < \frac{M}{2}$ onde neste caso temos $Dw = -DD_k u$, segue usando o Lema 4.0.1

$$L := \int a^{ij} D_{jk}u D_{ik}u H'(D_k u)\zeta^{2q-n}\, dx \geq \int \lambda F(|Du|)|Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\, dx,$$

enquanto

$$L = \int A^i(Du)D_{kk}uH'(D_k u)D_i(\zeta^{2q-n}) + A^i(Du)H(D_k u)D_{ki}(\zeta^{2q-n})\, dx,$$

onde temos $|D_{ki}(\zeta^{2q-n})| \leq 4q^2\zeta^{2q-n-2}\frac{c(n)}{R^2}$, sendo $|A^i| \leq \Lambda |Du|F(|Du|)$,

$$\begin{aligned} A^i(Du)D_{kk}uH'(D_k u)D_i(\zeta^{2q-n}) &\leq \Lambda|Du|F(|Du|)|Dw|H'(D_k u)(2q-n)\zeta^{2q-n-1}|D\zeta| \\ &= \Lambda F(|Du|)|Du|H'(D_k u)(2q-n)\zeta^{2q-n}\underbrace{|Dw|}_{a}\underbrace{\zeta^{-1}|D\zeta|}_{b} \\ &\leq \Lambda F(|Du|)|Du|H'(D_k u)(2q)\zeta^{2q-n}\left[\varepsilon|Dw|^2 + \frac{\zeta^{-2}|D\zeta|^2}{4\varepsilon}\right]. \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} L \leq &\int \varepsilon\Lambda|Du|F(|Du|)w^{2q-n-2}2q\zeta^{2q-n}|Dw|^2\, dx + \int \frac{\Lambda}{4\varepsilon}|Du|F(|Du|)w^{2q-n-2}2q\zeta^{2q-n-2}|D\zeta|^2\, dx \\ &+ \int \Lambda F(|Du|)|Du|g(D_k u)4q^2\frac{c(n)}{R^2}\zeta^{2q-n-2}\, dx. \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} (\lambda - \varepsilon\Lambda M2q)\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\, dx \leq &\int \frac{\Lambda}{4\varepsilon}|Du|F(|Du|)w^{2q-n-2}2q\zeta^{2q-n-2}\frac{c(n)}{R^2}\, dx \\ &+ \int \Lambda F(|Du|)|Du|w^{2q-n-1}4q^2\frac{c(n)}{R^2}\zeta^{2q-n-2}\, dx, \end{aligned}$$

fazendo $\varepsilon = \frac{\lambda}{4\Lambda M q}$ obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\lambda}{2}\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\, dx \leq &\int \frac{\Lambda^2}{\lambda}Mq^2 F(|Du|)|Du|w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\frac{c(n)}{R^2}\, dx \\ &+ \int \Lambda F(|Du|)|Du|ww^{2q-n-2}q^2\zeta^{2q-n-2}\frac{c(n)}{R^2}\, dx, \end{aligned}$$

logo

$$\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\, dx \leq \frac{\Lambda^2}{\lambda^2}R^{-2}c(n)Mq^2\int F(|Du|)|Du|w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\, dx.$$

Em $\{|Dw| > 0\}$ temos

$$|Du|F(|Du|) \geq D_k u F(D_k u) \geq \frac{M}{4}F\left(\frac{M}{4}\right) \geq \frac{M}{4}c(4,\delta,g_0)F\left(4\frac{M}{4}\right) = c(n,p)\frac{M}{4}F(M),$$

isso implica que

$$\sqrt{n}MF(|Du|) \geq c(\delta, g_0)\frac{M}{4}F(M) \Rightarrow F(|Du|) \geq c(\delta, g_0)F(M).$$

Daí seque que

$$\int F(M)|Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\,dx \leq c(\delta, g_))R^{-2}q^2M\int F(|Du|)|Du|w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\,dx,$$

pois Λ e λ dependem de g_0, δ. Além disso como

$$F(|Du|)|Du| \leq F(\sqrt{n}M)\sqrt{n}M \leq c(n, \delta, g_0)F(M)M,$$

concluímos para uma nova constante $c(n, \delta, g_0) > 0$ que

$$\int |Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\,dx \leq c(n, \delta, g_0)R^{-2}q^2M^2\int w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\,dx.$$

Agora vamos usar novamente a seguinte desigualdade de Sobolev onde $k = \frac{n+2}{n}$

$$\left(\int h^{2k}\,dx\right)^n \leq c(n)\left(\int |Dh|^2\,dx\right)^n\left(\int h^2\,dx\right)^2,$$

para $h = w^{\frac{2q-n}{2}}\zeta^{\frac{2q-n}{2}}$. Como

$$|Dh|^2 \leq 4q^2(w^{2q-n-2}|Dw|^2\zeta^{2q-n} + w^{2q-n}\zeta^{2q-n-2}|D\zeta|^2),$$

e

$$\int h^{2k}\,dx = \int (w^{2q-n}\zeta^{2q-n})^k\,dx = \int \left[(w\zeta)^2\right]^{qk}(w\zeta)^{-n-2}\,dx,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\left[\int \left[(w\zeta)^2\right]^{qk}(w\zeta)^{-n-2}\,dx\right]^n &\leq C\left[\int 4q^2(w^{2q-n-2}|Dw|^2\zeta^{2q-n} + w^{2q-n}\zeta^{2q-n-2}|D\zeta|^2)\,dx\right]^n\left[\int w^{2q-n}\zeta^{2q-n}\,dx\right]^2 \\
&\leq C\left[Cq^4M^2R^{-2}\int w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\,dx\right]^n\left[M^2\int w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\,dx\right]^2 \\
&\leq Cq^{4n}M^{2n}R^{-2n}M^4\left[\int w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\,dx\right]^{n+2}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\left(\int (w\zeta)^{2qk}(w\zeta)^{-n-2}\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \leq Cq^{\frac{4}{k}}M^{\frac{2}{k}}M^{\frac{4}{n+2}}R^{-\frac{2}{k}}\int (w\zeta)^{2q}(w\zeta)^{-n-2}\,dx. \tag{4.8}$$

Vamos iterar a desigualdade 4.8 fazendo $q = \left(\frac{n+4}{2}\right)k^j, j = 0, 1, 2, \ldots$ onde $k = \frac{n+2}{n}$.

Para $j = 0$:

$$\left(\int (w\zeta)^{(n+4)k}(w\zeta)^{-(n+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{k}} \leq C\left(\frac{n+4}{2}\right)^{\frac{4}{k}}M^{\frac{2}{k}}M^{\frac{4}{n+2}}R^{-\frac{2}{k}}\int (w\zeta)^{n+4}(w\zeta)^{-n-2}\,dx.$$

Para $j=1:$

$$\left(\int (w\zeta)^{(n+4)k^2}(w\zeta)^{-(n+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{k^2}} \leq C^{\frac{1}{k}}\left(\frac{n+4}{2}k\right)^{\frac{4}{k^2}} M^{\frac{2}{k^2}+\frac{4}{(n+2)k}} R^{-\frac{2}{k^2}}\left(\int (w\zeta)^{(n+4)k}(w\zeta)^{-(n+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{k}},$$

$$\Rightarrow \left(\int (w\zeta)^{(n+4)k^2}(w\zeta)^{-(n+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{k^2}} \leq C^{1+\frac{1}{k}}\left(\frac{n+4}{2}\right)^{\frac{4}{k}+\frac{4}{k^2}} k^{\frac{4}{k^2}} M^{\frac{2}{k^2}+\frac{4}{(n+2)k}+\frac{2}{k}+\frac{4}{n+2}} R^{-(\frac{2}{k}+\frac{2}{k^2})}\int (w\zeta)^2\,dx.$$

Em geral,

$$\left(\int (w\zeta)^{(n+4)k^j}(w\zeta)^{-(n+2)}\,dx\right)^{\frac{1}{k^j}} \leq C\left(\frac{n+4}{2}\right)^{\Sigma_{m=1}^{j}\frac{4}{k^m}} k^{\Sigma_{m=2}^{j}\frac{4(m-1)}{k^m}} M^{\Sigma_{m=1}^{j}\frac{2}{k^m}+\frac{4}{(n+2)k^{m-1}}} R^{-\Sigma_{m=1}^{j}\frac{2}{k^m}}\int (w\zeta)^2\,dx.$$

Como

$$\sum_{m=1}^{j}\frac{2}{k^m}+\frac{4}{(n+2)k^{m-1}} \to 2\left(\frac{n}{2}\right)+\frac{4}{n+2}\frac{n+2}{2}=n+2,$$

e $(w\zeta)^{-(n+2)} \geq M^{-(n+2)}$, segue fazendo $j\to\infty$

$$\sup_{B_{2R}}(w\zeta)^{n+4} \leq CM^{n+2}R^{-n}\int_{B_{2R}}(w\zeta)^2\,dx,$$

isto é

$$\sup_{B_{2R}} w\zeta \leq C\left[M^{n+2}R^{-n}\int_{B_{2R}}(w\zeta)^2\,dx\right]^{\frac{1}{n+4}}.$$

Sendo $\Sigma=\{w>0\}$ e $\zeta=1$ em B_R temos

$$\sup_{B_R} w \leq C\left[M^{n+2}R^{-n}\int_{\Sigma} w^2\,dx\right]^{\frac{1}{n+4}}.$$

Segue da definição que $w=0 \Leftrightarrow \frac{M}{2}-D_k u \leq 0$, usando a estimativa (I)

$$|\Sigma| = |\{D_k u < M/2\}| \leq \mu|B_{2R}|,$$

isso implica que

$$\sup_{B_R} w \leq C_1\left[M^{n+2}R^{-n}\mu|B_{2R}|M^2\right]^{\frac{1}{n+4}} = C_1 M\mu^{\frac{1}{n+4}}.$$

Tomando μ suficientemente pequeno (dependendo somente de C_1) temos em B_R

$$\frac{M}{2}-D_k u \leq w \leq \frac{M}{8},$$

isso implica que

$$\frac{3M}{8} \leq D_k u \quad \text{em} \quad B_R. \tag{4.9}$$

Consideremos o caso (II),

$$|\{D_k u > -M/2\}| \leq \mu |B_{2R}|.$$

De forma análoga ao caso anterior definimos uma função

$$w = \min\left\{\frac{M}{4}, \max\left\{\frac{M}{2} + D_k u, 0\right\}\right\},$$

logo $w > 0 \Leftrightarrow \frac{M}{2} + D_k u > 0$. Seja

$$H(D_k u) = w^{2q-n-1}$$

onde $H(z) = (\frac{M}{2} + h(z))^{2q-n-1}, q \geq 2$,

$$h(z) = \begin{cases} -\frac{M}{2}, \text{ se } z \leq -\frac{M}{2}, \\ z, \quad \text{se } -\frac{M}{2} < z < -\frac{M}{4}, \\ -\frac{M}{4}, \quad \text{se } -\frac{M}{4} \leq z. \end{cases}$$

Como

$$Dw = \begin{cases} 0, \text{ se } D_k u \geq -\frac{M}{4}, \\ D_k u, \quad \text{se } -\frac{M}{2} < D_k u < -\frac{M}{4}, \\ 0, \quad \text{se } D_k u \leq -\frac{M}{2}. \end{cases}$$

temos da mesma forma que no caso anterior

$$\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{2q-n-2} \zeta^{2q-n}\, dx \leq Cq^2 M R^{-2} \int F(|Du|)|Du| w^{2q-n-2} \zeta^{2q-n-2}\, dx.$$

No conjunto $\{|Dw| > 0\}$ temos

$$\begin{aligned} F(|Du|)\sqrt{n}M &\geq F(|Du|)|Du| \geq F(-D_k u)(-D_k u) \\ &\geq F\left(\frac{M}{4}\right)\frac{M}{4} \geq c(n,\delta,g_0)F(M)\frac{M}{4}, \end{aligned}$$

isto é,

$$F(|Du|) \geq C(n,\delta,g_0)F(M).$$

Assim temos a estimativa

$$\int F(M)|Dw|^2 w^{2q-n-2} \zeta^{2q-n}\, dx \leq Cq^2 M R^{-2} \int F(M) c(n,\delta,g_0)\sqrt{n} M w^{2q-n-2} \zeta^{2q-n-2}\, dx,$$

e portanto

$$\int |Dw|^2 w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n}\,dx \leq Cq^2M^2R^{-2}\int w^{2q-n-2}\zeta^{2q-n-2}\,dx.$$

Então da mesma forma que no caso (I) usando a estimativa acima obtemos:

$$\sup_{B_R} w \leq C_2\left[M^{n+2}R^{-n}\int_{\Sigma} w^2\,dx\right]^{\frac{1}{n+4}},$$

onde $\Sigma = \{w > 0\} = \{D_k u > -M/2\}$. Daí tomando μ de modo que

$$\mu \max\{C_1, C_2\} < \frac{1}{8}$$

observe que C_1, C_2 só dependem de n, λ e Λ,

$$\sup_{B_R} w \leq C\left[M^{n+2}R^{-n}M^2|\{w>0\}|\right]^{\frac{1}{n+4}} \leq C\left[M^{n+2}R^{-n}M^2\mu|B_{2R}|\right]^{\frac{1}{n+4}}$$
$$= C\mu M \leq \frac{1}{8}M.$$

Logo em B_R

$$D_k u + \frac{M}{2} \leq w \leq \frac{M}{8},$$

isso implica que

$$-D_k u \geq \frac{3M}{8} \quad \text{em} \quad B_R. \tag{4.10}$$

A partir das estimativas 4.9 e 4.10 obtemos da mesma forma que na demonstração da Proposition 4.3 em (DIBENEDETTO, 1982) com resultados de ((LADYZHENSKAYA O. A,); pg 81-90), existe uma constante $\gamma_1 \in (0,1)$ que só depende de g_0, δ e n tal que

$$osc_{B_{R/4}} Du \leq \gamma_1 \cdot osc_{B_R} Du. \tag{4.11}$$

Agora vamos considerar o caso (III), seja $\theta > 0, q \geq 2$ e definimos uma função

$$w = \max\{D_k u - (1-\theta)M, 0\}.$$

Seja $H(z) = (h(z) - (1-\theta)M)^{q-1}$ onde

$$h(z) = \begin{cases} z, \text{ se } z > (1-\theta)M, \\ (1-\theta)M, \quad \text{se } z \leq (1-\theta)M. \end{cases}$$

Logo temos $H(D_k u) = w^{q-1}$, e tomando em 3.3 a função teste $H(D_k u)\eta^2$,

$$0 = \int_{B_{2R}} a^{ij} D_{jk}u D_i(H(D_k u)\eta^2)\,dx = \int a^{ij} D_{jk}u D_{ik}u H'(D_k u)\eta^2 + a^{ij} D_{jk}u H(D_k u) 2\eta D_i\eta$$

$$\Rightarrow \int a^{ij} D_{jk}u D_{ik}u H'(D_k u)\eta^2\,dx = -\int a^{ij} D_{jk}u H(D_k u) 2\eta D_i\eta\,dx.$$

Como $Dw = DD_k u$ onde $H'(D_k u) \neq 0$ e $|Dw| = 0$ em $\{D_k u \leq (1-\theta)M\}$,

$$\begin{aligned}\int \lambda F(|Du|)|Dw|^2(q-1)w^{q-2}\eta^2\,dx &\leq \int 2\Lambda F(|Du|)|DD_k u||D\eta|w^{q-1}\eta\,dx \\ &= \int 2\Lambda F(|Du|)|Dw||D\eta|w^{q-1}\eta\,dx.\end{aligned}$$

Usando que

$$w^{q-1}\eta|D\eta||Dw| = w^q \underbrace{w^{-1}|Dw|\eta}_{a}\underbrace{|D\eta|}_{b} \leq w^q\left[\varepsilon w^{-2}\eta^2|Dw|^2 + \frac{|D\eta|^2}{4\varepsilon}\right]$$

segue que

$$[\lambda(q-1) - 2\Lambda\varepsilon]\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{q-2}\eta^2\,dx \leq \frac{2\Lambda}{4\varepsilon}\int F(|Du|)w^q|D\eta|^2\,dx.$$

Como $q \geq 2$, tomando $\varepsilon = \frac{\lambda}{4\Lambda}$ obtemos

$$\frac{\lambda}{2}\int F(|Du|)|Dw|^2 w^{q-2}\eta^2\,dx \leq C\frac{\Lambda^2}{\lambda}\int F(|Du|)w^q|D\eta|^2\,dx. \tag{4.12}$$

Em $\{w > 0\}$ temos $(1-\theta)M < |Du| \leq \sqrt{n}M$, isso implica

$$F((1-\theta)M)(1-\theta)M \leq F(|Du|)|Du| \leq c(n, g_0, \delta)F(M)M,$$

logo

$$\frac{F(|Du|)}{F(M)} \leq c(n, g_0, \delta)\frac{M}{|Du|} \leq c(n, \delta, g_0)(1-\theta)^{-1}.$$

Além disso como temos a intensão de diminuir θ podemos pedi-lo de forma que

$$\frac{M}{4} < (1-\theta)M \Rightarrow \theta < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

assim vemos que

$$F\left(\frac{M}{4}\right)\frac{M}{4} \leq (1-\theta)MF((1-\theta)M) \Rightarrow F((1-\theta)M) \geq (1-\theta)^{-1}F\left(\frac{M}{4}\right)\frac{1}{4} \geq \frac{c(n,\delta,g_0)(1-\theta)^{-1}}{4}F(M)$$

isso implica que

$$F(|Du|) \geq c(n,\delta,g_0)\frac{(1-\theta)M}{|Du|}F((1-\theta)M) \geq c(n,\delta,g_0)(1-\theta)F((1-\theta)M) \geq \frac{c}{4}F(M).$$

Então existem constantes positivas c_1 e c_2 que dependem somente de p e n tal que em $\{w > 0\}$ temos

$$c_1 \leq \frac{F(|Du|)}{F(M)} \leq c_2,$$

e portanto segue de 4.12

$$\int_{B_{2R}} |Dw|^2 w^{q-2} \eta^2 \, dx \leq C \int_{B_{2R}} w^q |D\eta|^2 \, dx. \tag{4.13}$$

Se para todo $\nu \in (1,2)$, tivermos

$$|\{D_k u \leq M/2\} \cap B_{\nu R}| \leq \frac{\mu}{2} |B_{\nu R}|,$$

então

$$|\{D_k u \leq M/2\} \cap B_{2R}| \leq \frac{\mu}{2} |B_{2R}|,$$

mas isso contradiz (III), logo existe $\nu \in (1,2)$ tal que

$$|\{D_k u \leq M/2\} \cap B_{\nu R}| > \frac{\mu}{2} |B_{\nu R}|.$$

Agora vamos usar 3.3 com $\eta = \zeta^{(n+2)q-n} w^{q-1}, q \geq 2$ onde $\zeta \in C_0^\infty$

$$|D\zeta| \leq \frac{c(n)}{(1-\sigma)R}, \quad \zeta \equiv 1 \quad \text{em} \quad B_{\sigma R},$$

então

$$\int_{B_{\nu R}} a^{ij} D_{jk} u (\zeta^{(n+2)q-n} (q-1) w^{q-2} D_i w + [(n+2)q - n] \zeta^{(n+2)q-n-1} D_i \zeta w^{q-1}) \, dx = 0,$$

isso implica que

$$\int a^{ij} D_{jk} u D_{ik} u \zeta^{(n+2)q-n} (q-1) w^{q-2} \, dx = -\int a^{ij} D_{jk} u D_i \zeta w^{q-1} \zeta^{(n+2)q-n-1} [(n+2)q - n] \, dx,$$

logo

$$\int \lambda (q-1) F(|Du|) |Dw|^2 \zeta^{(n+2)q-n} w^{q-2} \, dx \leq \Lambda (n+2) q \int F(|Du|) |Dw| |D\zeta| w^{q-1} \zeta^{(n+2)q-n-1} \, dx.$$

Como

$$w^q \zeta^{(n+2)q-n} \underbrace{w^{-1}|Dw|}_{a} \underbrace{\zeta^{-1}|D\zeta|}_{b} \leq w^q \zeta^{(n+2)q-n} \left[\varepsilon |Dw|^2 w^{-2} + \frac{\zeta^{-2}|D\zeta|^2}{4\varepsilon} \right],$$

isso implica que

$$[\lambda(q-1) - \Lambda(n+2)q\varepsilon] \int F(|Du|)|Dw|^2 \zeta^{(n+2)q-n} w^{q-2} \, dx \leq \frac{\Lambda(n+2)q}{4\varepsilon} \int F(|Du|) w^q \zeta^{(n+2)q-n-2} |D\zeta|^2 \, dx.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{\lambda}{2\Lambda(n+2)q}$ obtemos

$$\frac{\lambda}{2}\int F(|Du|)|Dw|^2\zeta^{(n+2)q-n}w^{q-2}\,dx \leq \frac{\Lambda^2(n+2)^2q^2}{2\lambda}\int F(|Du|)w^q\zeta^{(n+2)q-n-2}|D\zeta|^2\,dx.$$

Como em $\{w>0\}$ temos

$$c_1 \leq \frac{F(|Du|)}{F(M)} \leq c_2,$$

isso implica que

$$\int_{B_{\nu R}} |Dw|^2\zeta^{(n+2)q-n}w^{q-2}\,dx \leq \frac{Cq^2}{[(1-\sigma)R]^2}\int_{B_{\nu R}} w^q\zeta^{(n+2)q-n-2}\,dx.$$

Sendo $S(\theta) := \{w>0\}\cap B_{\nu R}$, temos a partir da estimativa acima repetindo o mesmo processo de iteração

$$\sup_{B_R} w \leq CR^{-n}\int_{S(\theta)} w\,dx.$$

Como $w \leq \theta M$ segue que

$$\sup_{B_R} w \leq C\theta M\frac{|S(\theta)|}{|B_{2R}|}.$$

Se $|S(\theta)|$ for pequeno para θ pequeno então

$$D_k u - (1-\theta)M \leq \frac{\theta}{2}M,$$

isso implica que

$$D_k u \leq \left(1-\frac{\theta}{2}\right)M \;\text{ em }\; B_R.$$

Para estimar $|S(\theta)|$ tomamos $q=2$ em 4.13 com

$$0\leq \eta \leq 1, \quad |D\eta| \leq \frac{c(n)}{(2-\nu)R}, \quad \text{e} \quad \eta \equiv 1 \quad \text{em} \quad B_{\nu R},$$

isso implica que

$$\int_{B_{\nu R}} |Dw|^2\,dx \leq C[(2-\nu)R]^{-2}(\theta M)^2R^n. \tag{4.14}$$

Vamos tomar $\theta = 2^{-j}$, com $j\in\mathbb{N}$ a ser escolhido

$$S^*(j) := \{x\in B_{\nu R}; D_k u > (1-2^{-j})M\},\;\; \Sigma(j) := S^*(j)\setminus S^*(j+1).$$

Note que $w > 0$ em $S^*(j)$, daí pela desigualdade de Holder e 4.14

$$\begin{aligned}
\int_{\Sigma(j)} |DD_k u|\, dx &\leq \left[|\Sigma(j)| \int_{B_{\nu R}} |Dw|^2\, dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \left[|\Sigma(j)| C R^{-2} (2^{-j} M)^2 R^n \right]^{\frac{1}{2}} \\
&= CM 2^{-j} \left[R^{-2} |\Sigma(j)| R^n \right]^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Como $2^{-1} \leq 1 - 2^{-j} \leq 1 - 2^{-j-1}$, temos a união disjunta

$$\{D_k u \leq M/2\} \cup S^*(j) \subset B_{\nu R},$$

isso implica que

$$|\{D_k u \leq M/2\}| + |S^*(j)| \leq |B_{\nu R}|.$$

Afirmação 4.0.2. *Vale a seguinte estimativa entre as medidas de Lebesgue*

$$|S^*(j)| \leq \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) |B_{\nu R}|.$$

Com efeito se ocorre o contrario, isto é

$$|S^*(j)| > \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) |B_{\nu R}|,$$

como

$$|\{D_k u \leq M/2\} \cap B_{\nu R}| > \frac{\mu}{2} |B_{\nu R}|,$$

isso implica que

$$|B_{\nu R}| \geq |\{D_k u \leq M/2\} \cap B_{\nu R}| + |S^*(j)| > \frac{\mu}{2} |B_{\nu R}| + \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) |B_{\nu R}| = |B_{\nu R}|,$$

que é um absurdo e portanto fica provada a afirmação.

Agora tomamos $k = 1 - 2^{-j}$ e $l = 1 - 2^{-j-1}$ no Lema 2.1.6 juntamente com a Afirmação 4.0.2 para obtermos a seguinte estimativa

$$2^{-(j+1)} M |S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{c(n)}{(1 - \mu/2)\nu^n} \int_{\Sigma(j)} |DD_k u|\, dx.$$

Portanto,

$$2^{-(j+1)} M |S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}} \leq C 2^{-j} M \left[R^{-2} |\Sigma(j)| R^n \right]^{\frac{1}{2}},$$

donde concluímos que

$$R |S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}} \leq 2 C R^{\frac{n}{2}} |\Sigma(j)|^{\frac{1}{2}}. \tag{4.15}$$

Por outro lado segue da desigualdade de Holder com $p=n$ e $q=\frac{n}{n-1}$,

$$\begin{aligned}(1-2^{-j-1})M|S^*(j+1)| &= \int_{S^*(j)}(1-2^{-j-1})M\,dx\\ &< \int_{S^*(j+1)} D_k u\,dx\\ &\leq |S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}}\left(\int_{B_{\nu R}}|D_k u|^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}}\\ &\leq |S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}}\nu R\sqrt{n}M.\end{aligned}$$

Como $\frac{1}{2}\leq 1-2^{-j-1}$, segue que

$$|S^*(j+1)| \leq 2\sqrt{n}\nu|S^*(j+1)|^{\frac{n-1}{n}}R. \tag{4.16}$$

Daí 4.15 e 4.16 implicam que

$$|S^*(j+1)| \leq 4C\nu R^{\frac{n}{2}}|\Sigma(j)|^{\frac{1}{2}},$$

logo

$$|S^*(j+1)|^2 \leq CR^n|\Sigma(j)| \leq CR^n(|S^*(j)|-|S^*(j+1)|).$$

Como $|S^*(j+1)|\leq|S^*(j)|$ podemos somar a desigualdade acima $j=0,...,s-1$

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{s-1}|S^*(j+1)|^2 &\leq CR^n\sum_{j=0}^{s-1}(|S^*(j)|-|S^*(j+1)|)\\ &= CR^n(|S^*(1)|-|S^*(s+1)|)\\ &\leq CR^n|S^*(1)|,\end{aligned}$$

isso implica que

$$s|S^*(s)|^2 \leq CR^n|S^*(1)| \leq CR^{2n}. \tag{4.17}$$

Como

$$S(\theta)=\{D_k u>(1-\theta)M\} \Rightarrow S(2^{-j})=S^*(s),$$

obtemos

$$\theta=2^{-s}\Rightarrow \log_2(\theta)=-s\Rightarrow s=\log_2\left(\frac{1}{\theta}\right),$$

então

$$S(\theta)=S^*\left(\log_2\left(\frac{1}{\theta}\right)\right).$$

Assim, por 4.17 temos para $\theta < \frac{3}{4}$

$$|S(\theta)| \leq \left(\frac{C}{\log_2\left(\frac{1}{\theta}\right)} \right)^{1/2} |B_{2R}|.$$

Além disso, pelo fato de que

$$\lim_{\theta \to 0} \log_2\left(\frac{1}{\theta}\right) = \infty,$$

segue tomando θ suficientemente pequeno de modo que

$$\frac{C}{\log_2\left(\frac{1}{\theta}\right)} < \frac{1}{4},$$

para obtermos

$$D_k u - (1-\theta)M \leq w \leq C\theta M \frac{|S(\theta)|}{|B_{2R}|} \leq \frac{\theta}{2} M,$$

portanto em B_R temos $\forall k \in \{1, ..., n\}$

$$D_k u \leq \left(1 - \frac{\theta}{2}\right) M.$$

Tudo o que foi feito até agora no caso (III) também se aplica para a função

$$w = \max\{-D_k u - (1-\theta)M, 0\},$$

de modo que obtemos da mesma forma

$$\sup_{B_R} w \leq C\theta M \frac{|S(\theta)|}{|B_{2R}|},$$

onde $S(\theta) = \{w > 0\} \cap B_{\nu R}$ e $\nu \in (1,2)$ é tal que

$$|\{-D_k u < M/2\} \cap B_{\nu R}| > \frac{\mu}{2} |B_{\nu R}|,$$

com $S^*(j) := \{x \in B_{\nu R}; -D_k u > (1 - 2^{-j})M\}$, e da mesma forma que anteriormente temos a união disjunta

$$\{-D_k u < M/2 \cap B_{\nu R}\} \cup S^*(j) \subset B_{\nu R},$$

$$\Rightarrow |\{-D_k u < M/2 \cap B_{\nu R}\}| + |S^*(j)| \leq |B_{\nu R}| \Rightarrow |S^*(j)| \leq \left(1 - \frac{\mu}{2}\right) |B_{\nu R}|.$$

Logo segue da mesma forma que anteriormente

$$|S(\theta)| \leq \frac{C}{\log_2\left(\frac{1}{\theta}\right)},$$

e

$$-D_k u-(1-\theta)M \leq w \leq C\theta M\frac{|S(\theta)|}{|B_{2R}|} \leq \frac{\theta}{2}M,$$

isto é em B_R temos $\forall k \in \{1,...,n\}$

$$-D_k u \leq \left(1-\frac{\theta}{2}\right)M.$$

Portanto

$$\max_{1\leq k\leq n}\sup_{B_R}|D_k u| \leq \left(1-\frac{\theta}{2}\right)\max_{1\leq k\leq n}\sup_{B_{2R}}|D_k u|. \tag{4.18}$$

Assim obtemos que uma das desigualdades 4.11 ou 4.18 ocorre. Voltando a notação com ε, portanto como em (LIEBERMAN, 1988) (1.2) concluímos que existem constantes positivas C,β dependendo somente de n,δ e g_0 tal que se $0<\tau<1$ então

$$osc_{B_{\tau R}}Du_\varepsilon \leq C\tau^\beta \cdot osc_{B_R}Du_\varepsilon. \tag{4.19}$$

Agora para obtermos uma estimativa para a constante de Hölder vamos relembrar a desigualdade 4.6 para $\sigma=\frac{2}{4}$, temos

$$\sup_{B_{2R}}|Du_\varepsilon|^2F(|Du_\varepsilon|) \leq CR^{-n}\int_{B_4R}|Du_\varepsilon|^2F(|Du_\varepsilon|)\,dx.$$

Usando que $F(t)t \leq F(s)s$ para $0<t\leq s$, vemos que

$$|Du_\varepsilon| \geq 1 \Rightarrow F(1)|Du_\varepsilon| \leq F(|Du_\varepsilon|)|Du_\varepsilon|^2.$$

Então usando (g_3) juntamente com a convergência em compactos de $G_\varepsilon \to G$ temos para todo $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0)$

$$\begin{aligned}\sup_{\{|Du_\varepsilon|\geq 1\}\cap B_{2R}}|Du_\varepsilon| &\leq \frac{CR^{-n}}{g_\varepsilon(1)}\int_{B_{4R}}g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)|Du_\varepsilon|\,dx\\ &\leq g_\varepsilon(1)^{-1}CR^{-n}\int_{B_{4R}}G_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)\,dx\\ &\leq g(1)^{-1}CR^{-n}\left[\int_{B_1^+}G(|Du|)\,dx+1\right].\end{aligned}$$

Logo temos para $0<\varepsilon<\varepsilon_0$

$$\sup_{B_{2R}}|Du_\varepsilon| \leq g(1)^{-1}CR^{-n}\left[\int_{B_1^+}G(|Du|)\,dx+1\right]. \tag{4.20}$$

Observemos que a desigualdade 4.19 é equivalente ao seguinte: $\forall r \in (0,R)$ então para uma constante universal $C>0$ tem-se

$$osc_{B_r} Du_\varepsilon \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\beta osc_{B_R} Du_\varepsilon.$$

Sejam $x,y \in B_R$, tratamos dois casos, a saber caso $|x-y|<R$ tomamos $r=|x-y|$ na desigualdade acima e obtemos

$$|Du_\varepsilon(x)-Du_\varepsilon(y)| \leq osc_{B_r} Du_\varepsilon \leq C\left(\frac{|x-y|}{R}\right)^\beta osc_{B_R} Du_\varepsilon \leq C\left(\frac{|x-y|}{R}\right)^\beta 2\sup_{B_R}|Du_\varepsilon|.$$

Caso $|x-y| \geq R$ então

$$\frac{|Du_\varepsilon(x)-Du_\varepsilon u(y)|}{|x-y|^\beta} \leq \frac{|Du_\varepsilon(x)-Du_\varepsilon u(y)|}{R^\beta} \leq \frac{2\sup_{B_R}|Du_\varepsilon|}{R^\beta}.$$

Portanto temos a limitação para seminorma Hölder dada por

$$[Du_\varepsilon]_{C^{0,\beta}(B_R)} \leq 2R^{-\beta} g(1)^{-1} C R^{-n}\left[\int_{B_1^+} G(|Du|)\,dx+1\right].$$

□

Como consequência do resultado anterior obtemos a seguinte estimativa $C^{0,\beta}$ para o gradiente das soluções fracas de $\triangle_g u=0$.

Corolário 4.0.2. *Existem constantes $\beta, C>0$ que só dependem de $g(1), \delta, g_0$ e n onde tem-se para $0<\tau<1$*

$$osc_{B_{\tau R}} Du \leq C\tau^\beta \cdot osc_{B_R} Du.$$

Demonstração. Gostariamos agora de fazer $\varepsilon \to 0$ no Teoremas 4.0.3 combinando com o Teorema 3.2.3, mas para isso precisamos de convergência uniforme do gradiente. Utilizando a mesma notação do Teorema 4.0.3 iremos denotar $\gamma_0=\left(1-\frac{\theta}{2}\right)$.

Sejam

$$\omega(\rho) := \max_{1\leq i\leq n} osc_{B_\rho} D_i u_\varepsilon,$$

e

$$\mu(\rho) := \max_{1\leq i\leq n} \sup_{B_\rho} |D_i u_\varepsilon|.$$

Se vale (I) ou (II) nos casos do Teorema 4.0.3 então

$$\omega(R/4) \leq \gamma_1 \omega(R). \tag{4.21}$$

Se vale (III) então

$$\mu(R) \leq \gamma_0 \mu(2R). \tag{4.22}$$

Consideremos a sequência de raios $R_k := \frac{R}{2^k}, k = 0, 1, 2, ...$ Observe que na demonstração do caso (I) e (II) a hipótese usada

$$|\{D_k u < M/2\} \cap B_{2R}|, \text{ ou } |\{D_k u > -M/2\} \cap B_{2R}| \leq \mu |B_{2R}|,$$

pode ser substituida por

$$|\{D_k u < M/2\} \cap B_{2R}|, \text{ ou } |\{D_k u > -M/2\} \cap B_{2R}| \leq \mu R^n.$$

Daí se (I) ou (II) ocorre em alguma bola $B_{R_{k_0}}$ para algum $k_0 \in \mathbb{N}$, então essas hipóteses continuam sendo válidas em B_{R_k} para todo $k \geq k_0$.

Caso 1: Não existe $k \in \mathbb{N}$ tal que as hipóteses em (I) ou (II) se verificam em B_{R_k}. Neste caso temos que (III) se verifica para todo $k \in \mathbb{N}$, e por 4.22 temos

$$\mu\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq \gamma_0 \mu\left(\frac{R}{2^{k-1}}\right) \Rightarrow \mu\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq \gamma^k \mu(2R),$$

então

$$\omega\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq 2\gamma_0^k \mu(2R), \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Seja $\rho \in (0, R)$ então existe $i \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{R}{2^{i+1}} \leq \rho < \frac{R}{2^i}$, como

$$\omega(\rho) \leq \omega\left(\frac{R}{2^i}\right),$$

segue que

$$\omega(\rho) \leq 2\gamma_0^i \mu(2R).$$

Porém

$$\frac{R}{2^{i+1}} \leq \rho \Rightarrow i + 1 \geq \log_2 \frac{R}{\rho} \Rightarrow \gamma_0^i \leq \gamma_0^{\log_2 \frac{R}{\rho} - 1},$$

e

$$\gamma_0^{\log_2 \frac{R}{\rho}} = \left(\gamma_0^{\log_{\gamma_0} \frac{R}{\rho}}\right)^{\frac{1}{\log_{\gamma_0} 2}} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^{\frac{1}{\log_{\delta_0} 2}} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha},$$

onde $\alpha = -\frac{1}{\log_{\gamma_0} 2}$. Portanto

$$\omega(\rho) \leq 2\gamma_0^{-1} \left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha} \mu(2R).$$

Caso 2: Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que (I) ou (II) se verifica em B_{R_k}. Definimos

$$k_0 := \min\{k \in \mathbb{N}; \text{(I) ou (II) ocorre em } B_{R_k}\}.$$

Neste caso temos como foi mencionado acima que essas hipóteses se verificam para todo $k \geq k_0$, além disso temos que para todo $0 \leq k < k_0$ vale (III). Daí temos

$$\omega\left(\frac{R}{2^{k+1}}\right) \leq \gamma_1 \cdot \omega\left(\frac{R}{2^{k-1}}\right),\ \forall k \geq k_0,$$

$$\mu\left(\frac{R}{2^{k}}\right) \leq \gamma_0 \cdot \mu\left(\frac{R}{2^{k-1}}\right),\ 0 < k < k_0.$$

Seja

$$\gamma_2 = \max\{\gamma_0, \gamma_1\}.$$

Se $k < k_0$ então

$$\omega\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq 2\mu\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq 2\gamma_2\mu\left(\frac{R}{2^{k-1}}\right) \leq 2\gamma_2^k\mu(2R).$$

Se $k \geq k_0$ então

$$\begin{aligned}\omega\left(\frac{R}{2^k}\right) &\leq \gamma_2\omega\left(\frac{R}{2^{k-1}}\right) \leq \gamma_2^{k-k_0-1}\omega\left(\frac{R}{2^{k_0+1}}\right)\\ &\leq \gamma_2^{k-k_0}\omega\left(\frac{R}{2^{k_0-1}}\right) \leq 2\gamma_2^{k-k_0}\gamma_2^{k_0-1}\mu(2R) = 2\gamma_2^{k-1}\mu(2R).\end{aligned}$$

Entao como $\gamma_2 \in (0,1)$ temos

$$\omega\left(\frac{R}{2^k}\right) \leq 2\gamma_2^{k-1}\mu(2R)\ \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Repetindo o mesmo argumento anteriormente temos para $\rho \in (0,R)$

$$\omega(\rho) \leq 2\gamma_2^{-2}\left(\frac{\rho}{R}\right)^{\alpha}\mu(2R),$$

onde $\alpha = -\frac{1}{\log_{\gamma_2} 2}$.

Portanto dados $x,y \in B_R$ voltando a notação com ε temos dois casos. Se $|x-y| < R$ então tomando $\rho = |x-y|$ temos:

$$|Du_\varepsilon(x) - Du_\varepsilon(y)| \leq 2\gamma_2^{-2}R^{-\alpha}|x-y|^{\alpha}\sup_{B_{2R}}|Du_\varepsilon|. \tag{4.23}$$

Relembrando a estimativa 4.20, temos para $0 < \varepsilon < 1$

$$\sup_{B_{2R}}|Du_\varepsilon| \leq g(1)^{-1}CR^{-n}\left[\int_{B_1^+} G(|Du|)\,dx + 1\right]. =: \tilde{C}.$$

Substituindo o que obtemos em 4.23 vemos que

$$|Du_\varepsilon(x) - Du_\varepsilon(y)| \leq 2\gamma_2^{-2} R^{-\alpha} |x-y|^\alpha \tilde{C}. \tag{4.24}$$

Ou seja o lado direito da equação não depende de ε. Caso $|x-y| > R$ temos

$$|Du_\varepsilon(x) - Du_\varepsilon(y)| \leq 2 \sup_{B_{2R}} |Du_\varepsilon| R^{-\alpha} |x-y|^\alpha,$$

e obtemos uma estimativa análoga a 4.24. Em qualquer dos casos temos que a sequência $(|Du_\varepsilon|)_{0<\varepsilon<\varepsilon_0}$ é uniformemente limitada e equicontínua. Daí segue do Teorema 3.2.3 usando o Teorema de Ascoli-Arzelá que

$$Du_{\varepsilon_k} u \to Du \quad \text{uniformemente em} \quad B_{2R}.$$

Fazendo então $\varepsilon_k \to 0$ em 4.19 concluímos que existem constantes $\beta, C > 0$ que só dependem de δ, g_0 e n, onde tem-se

$$osc_{B_{\tau R}} Du \leq C\tau^\beta \cdot osc_{B_R} Du.$$

$\square$

5 REGULARIDADE ATÉ A FRONTEIRA

Agora para a segunda etapa vamos considerar $u \in W^{1,G}(B_R^+) \cap L^\infty(\overline{B_R^+})$ solução no sentido das distribuições do seguinte problema para $R \in (0,1)$:

$$\triangle_g u = 0 \quad \text{em} \quad B_R^+, \quad u = \phi \quad \text{em} \quad B_R^0, \tag{5.1}$$

onde $\phi \in C^{1,\alpha}(B_R^0)$, e para simplificar denotamos

$$B_R^+ = B_R \cap \{x_n > 0\}, \quad B_R^0 = B_R \cap \{x_n = 0\}, \quad \Phi = ||\phi||_{C^{1,\alpha}}.$$

Para usar a mesma estratégia que o Lieberman em (LIEBERMAN, 1988) vamos precisar estender a função ϕ para B_R^+. A forma de estender é uma variação do que aparece em (LIEBERMAN, 1985). Considere uma função $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ com $supp(\varphi) \subset B_{1/7}(0)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \varphi \, dy = 1.$$

Definimos $\tilde{\phi} : \overline{B_{7R/8}^+} \to \mathbb{R}$ dada por

$$\tilde{\phi}(x', x_n) = \int_{B_{1/7}(0)} \phi(x' - x_n y)\varphi(y)\, dy.$$

Note que fazendo $x_n = 0$ temos $\tilde{\phi}(x', 0) = \phi(x')$.

Lema 5.0.1. *A função $\tilde{\phi}$ está bem definida, além disso temos $\tilde{\phi} \in C^2(B_{\frac{7R}{8}}^+)$, com as seguintes estimativas*

$$||\tilde{\phi}||_{1,\alpha} \leq C(n)\Phi \quad e \quad |D^2\tilde{\phi}(x)| \leq C(n)\Phi \cdot (x_n)^{\alpha-1}.$$

Demonstração. 1. $\tilde{\phi}$ está bem definida.

Com efeito, dado $x' \in B_{\frac{7R}{8}} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, como $0 \leq x_n \leq \frac{7R}{8}$ e $y \in B_{1/7}(0)$ segue que

$$|x_n y| < \frac{7R}{8}\frac{1}{7} = \frac{R}{8},$$

isso implica que $x' - x_n y \in B_R$.

2. $\tilde{\phi}$ é Lipschitz.

Vamos primeiro calcular as derivadas parciais para $j < n$ e mostrar que

$$D_j\phi(x', x_n) = \int_{B_{1/7}(0)} D_j\phi(x' - x_n y)\varphi(y)\, dy$$

Para h sufcientemente pequeno temos $x'+h\overline{e_j}-x_ny \in B_R$, logo

$$x+he_j=(x'+h\overline{e_j},x_n)$$

$$\frac{\tilde{\phi}(x+he_j)-\tilde{\phi}(x)}{h}=\int_{B_{1/7}(0)}\left(\frac{\phi(x'+h\overline{e_j}-x_ny)-\phi(x'-x_ny)}{h}\right)\varphi(y)\,dy.$$

Como

$$\frac{\phi(x'+h\overline{e_j}-x_ny)-\phi(x'-x_ny)}{h}\longrightarrow D_j\phi(x'-x_ny)\in L^\infty(B_R),$$

e

$$\int_{B_{1/7}(0)}|D_j\phi(x'-x_ny)||\varphi(y)|\,dy\leq||D_j\phi||_\infty\int_{B_{1/7}(0)}|\varphi(y)|\,dy<\infty,$$

segue do Teorema da Convergencia Dominada,

$$D_j\tilde{\phi}(x)=\int_{B_{1/7}(0)}D_j\phi(x'-x_ny)\varphi(y)\,dy\leq||D_j\phi||_\infty\int_{B_{1/7}(0)}|\varphi(y)|\,dy.$$

De forma análoga temos

$$D_n\tilde{\phi}(x)=\int_{B_{1/7}(0)}\langle\nabla\phi(x'-x_ny),-y\rangle\varphi(y)\,dy\leq||\nabla\phi||_\infty\int_{B_{1/7}(0)}|y||\varphi(y)|\,dy.$$

Portanto $\tilde{\phi}$ é Lipschitz e estende ϕ pois

$$\tilde{\phi}(x',0)=\phi(x')\int_{B_{1/7}(0)}\varphi(y)\,dy=\phi(x').$$

3. $\tilde{\phi}\in C^{1,\alpha}$ com $||D\tilde{\phi}||_{0,\alpha}\leq c(n)\Phi$.

$$\begin{aligned}
D_j\tilde{\phi}(x_1',x_{1n})-D_j\tilde{\phi}(x_2',x_{2n}) &= \int_{B_{1/7}(0)}(D\phi(x_1',x_{1n})-D\phi(x_2',x_{2n}))\varphi(y)\,dy\\
&\leq \int_{B_{1/7}(0)}\Phi|x_1'-x_2'-y(x_{1n}-x_{2n})|^\alpha\varphi(y)\,dy\\
&\leq \int_{B_{1/7}(0)}\Phi(|x_1-x_2'|+|y||x_{1n}-x_{2n}|)^\alpha\varphi(y)\,dy\\
&\leq \Phi(|x_1-x_2'|+\frac{1}{7}|x_{1n}-x_{2n}|)^\alpha\int_{B_{1/7}(0)}\varphi(y)\,dy\\
&\leq c(n)\Phi|(x_1',x_{1n})-(x_2',x_{2n})|^\alpha.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
D_n\tilde{\phi}(x_1',x_{1n}) - D_n\tilde{\phi}(x_2',x_{2n}) &= \int_{B_{1/7}(0)} \langle D\phi(x_1',x_{1n}) - D\phi(x_2',x_{2n}), -y\rangle \varphi(y)\,dy \\
&\leq \int_{B_{1/7}(0)} |D\phi(x_1',x_{1n}) - D\phi(x_2',x_{2n})||y||\varphi(y)|\,dy \\
&\leq \int_{B_{1/7}(0)} \Phi|x_1' - x_2' - y(x_{1n}-x_{2n})|^{\alpha}|y||\varphi(y)|\,dy \\
&\leq c(n)\Phi|(x_1',x_{1n}) - (x_2',x_{2n})|^{\alpha}.
\end{aligned}
$$

4. $|D^2\tilde{\phi}| \leq c(n)\Phi(x_n)^{\alpha-1}$.

   Fazendo a mudança de variáveis $z = x' - x_n y$ com $y = \frac{x'-z}{x_n}$ e $dy = \frac{-dz}{x_n^{n-1}}$ temos

$$
\tilde{\phi}(x',x_n) = -\int \phi(z)\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)\frac{dz}{x_n^{n-1}}. \tag{5.2}
$$

   Usando 5.2 temos

$$
D_j\tilde{\phi} = -\int \phi(z) D_j\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)\frac{1}{x_n}\frac{dz}{x_n^{n-1}} = \frac{1}{x_n}\int \phi(x'-x_n y)D_j\varphi(y)\,dy,
$$

   e

$$
\begin{aligned}
D_n\tilde{\phi} &= -\int \phi(z)\left\langle \nabla\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right), \left(\frac{x'-z}{-x_n^2}\right)\right\rangle \frac{dz}{x_n^{n-1}} - \int \phi(z)\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)(1-n)\frac{dz}{x_n^{n}} \\
&= -\frac{1}{x_n}\int \phi(z)\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)(1-n)\frac{dz}{x_n^{n-1}} + \int \phi(z)\left\langle \nabla\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right), \left(\frac{x'-z}{x_n^2}\right)\right\rangle \frac{dz}{x_n^{n-1}} \\
&= \frac{1}{x_n}\int \phi(x'-x_n y)\varphi(y)(1-n)\,dy - \frac{1}{x_n}\int \phi(x'-x_n y)\langle\nabla\varphi(y),y\rangle\,dy \\
&= \frac{1}{x_n}\int \phi(x'-x_n y)[(1-n)\varphi(y) - \langle\nabla\varphi(y),y\rangle]\,dy.
\end{aligned}
$$

   Pelo Teorema de Stokes, como φ tem suporte compacto segue que

$$
\int_B D\varphi = 0,
$$

   além disso, como

$$
0 = \int_B D_i(\varphi(x)\cdot x_i) = \int D_i\varphi(x)\cdot x_i + \int \varphi
$$

   segue que

$$
\int [(1-n)\varphi(y) - \langle\nabla\varphi(y),y\rangle]\,dy = 0.
$$

Note que

$$
\begin{aligned}
D_{ij}\tilde{\phi} &= \frac{1}{x_n}\int D_i\phi(x'-x_ny)D_j\varphi(y)\,dy\\
&= \frac{1}{x_n}\int (D_i\phi(x'-x_ny)-D_i\phi(x'))D_j\varphi(y)\,dy\\
&\leq \frac{1}{x_n}\int \Phi|-x_ny|^{\alpha}|D_j\varphi(y)|\,dy\\
&\leq (x_n)^{\alpha-1}\Phi\int_B |y||D_j\varphi(y)|\,dy,
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
D_{in}\tilde{\phi} &= \frac{1}{x_n}\int_B D_i\phi(x'-x_ny)[(1-n)\varphi(y)-\langle\nabla\varphi(y),y\rangle]\,dy\\
&= \frac{1}{x_n}\int_B (D_i\phi(x'-x_ny)-D_i\phi(x'))[(1-n)\varphi(y)-\langle\nabla\varphi(y),y\rangle]\,dy\\
&\leq \frac{1}{x_n}\int_B \Phi|-x_ny|^{\alpha}|(1-n)\varphi(y)-\langle\nabla\varphi(y),y\rangle|\,dy\\
&\leq (x_n)^{\alpha-1}\frac{\Phi}{7}\int_B |(1-n)\varphi(y)-\langle\nabla\varphi(y),y\rangle|\,dy.
\end{aligned}
$$

Por fim, temos

$$
\begin{aligned}
D_n\tilde{\phi} = \int \langle\nabla\phi(x'-x_ny),-y\rangle\varphi(y)\,dy &= \int \left\langle \nabla\phi(z),\frac{x'-z}{x_n}\right\rangle \varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)\frac{dz}{x_n^{n-1}}\\
= \int \langle\nabla\phi(z),x'-z\rangle\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)\frac{dz}{x_n^{n}},
\end{aligned}
$$

isso implica que

$$
\begin{aligned}
D_{nn}\tilde{\phi} &= \int \langle\nabla\phi(z),x'-z\rangle\left\langle\nabla\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right),\frac{x'-z}{-x_n^2}\right\rangle\frac{dz}{x_n^n}+\int\langle\nabla\phi(z),x'-z\rangle\varphi\left(\frac{x'-z}{x_n}\right)\frac{-n}{x_n^{n+1}}dz\\
&= \int \langle\nabla\phi(x'-x_ny),y\rangle\langle\nabla\varphi(y),y\rangle\frac{dy}{x_n}+n\int\langle\nabla\phi(x'-x_ny),y\rangle\varphi(y)\frac{dy}{x_n}\\
&= \frac{1}{x_n}\int\langle\nabla\phi(x'-x_ny),y\rangle(\langle\nabla\varphi(y),y\rangle+n\varphi(y))\,dy\\
&= \frac{1}{x_n}\int\left(\sum_{k=1}^{n-1}D_k\phi(x'-x_ny)y_k\right)\left[\left(\sum_{j=1}^{n-1}D_j\varphi(y)y_j+\varphi(y)\right)+\varphi(y)\right]dy.
\end{aligned}
$$

Como

$$
D_k\phi(x'-x_ny)y_k[D_j\varphi(y)y_j+\varphi(y)] = D_k\phi(x'-x_ny)D_j(y_ky_j\varphi(y)),
$$

segue que

$$
D_{nn}\tilde{\phi} = \frac{1}{x_n}\int\sum_{k,j=1}^{k-1}D_k\phi(x'-x_ny)D_j(y_ky_j\varphi(y))\,dy+\frac{1}{x_n}\int\sum_{k=1}^{n-1}D_k\phi(x'-x_ny)y_k\varphi(y)\,dy.
$$

Além disso, desde que

$$
\int_B D_j(y_ky_j\varphi(y)) = \int_B D_k(y_k\varphi(y)) = 0,
$$

temos

$$\begin{aligned}\int D_k\phi(x'-x_ny)y_k\varphi(y)\,dy &= -\int \phi(x'-x_ny)D_k(y_k\varphi(y))\\ &= -\int [\phi(x'-x_ny)-\phi(x')]D_k(y_k\varphi(y))\\ &= \int [D_k\phi(x'-x_ny)-D_k\phi(x')]y_k\varphi(y)\,dy.\end{aligned}$$

Segue portanto que

$$\begin{aligned}D_{nn}\tilde{\phi} &= \frac{1}{x_n}\int\sum_{k,j=1}^{k-1}[D_k\phi(x'-x_ny)-D_k\phi(x')]D_j(y_ky_j\varphi(y))\,dy+\frac{1}{x_n}\int\sum_{k=1}^{n-1}[D_k\phi(x'-x_ny)-D_k\phi(x')]y_k\varphi(y)\,dy\\ &= \frac{1}{x_n}\int\langle\nabla\phi(x'-x_ny)-\nabla\phi(x'),y\rangle(\langle\nabla\varphi(y),y\rangle+n\varphi(y))\,dy\\ &\leq \frac{1}{x_n}\int\Phi|-x_ny|^{\alpha}|y|(\langle\nabla\varphi(y),y\rangle+n\varphi(y))\,dy\\ &\leq (x_n)^{\alpha-1}\Phi\int_B|y|^{\alpha+1}(\langle\nabla\varphi(y),y\rangle+n\varphi(y))\,dy.\end{aligned}$$

□

Afim de simplificar a notação escrevemos ϕ para nos referir a sua extensão $\tilde{\phi}$, e quando dissermos que uma constante C é universal isso significa que ela depende somente dos parametros da $N-$função G, isto é g_0,δ e da dimensão do espaço no caso $\mathbb{R}^n$. Vamos demonstrar quatro proposições que dizem respeito a soluções fracas do problema 5.1. As primeira duas proposições serão primeiro demonstradas em termos das soluções de $\triangle_{g_\varepsilon}v=0$. Então usando argumentos de aproximação obtemos regularidade até a fronteira para funções $g-$harmônicas.

Proposição 5.0.1. *Seja $u\in W^{1,G}(B_R^+)\cap L^\infty(\overline{B_R^+})$ solução fraca do problema 5.1. Além disso seja u_ε solução limitada no sentido das distribuições de*

$$\triangle_{g_\varepsilon}u_\varepsilon=0 \;\; em \;\; B_R^+, \quad u_\varepsilon=\phi \;\; em \;\; B_R^0.$$

Então $u_\varepsilon\in C^{0,1}(B_{\frac{3R}{4}}^+)$ e existe uma constante universal $C>0$ que não depende de $\varepsilon>0$, tal que

$$\sup_{B_{\frac{3R}{4}}^+}G_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)\leq C\left[G_\varepsilon\left(osc_{B_R^+}u_\varepsilon/R\right)+G_\varepsilon(\Phi)\right].$$

A prova do resultado acima é feita combinando dois ingredientes, uma estimativa interior e um argumento de barreira. Para o primeiro ingrediente, a estimativa interior é feita para funções g-harmônicas.

Lema 5.0.2. *Seja u solução do problema 5.1. Então existe uma constante universal $C > 0$ tal que para todo $y \in B_R^+$ e $r > 0$ tal que $B_{2r}(y) \subset B_R^+$, tem-se*

$$G(|Du(y)|) \leq C \cdot G\left(osc_{B_r(y)} u/r\right).$$

Demonstração. Sejam $\theta \leq \sup_{B_r(y)} u$, $M_\theta = \sup_{B_r(y)}(u-\theta)$ e definimos

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } |x-y| \leq \frac{r}{2}, \\ M_\theta \left(\frac{|x-y|-\frac{r}{2}}{\frac{r}{2}}\right), \quad \text{se } \frac{r}{2} < |x-y| < r, \\ M_\theta, \quad \text{se } |x-y| \geq r, \end{cases}$$

e

$$\eta = \max\{u-\theta-\psi, 0\}.$$

Em $B_{2r}(y) \setminus B_r(y)$ temos $\psi \equiv M_\theta$, como $u-\theta \leq M_\theta$ segue que

$$\eta \equiv \max\{u-\theta-M_\theta, 0\} = 0.$$

Além disso, $|D\psi| \leq \frac{M_\theta}{r/2}$ e

$$D\eta = \begin{cases} Du - D\psi, \text{ se } \{\eta > 0\} = N^+, \\ 0, \quad \text{se } \{\eta \leq 0\}. \end{cases}$$

Pela definição de solução fraca temos

$$0 = \int_{B_{2r}(y)} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\eta \, dx = \int_{N^+} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (Du - D\psi) \, dx.$$

Usando $(\tilde{g}_3)$ e $(\tilde{g}_4)$ obtemos para $\varepsilon \in (0,1)$

$$\begin{aligned} \int_{N^+} g(|Du|)|Du| &= \int_{N^+} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\psi \, dx \\ &\leq \int_{N^+} g(|Du|)|D\psi| \, dx \\ &\leq \int_{N^+} \varepsilon \tilde{G}(g(|Du|)) + C(\varepsilon) G(|D\psi|) \, dx \\ &\leq \varepsilon g_0 \int_{N^+} G(|Du|) + C(\varepsilon) \int_{N^+} G(|D\psi|) \, dx, \end{aligned}$$

isso implica usando (g_3) que

$$(1-\varepsilon g_0) \int_{N^+} G(|Du|) \, dx \leq C(\varepsilon) \int_{N^+} G(|D\psi|) \, dx.$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2g_0}$ temos para uma constante $C = C(g_0, \delta) > 0$

$$\int_{N^+} G(|Du|)\, dx \leq C \int_{N^+} G(|D\psi|)\, dx.$$

Pelo Princípio do Máximo forte temos $u > \theta$ em $B_{r/2}(y)$, como neste conjunto temos $\eta = \max\{u - \theta, 0\}$ segue que $B_{r/2}(y) \subset N^+$, com isso obtemos

$$\int_{B_{\frac{r}{2}}(y)} G(|Du|)\, dx \leq C \int_{B_{2r}(y)} G(|D\psi|)\, dx.$$

Pela estimativa interior do gradiente em (LIEBERMAN, 1991) temos

$$\sup_{B_{\frac{r}{4}}(y)} G(|Du|) \leq C r^{-n} \int_{B_{\frac{r}{2}}(y)} G(|Du|)\, dx.$$

Combinando essas desigualdades obtemos

$$\begin{aligned} G(|Du(y)|) &\leq C r^{-n} \int_{B_{2r}(y)} G(||D\psi||_\infty)\, dx \\ &\leq C \cdot G(||D\psi||_\infty) \leq C \cdot G\left(\frac{osc_{B_{2r}} u}{r}\right). \end{aligned}$$

□

Observação 5.1. *Como* $osc\, u = osc(u + k)$ *para todo* $k \in \mathbb{R}$, *tomando*

$$k = \frac{-(\sup u + \inf u)}{2}$$

temos para $\overline{u} = u + k$

$$\sup \overline{u} = -\inf \overline{u} = \frac{1}{2} osc u.$$

Além disso, $\overline{u}$ *é solução de 5.1 com* $\overline{\phi} = \phi + k$ *no lugar de* ϕ*. Como* $Du = D\overline{u}$*, no que segue vamos considerar* $\overline{u}$ *mas ainda escrevemos* u*.*

Lema 5.0.3. *Seja* u_ε *solução limitada no sentido das distribuições de*

$$\triangle_{g_\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \;\; em \;\; B_R^+, \quad u_\varepsilon = \phi \;\; em \;\; B_R^0.$$

Então existe uma constante universal $C > 0$ *que não depende de* $\varepsilon > 0$ *tal que*

$$\sup_{B_{\frac{7R}{8}}^+} \left| \frac{u_\varepsilon - \phi}{x_n} \right| \leq C \left[osc_{B_R^+} u_\varepsilon / R + ||\phi||_{C^{1,\alpha}} \right]. \tag{5.3}$$

Demonstração. Primeiro temos $u_\varepsilon \in W^{1,G_\varepsilon}(B_1^+) \cap L^\infty(\overline{B_1^+})$, e vimos que tal equação satisfaz a condição de elipticidade:

$$\min\{1,\delta\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2.$$

Além disso vimos que $u_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(B_1^+)$, e $\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|} > \varepsilon > 0$. Desse modo definimos um operador linear a partir desta equação dado por

$$Lv(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(Du_\varepsilon(x))D_{ij}v(x), \quad \text{para } \ v \in C^2(B_R^+). \tag{5.4}$$

Logo o operador L satisfaz para

$$\Lambda(x) = \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|}, \ \ \lambda(x) = \min\{1,\delta\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|},$$

a condição

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} = \frac{\max\{1,g_0\}}{\min\{1,\delta\}} = \text{constante}.$$

Como a extensão $\tilde{\phi} \in C^2(B_R^+)$ de ϕ satisfaz

$$|\tilde{\phi}|_{1,\alpha} \leq c(n)\Phi, \ \ |D^2\tilde{\phi}| \leq c(n)\Phi(x_n)^{\alpha-1},$$

então

$$\begin{aligned}|L(u-\tilde{\phi})| = |L\tilde{\phi}| &\leq \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|}C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}}\cdot(x_n)^{\alpha-1}\\ &\leq \lambda(x)\frac{\max\{1,g_0\}}{\min\{1,\delta\}}C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}}\cdot(x_n)^{\alpha-1}.\end{aligned}$$

Denotamos

$$D := \frac{\max\{1,g_0\}}{\min\{1,\delta\}}C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}},$$

então temos em B_R^+

$$L\tilde{\phi} \geq -\lambda D(x_n)^{\alpha-1} \quad \text{e} \quad L\tilde{\phi} \leq \lambda D(x_n)^{\alpha-1}.$$

Vamos utilizar um argumento de barreira inspirado pelo que foi feito em (LIEBERMAN, 1986). Definimos a função

$$v := u_\varepsilon - \tilde{\phi} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}(x_n)^{\alpha+1}.$$

Desta forma temos em B_R^+

$$Lv \geq -L\tilde{\phi} + \lambda D(x_n)^{\alpha-1} \geq 0.$$

Tomamos como barreira a seguinte função definida em $\overline{B_r^+}$ para $r < R$ dada por

$$w = r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)\left[|x|^2 + \frac{n\Lambda}{\lambda}(rx_n - (x_n)^2)\right].$$

Então performando alguns cálculos utilizando a condição de elipticidade vemos que

$$\begin{aligned}
Lw &= \sum_{i,j} a^{ij}D_{ij}w \\
&= \sum_{i,j\neq n} a^{ij}r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)2\delta^{ij} + a^{nn}2r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)\left(1 - \frac{n\Lambda}{\lambda}\right) \\
&\leq 2(n-1)\Lambda r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right) + 2\lambda r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)\left(1 - \frac{n\Lambda}{\lambda}\right) \\
&\leq 2r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)(-\Lambda + \lambda) \\
&\leq 0.
\end{aligned}$$

□

Agora vejamos as condições de bordo. No conjunto B_r^0 temos

$$w = r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)|x'|^2 \geq 0 = v.$$

Nos pontos que satisfazem $|x| = r$ temos

$$\begin{aligned}
w &= \sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1} + r^{-2}\left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)\frac{n\Lambda}{\lambda}\underbrace{(rx_n - (x_n)^2)}_{\geq 0} \\
&\geq \sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}(x_n)^{\alpha+1} \\
&\geq u_\varepsilon - \tilde{\phi} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}(x_n)^{\alpha+1} = v.
\end{aligned}$$

Resumindo obtemos

$$\begin{cases} Lw \leq 0 \leq Lv \quad \text{em } B_r^+ \\ v \leq w \quad \text{em } \partial B_r^+. \end{cases}$$

Segue do Princípio da Comparação que $v \leq w$ em B_r^+. Em particular para $x' = 0$ e $x_n \leq \frac{r}{2}$ temos

$$u_\varepsilon - \tilde{\phi} + \underbrace{\frac{D}{\alpha(\alpha+1)}(x_n)^{\alpha+1}}_{\geq 0} \leq \left(\sup_{B_r^+}|u_\varepsilon - \tilde{\phi}| + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^{\alpha+1}\right)\left[\frac{x_n}{r} + \frac{n\Lambda}{\lambda}\frac{r}{r^2}x_n\right].$$

Então em $B^+_{\frac{r}{2}} \cap \{x' = 0\}$

$$\frac{u_\varepsilon - \tilde{\phi}}{x_n} \leq 2n\frac{\Lambda}{\lambda}\left(\sup_{B_r^+}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{r} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^\alpha\right).$$

De forma análoga tomando a função

$$v := \tilde{\phi} - u_\varepsilon + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}(x_n)^{\alpha+1},$$

vemos que

$$Lv \geq L\tilde{\phi} + \lambda D(x_n)^{\alpha-1} \geq 0.$$

Aplicando o mesmo argumento utilizando o principio da comparação com a função w obtemos

$$\frac{\tilde{\phi} - u_\varepsilon}{x_n} \leq 2n\frac{\Lambda}{\lambda}\left(\sup_{B_r^+}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{r} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^\alpha\right).$$

Assim temos no conjunto $B^+_{\frac{r}{2}} \cap \{x' = 0\}$, a seguinte estimativa

$$\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{x_n} \leq 2n\frac{\Lambda}{\lambda}\left(\sup_{B_r^+}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{r} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}r^\alpha\right).$$

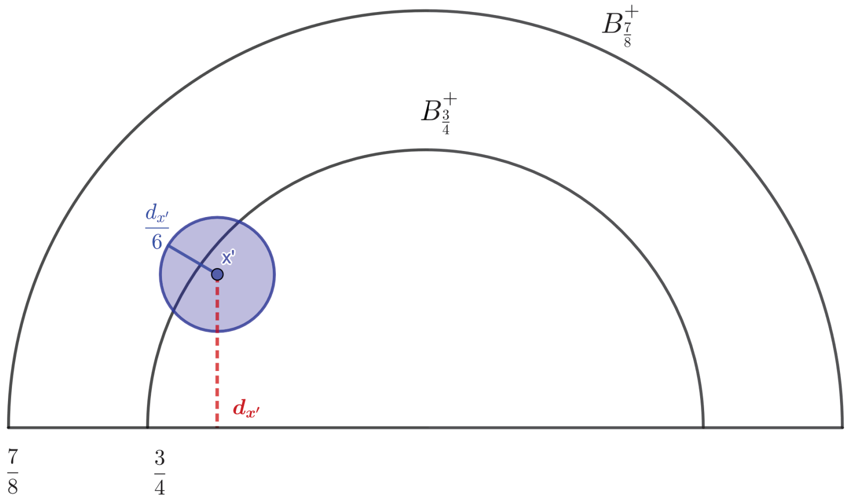
Como o mesmo raciocino feito acima é valido para qualquer semi bola B_r^+ centrada em algum ponto de B_R^0, obtemos para uma escolha adequada de r que

$$\sup_{B^+_{\frac{7R}{8}}}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{x_n} \leq C(n)\frac{\Lambda}{\lambda}\left(\sup_{B_R^+}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{R} + \frac{D}{\alpha(\alpha+1)}R^\alpha\right).$$

Portanto tendo em vista a Observação 5.1 obtemos para uma constante positiva $C = C(n, \alpha, \Lambda/\lambda) > 0$

$$\sup_{B^+_{\frac{7R}{8}}}\frac{|u_\varepsilon - \tilde{\phi}|}{x_n} \leq C\left[osc_{B_R^+}u_\varepsilon/R + (1+R^\alpha)||\phi||_{C^{1,\alpha}}\right].$$

Figura 2 – Lipschitz até a fronteira.



Fonte: Elaborado pelo autor.

5.1 Prova da Proposição 5.0.1

Agora vamos combinar os Lemas 5.0.2 e 5.0.3 para provar a estimativa da Proposição 5.0.1 para o $g_\varepsilon-$laplaciano, a saber

$$\sup_{B^+_{3R/4}} G_\varepsilon(|Du_\varepsilon|) \leq C\left[G_\varepsilon\left(osc_{B^+_R} u_\varepsilon/R\right) + G_\varepsilon(||\phi||_{C^{1,\alpha}})\right], \tag{5.5}$$

para uma constante universal $C > 0$ que não depende de $\varepsilon > 0$.

Definimos $dx = dist(x, B^0_R)$, como $\frac{1}{6}\cdot\frac{3}{4} = \frac{1}{8} = \frac{7}{8} - \frac{3}{4}$ segue que para todo $x \in B^+_{\frac{3R}{4}}$ temos

$$B_{\frac{dx}{6}}(x) \subset B^+_{\frac{7R}{8}}.$$

Sejam $x' \in B^+_{\frac{3R}{4}}, d_{x'} = dist(x', B^0_R)$ temos $\forall x \in B_{\frac{dx'}{6}}(x')$

$$\frac{5}{6}d_{x'} \leq x_n \leq d_{x'} + \frac{d_{x'}}{6} = \frac{7}{6}d_{x'}.$$

Daí segue do Lema 5.0.3 que em $B_{\frac{dx'}{6}}(x')$

$$|u_\varepsilon(x) - \phi(x)| \leq C\left(osc_{B^+_R} u_\varepsilon/R + \Phi\right)\frac{7}{6}d_{x'}.$$

Sendo $x_0 \in B^0_R$ tal que $d_{x'} = |x' - x_0|$ temos para $x \in B_{\frac{dx'}{6}}(x')$

$$|x - x_0| \leq d_{x'} + \frac{d_{x'}}{6} = \frac{7}{6}d_{x'},$$

e como ϕ é Lipschitz

$$|\phi(x) - \phi(x_0)| \leq \Phi\frac{7}{6}d_{x'}.$$

Então, para todo $x \in B_{\frac{dx'}{6}}(x')$

$$
\begin{aligned}
|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)| &\leq |u_\varepsilon(x) - \phi(x)| + |\phi(x) - \phi(x_0)| + |u_\varepsilon(x_0) - \phi(x_0)| \\
&\leq C\left(osc_{B_R^+} u_\varepsilon/R + \Phi\right)\frac{7}{6}d_{x'} + \Phi\frac{7}{6}d_{x'} \\
&= C_1\left(osc_{B_R^+} u_\varepsilon/R + \Phi\right)d_{x'}.
\end{aligned}
$$

Como para quaisquer $x, y \in B_{\frac{dx'}{6}}(x')$

$$
|u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(y)| \leq |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)| + |u_\varepsilon(x_0) - u_\varepsilon(y)|,
$$

isso implica que

$$
osc_{B_{\frac{dx'}{6}}(x')} u_\varepsilon \leq 2 \sup_{B_{\frac{dx'}{6}}(x')} |u_\varepsilon(x) - u_\varepsilon(x_0)| \leq 2C_1\left(osc_{B_R^+} u_\varepsilon/R + \Phi\right)d_{x'}.
$$

Tomando $r = \frac{d_{x'}}{6}$ no Lema 5.0.2 obtemos usando (G_2)

$$
G(|Du_\varepsilon(x')|) \leq C_2 \cdot G(osc_{B_r(x')} u_\varepsilon/r) \leq C_2C_1\left[G(osc_{B_R^+} u/R) + G(\Phi)\right],
$$

daí como $x' \in B^+_{\frac{3R}{4}}$ é arbitrário, $D\overline{u} = Du$ e $\Phi = ||\phi||_{C^{1,\alpha}}$ segue que

$$
\sup_{B^+_{\frac{3R}{4}}} G_\varepsilon(|Du_\varepsilon|) \leq C\left[G_\varepsilon(osc_{B_R^+} u_\varepsilon/R) + G_\varepsilon(||\phi||_{C^{1,\alpha}})\right].
$$

O próximo resultado é uma estimativa para soluções de $\triangle_{g_\varepsilon} v = 0$. Vale ressaltar que por um argumento de aproximação vamos obter as mesmas estimativas, tanto as que envolvem o gradiente quanto a oscilação para funções g-harmônicas.

Proposição 5.1.1. *Seja u_ε solução limitada no sentido das distribuições de*

$$
\triangle_{g_\varepsilon} u_\varepsilon = 0 \ \ em \ \ B_R^+, \quad u_\varepsilon = \phi \ \ em \ \ B_R^0.
$$

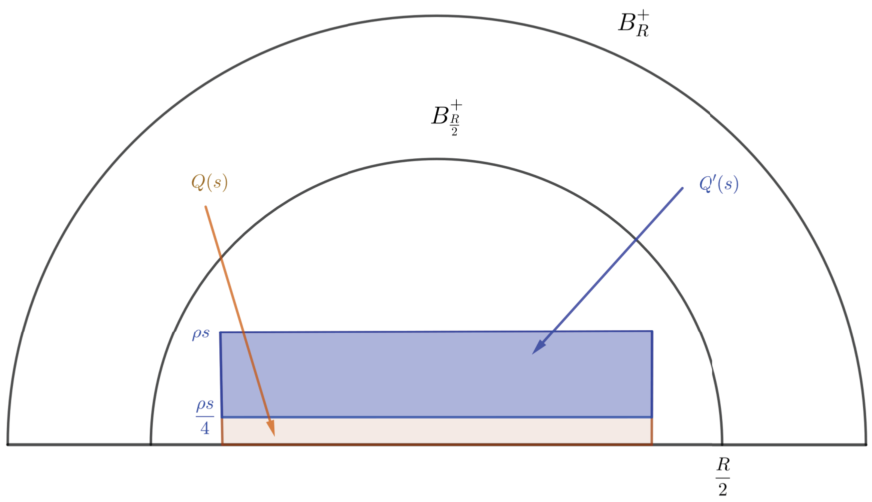
Então existem constantes universais $C, \sigma > 0$ que não dependem de $\varepsilon > 0$ tais que

$$
osc_{B_r^+}\left(\frac{u_\varepsilon - \phi}{x_n}\right) \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\sigma \left[osc_{B^+_{R/2}}\left(\frac{u_\varepsilon - \phi}{x_n}\right) + \Phi R^\sigma\right] \ \ se \ \ 0 < r < \frac{3R}{4}.
$$

Com o intuito de usar argumentos de barreira a prova é feita em cilindros ao invés de semi-bolas. Definimos os cilindro a seguir para uma constante $\rho \in (0,1)$ universal a ser escolhida no lema a seguir:

$$
Q(s) := \{x \in \mathbb{R}^n; 0 < x_n \leq \rho s, |x'| < s\},
$$

Figura 3 – Estimativa do tipo Krylov



Fonte: Elaborado pelo autor.

e

$$Q'(s) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n; \frac{\rho s}{4} \leq x_n \leq \rho s, |x'| < s \right\}.$$

A demonstração da **Proposição 5.0.2** é feita a partir de dois resultados que se encontram na seção 5 de (LIEBERMAN, 1986). Consideremos o operador linear dado por

$$L := a^{ij} D_{ij},$$

tal que para $\lambda(x), \Lambda(x) > 0$ tenhamos

$$\lambda(x)|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda(x)|\xi|^2,$$

onde $x \in B_R^+, \xi \in \mathbb{R}^n$ e $\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)}$ é constante.

Lema 5.1.1. *Seja $u \in C^2(B_R^+)$ satisfazendo com $\alpha \in (0,1)$,*

$$Lu(x) \leq \lambda(x)\Phi(x_n)^{\alpha-1} \quad em \quad B_R^+,$$

então para $s < \frac{R}{2}$

$$\inf_{Q'(2s)} \frac{u}{x_n} \leq 2 \inf_{Q(s)} \frac{u}{x_n} + 4\Phi \frac{s^\alpha}{\alpha}.$$

Demonstração. Lemma 5.1 em (LIEBERMAN, 1986). □

Lema 5.1.2. *Seja $L = a^{ij}D_{ij}$ nas mesmas hipóteses do lema anterior. Seja $u \in C^2(B_R^+)$ satisfazendo*

$$sup_{B_{\frac{7R}{8}}^+} \frac{|u(x)|}{x_n} < \infty,$$

e

$$|Lu(x)| \leq \lambda(x)\Phi(x_n)^{\alpha-1} \quad em \quad B_R^+.$$

Então existem constantes positivas universais C, β tais que para

$$0 < r < \frac{3R}{4},$$

tem-se

$$osc_{Q(r)}\frac{u}{x_n} \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^{\beta}\left(osc_{Q(3R/4)}\frac{u}{x_n} + R^{\alpha}\Phi\right).$$

Demonstração. Lema 5.2 em (LIEBERMAN, 1986). □

Para provarmos a Proposição 5.1.1 primeiro consideramos a equação $\triangle_{g_\varepsilon} v = 0$ como no capítulo 3, $u \in W^{1,G}(B_1^+) \cap L^\infty(\overline{B_1^+})$ solução fraca de 5.1, e o seguinte problema de Dirichlet:

$$\triangle_{g_\varepsilon} u_\varepsilon = div\left(\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon|)}{|Du_\varepsilon|}\right) = 0 \quad \text{em} \quad B_1^+, \quad u_\varepsilon = u \quad \text{em} \quad \partial B_1^+. \tag{5.6}$$

Então temos $u_\varepsilon \in W^{1,G_\varepsilon}(B_1^+) \cap L^\infty(\overline{B_1^+})$. Além disso vimos que tal equação satisfaz a condição de elipticidade:

$$\min\{1,\delta\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2 \leq a^{ij}\xi_i\xi_j \leq \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|}|\xi|^2.$$

Portanto $u_\varepsilon \in C^\infty_{loc}(B_1^+)$, e $\frac{g_\varepsilon(|p|)}{|p|} > \varepsilon > 0$. Desse modo definimos um operador linear para $R \in (0,1)$ a partir desta equação dado por

$$Lv(x) = \sum_{i,j} a^{ij}(Du_\varepsilon(x))D_{ij}v(x), \quad \text{para} \quad v \in C^2(B_R^+). \tag{5.7}$$

Logo o operador L satisfaz as hipóteses do Lema 5.0.5 pois neste caso temos

$$\Lambda(x) = \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|}, \ \lambda(x) = \min\{1,\delta\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|}$$

com

$$\frac{\Lambda(x)}{\lambda(x)} = \frac{\max\{1,g_0\}}{\min\{1,\delta\}} = \text{constante}.$$

Como a extensão $\tilde{\phi} \in C^2(B_R^+)$ de ϕ satisfaz

$$|\tilde{\phi}|_{1,\alpha} \leq c(n)\Phi, \ |D^2\tilde{\phi}| \leq c(n)\Phi(x_n)^{\alpha-1},$$

então

$$|L(u-\tilde{\phi})| = |L\tilde{\phi}| \leq \max\{1,g_0\}\frac{g_\varepsilon(|Du_\varepsilon(x)|)}{|Du_\varepsilon(x)|}C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}}\cdot(x_n)^{\alpha-1}$$
$$\leq \lambda(x)\frac{\max\{1,g_0\}}{\min\{1,\delta\}}C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}}\cdot(x_n)^{\alpha-1}.$$

Assim, as desigualdade acima garantem que $u_\varepsilon-\phi$ satisfazem as hipóteses do Lema 5.0.5 segue portanto que existem constantes positivas C,β que dependem somente de $n,\frac{\Lambda}{\lambda}$(e não dependem de ε) tais que

$$osc_{Q(r)}\frac{u_\varepsilon-\phi}{x_n} \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\beta\left[osc_{Q(3R/4)}\frac{u_\varepsilon-\phi}{x_n}+R^\alpha\Phi\right], \tag{5.8}$$

para todo $r\in(0,3R/4)$.

Corolário 5.1.1. *Seja u solução do problema 5.1. Então existem constantes universais $\sigma,C>0$ tais que valem as seguintes estimativas:*

$$\sup_{B^+_{3R/4}} G(|Du|) \leq C\left(osc_{B^+_R}u/R+||\phi||_{C^{1,\alpha}}\right),$$

e

$$osc_{B^+_r}\frac{u-\phi}{x_n} \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\sigma\left(osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n}+R^\sigma||\phi||_{C^{1,\alpha}}\right),\ 0<r<\frac{R}{2}.$$

Demonstração. É suficiente mostrar que existe uma sequência $\varepsilon_k\to 0$ para a qual temos

$$Du_{\varepsilon_k}\to Du \quad \text{uniformemente em} \quad B^+_{3R/4},$$

e

$$osc_{Q(r)}\frac{u_{\varepsilon_k}-\phi}{x_n}\to osc_{Q(r)}\frac{u-\phi}{x_n}.$$

Começamos relembrando que pela Proposição 5.0.1 temos

$$\sup_{B^+_{3R/4}} G_\varepsilon(|Du_\varepsilon|) \leq C\left[G_\varepsilon\left(osc_{B^+_R}u_\varepsilon/R\right)+G_\varepsilon(\Phi)\right], \tag{5.9}$$

para uma constante $C>0$ que só depende de n,g_0 e δ.

Usando a convergência $G_\varepsilon\to G$ temos que para todo $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0)$

$$\frac{1}{2}G(1)\leq G_\varepsilon(1)\leq 2G(1).$$

Daí pela propriedade (G_1) podemos trocar G_ε por G na desigualdade 5.5 pagando o preço de possivelmente aumentar o valor da constante $C > 0$, que ainda será independente de ε. Daí como já havíamos comentado o que foi feito para funções g-harmônicas, segue de 2.5 que vale

$$\sup_{B_R^+} |u_\varepsilon| \leq \sup_{\overline{B_R^+}} |u|.$$

Portanto chegamos a conclusão de que existem constantes $\varepsilon_0, C_0 > 0$ tais que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ tem-se

$$\sup_{B_R^+} |u_\varepsilon| + \sup_{B_{3R/4}^+} |Du_\varepsilon| \leq C_0.$$

Observe que a desigualdade acima implica que $u \in C^{0,1}(B_{3R/4}^+)$, pois como

$$Du_\varepsilon \to Du \quad \text{q.t.p em} \quad B_R^+,$$

segue que

$$\sup_{B_{3R/4}^+} |Du| \leq C_0 + 1.$$

Tendo em vista estimativa 5.8 precisamos mostrar que existe uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ tal que

$$\sup_{B_{3R/4}^+} \left| \frac{u_{\varepsilon_k} - u}{x_n} \right| \to 0.$$

Para isso, sendo $u_\varepsilon = u$ em B_R^0 temos

$$\sup_{B_{3R/4}^+} \left| \frac{u_{\varepsilon_k} - u}{x_n} \right| \leq [u_{\varepsilon_k} - u]_{C^{0,1}(B_{3R/4}^+)},$$

onde $||u_{\varepsilon_k} - u||_{C^{0,1}} = ||u_{\varepsilon_k} - u||_\infty + [u_{\varepsilon_k} - u]_{C^{0,1}}$ é a norma Lipschtiz.

Portanto é suficiente mostrarmos que existe uma sequência $\varepsilon_k \to 0$ tal que temos a convergência $u_{\varepsilon_k} \to u$ na norma Lipschtiz em $B_{3R/4}^+$. Uma vez que provamos a desigualdade

$$osc_{B_r^+} \frac{u_\varepsilon - \phi}{x_n} \leq C_1 \left(\frac{r}{R}\right)^\beta \left[osc_{B_{3R/4}^+} \frac{u_\varepsilon - \phi}{x_n} + R^\alpha \Phi \right],$$

e pelo Teorema 4.0.3 a estimativa interior

$$osc_{B_\rho(y)} Du_\varepsilon \leq C_2 \left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta osc_{B_r(y)} Du_\varepsilon \qquad 0 < \rho < r,$$

para constantes positivas β, C_2 que não dependem de ε. Temos para constantes $\sigma, C > 0$ que dependem somente de β, C_2 da mesma forma como foi demonstrado no Lemma 4 em (LIEBERMAN, 1988) a seguinte desigualdade,

$$osc_{B_r^+} Du_\varepsilon \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\sigma \left[\sup_{B_{3R/4}^+} |Du_\varepsilon| + \Phi R^\sigma\right] \; 0 < r < \frac{3R}{4}.$$

A desigualdade acima para oscilação nos permite concluir novamente para constantes $\sigma, C > 0$ que não dependem de ε a seguinte estimativa para norma $C^{1,\sigma}$

$$||u_\varepsilon||_{C^{1,\sigma}(\overline{B_{3R/4}^+})} \leq C \cdot \left(||Du_\varepsilon||_{L^\infty(B_{3R/4}^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_R^0)}\right). \tag{5.10}$$

Além disso também temos que existe $C_0 > 0$ tal que para todo $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$

$$||Du_\varepsilon||_{L^\infty(B_{3R/4}^+)} \leq C_0. \tag{5.11}$$

Agora consideremos o mergulho compacto

$$C^{1,\sigma}(\overline{B_{3R/4}^+}) \hookrightarrow C^{0,1}(\overline{B_{3R/4}^+}).$$

Foi visto no capítulo 2 que existe uma sequência $\varepsilon_m \to 0$ onde temos $u_{\varepsilon_m}(x) \to u(x)$ em quase todo ponto de B_R^+. Assim, nos restringindo a sequência $(u_{\varepsilon_m})_{m=1}^\infty$ usando 5.10 e 5.11 junto com o mergulho compacto temos que existe $v \in C^{0,1}(B_{3R/4}^+)$ tal que a menos de uma subsequência temos a convergência $u_{\varepsilon_m} \to v$ em norma $C^{0,1}$. Como $u \in C^{0,1}(B_{3R/4}^+)$ logo pela unicidade do limite temos $v = u$, em quase todo ponto de $B_{3R/4}^+$.

Portanto $u_{\varepsilon_m} \to u$ em norma $C^{0,1}(B_{3R/4}^+)$. Por fim, basta usar essa convergência juntamente da convergência $G_\varepsilon \to G$ em compactos na desigualdade 5.9 para concluirmos a demonstração.

$\square$

Corolário 5.1.2. *Nas hipóteses do Corolário 5.0.1 existe a derivada $D_n u(0)$.*

Demonstração. Com efeito, segue da Proposição 5.0.2 que

$$\lim_{r \to 0^+} osc_{B_r^+}\left(\frac{u - \phi}{x_n}\right) = 0.$$

Então existe o limite

$$\lim_{h \to 0+} \frac{u(he_n) - \phi(he_n)}{h},$$

como $u(0)-\phi(0)=0$, segue que existe $D_n(u-\phi)(0)$. Além disso temos por hipótese que $\phi \in C^{1,\alpha}(B_R^0)$ logo existe $D_n\phi(0)$ e o corolário fica demonstrado.

□

Uma vez que provamos a estimativa do Corolário 4.0.2 para o nosso contexto, a demonstração do próximo resultado é feita da mesma forma que o Lemma 4 em (LIEBERMAN, 1988) utilizando as proposições anteriores com o Corolário 4.0.2. Entretanto, vamos apresenta-la aqui como cortesia ao leitor.

Notação: Para $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aberto limitado, $k \in \mathbb{N}, \delta > 0$ e $\alpha \in (0,1)$ denotamos

$$[u]_{\alpha,\Omega} = \sup_{\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}},$$

$$\Omega_\delta = \{x \in \Omega; dist(x,\partial\Omega) \geq \delta\},$$

$$[u]^*_{1+\alpha,\Omega} = \sup_{\delta>0} \delta^{1+\alpha}[Du]_{\alpha,\Omega_\delta},$$

$$|Du|^{(1)}_{0,\Omega} = \sup_{\delta>0} \delta |Du|_{L^\infty(\Omega_\delta)}.$$

Seja $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ e $\mu \in (0,1/2]$. A seguinte desigualdade de interpolação é demonstrada da mesma forma que a estimativa (6.86) em (GILBARG; TRUDINGER,)

$$|Du|^{(1)}_{0,\Omega} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\mu}\cdot |u|_\infty + \frac{3}{2}\mu^\alpha [u]^*_{1+\alpha,\Omega}. \tag{5.12}$$

Proposição 5.1.2. *Seja u solução do problema 5.1, existem constantes C,σ positivas que só dependem de n,δ,g_0 e α tais que*

$$osc_{B_r^+} Du \leq C\left(\frac{r}{R}\right)^\sigma \left[\sup_{B^+_{R/2}} |Du| + \Phi R^\sigma\right] \quad 0<r<\frac{R}{2}.$$

Demonstração. Seja $y \in B^+_{R/2}$ a partir do Corolário 5.0.2 podemos definir a função

$$w = u - \phi - [D_n u(0) - D_n\phi(0)]x_n.$$

Pelo Corolário 4.0.2 temos para $0<\rho<r<y_n<1$

$$osc_{B_\rho(y)} Du \leq C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta osc_{B_r(y)} Du. \tag{5.13}$$

Afirmação 1: Para $0 < \sigma \le \min\{\alpha, \beta\}$ temos

$$osc_{B_\rho(y)} Dw \le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\sigma (osc_{B_r(y)} Dw + \Phi r^\sigma).$$

Com efeito, temos por 5.13

$$\begin{aligned} osc_{B_\rho} Dw = osc_{B_\rho}(Du - D\phi) &\le osc_{B_\rho} Du + \Phi\rho^\alpha \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta osc_{B_r(y)} Du + \Phi\rho^\alpha, \end{aligned}$$

e da mesma forma

$$\begin{aligned} osc_{B_\rho} Du = osc_{B_\rho}(Du - D\phi + D\phi) &\le osc_{B_\rho}(Du - D\phi) + osc_{B_\rho} D\phi \\ &\le osc_{B_\rho} Dw + \Phi\rho^\alpha. \end{aligned}$$

Caso: $\beta \le \alpha$.

Neste caso como

$$\left(\frac{r}{\rho}\right)^\beta \rho^\alpha \le \left(\frac{r}{\rho}\right)^\beta \rho^\beta = r^\beta,$$

segue que

$$\begin{aligned} osc_{B_\rho} Dw &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta osc_{B_r(y)} Du + \Phi\rho^\alpha \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta (osc_{B_r} Dw + \Phi r^\alpha) + \Phi\rho^\alpha \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta \left(osc_{B_r} Dw + \Phi r^\alpha + \left(\frac{r}{\rho}\right)^\beta \Phi\rho^\alpha\right) \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta \left(osc_{B_r} Dw + \Phi r^\alpha + \Phi r^\beta\right) \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta \left(osc_{B_r} Dw + 2\Phi r^\beta\right). \end{aligned}$$

Caso: $\alpha < \beta$

De forma análoga

$$\begin{aligned} osc_{B_\rho} Dw &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\beta osc_{B_r(y)} Du + \Phi\rho^\alpha \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha (osc_{B_r} Dw + \Phi r^\alpha) + \Phi\rho^\alpha \\ &\le C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha \left(osc_{B_r} Dw + \Phi r^\alpha + \left(\frac{r}{\rho}\right)^\alpha \Phi\rho^\alpha\right) \\ &= C\left(\frac{\rho}{r}\right)^\alpha (osc_{B_r} Dw + 2\Phi r^\alpha). \end{aligned}$$

Isto prova a Afirmação 1. Sejam $y \in B^+_{R/2}$ e $\Sigma := B(y, \frac{y_n}{2})$.

Afirmação 2: Existe uma constante universal $C > 0$ tal que para $0 < \sigma \leq \min\{\alpha, \beta\}$ temos

$$[w]^*_{1+\sigma,\Sigma} \leq C\left[|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} + \Phi \cdot \left(\frac{y_n}{2}\right)^{\sigma+1}\right].$$

Considere $\delta \in (0, y_n/2)$ e $x, y \in \Sigma_{\delta/2}$.

Caso: $|x-y| < \frac{\delta}{2}$.

Então tomando $\rho = |x-y|$ e $r = \frac{\delta}{2}$ na Afirmação 1 temos

$$osc_{B_\rho(y)} Dw \leq C\left[osc_{B_r(y)} Dw + \Phi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sigma}\right]\frac{|x-y|^\sigma}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sigma}}.$$

Como $\frac{y_n}{2} - \frac{\delta}{2} > \frac{\delta}{2} \Rightarrow B(y, \delta/2) \subset \Sigma_{\delta/2}$ segue que

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\delta}|Dw(x) - Dw(y)| \cdot |x-y|^{-\sigma} \leq C\left[\sup_{\Sigma_{\delta/2}}|Dw| + \Phi \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sigma}\right].$$

Caso: $|x-y| \geq \frac{\delta}{2}$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\delta}|Dw(x) - Dw(y)| \cdot |x-y|^{-\sigma} &\leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\delta}|Dw(x) - Dw(y)| \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\sigma} \\ &\leq 2\sup_{\Sigma_{\delta/2}}|Dw| \leq 2C\left[\sup_{\Sigma_{\delta/2}}|Dw| + \Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sigma}\right].\end{aligned}$$

Então qualquer que seja o caso temos

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\delta}\sup_{\Sigma_{\delta/2}}|Dw(x) - Dw(y)| \cdot |x-y|^{-\sigma} \leq 2C\left[\sup_{\Sigma_{\delta/2}}|Dw| + \Phi\left(\frac{\delta}{2}\right)^{\sigma}\right].$$

A Afirmação 2 fica provada multiplicando ambos os lados da desigualdade acima por $\delta/2$ e tomando o $\sup_{\delta>0}$.

Agora tomamos $\Omega = \Sigma$ e $u = w$ em 5.12 temos para todo $\mu \in (0, 1/2]$

$$|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\mu} \cdot |w|_{\infty,\Sigma} + \frac{3}{2}\mu^\alpha [w]^*_{1+\alpha,\Omega}.$$

Juntando isso com a Afirmação 2 obtemos

$$|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\mu} \cdot |w|_{\infty,\Sigma} + \frac{3}{2}\mu^\alpha 2C\left[|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} + \Phi\left(\frac{y_n}{2}\right)^{\sigma+1}\right].$$

isso implica que

$$(1 - 3\mu^\alpha C)|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} \leq \frac{3}{2}\frac{1}{\mu} \cdot |w|_{\infty,\Sigma} + 3\mu^\alpha C\Phi\left(\frac{y_n}{2}\right)^{\sigma+1},$$

tomando $\mu = \left(\frac{1}{6C}\right)^{1/\alpha}$ concluímos que

$$|Dw|^{(1)}_{0,\Sigma} \leq C \cdot (|w|_{\infty,\Sigma} + \Phi \cdot (y_n)^{\sigma+1}). \tag{5.14}$$

Afirmação 3: Dado $y \in B^+_{R/2}, r > 0$

$$\frac{|w(y)|}{y_n} \leq C\left(\frac{|y|}{r}\right)^{\sigma}\left[osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma}. \tag{5.15}$$

Pela Proposição 5.1.1, temos

$$\begin{aligned} osc_{B^+_{|y|}}\frac{u-\phi}{x_n} &\leq C\left[osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma}\right]\left(\frac{|y|}{R}\right)^{\sigma} \\ &= C\left(\frac{|y|}{r}\right)^{\sigma}\left[osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma}. \end{aligned}$$

Daí uma vez que para todo $\theta \in (0, |y|)$

$$\left|\frac{w(y)}{y_n} - \frac{u(\theta e_n) - \phi(\theta e_n)}{\theta} - [D_n u(0) - D_n\phi(0)]\right| = \left|\frac{w(y)}{y_n} - \frac{w(\theta e_n)}{\theta}\right| \leq osc_{B^+_{|y|}}\frac{w}{x_n},$$

e

$$\lim_{\theta\to 0+}\frac{u(\theta e_n) - \phi(\theta e_n) - (u(0) - \phi(0))}{\theta} = D_n u(0) - D_n\phi(0),$$

então fazendo $\theta \to 0^+$ obtemos

$$\frac{|w(y)|}{y_n} \leq osc_{B^+_{|y|}}\frac{w}{x_n} = osc_{B^+_{|y|}}\frac{u-\phi}{x_n} \leq C\left(\frac{|y|}{r}\right)^{\sigma}\left[osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma},$$

o que prova a desigualdade 5.15.

Como $\Sigma_{\frac{y_n}{4}} = B_{y_n/4}(y)$ e $\frac{y_n}{4} \cdot \sup_{\Sigma_{\frac{y_n}{4}}} |Dw| \leq |Dw|^{(1)}_{0,\Sigma}$, então por 5.14 temos que

$$y_n|Dw(y)| \leq 4C\left(\sup_{\Sigma}|w| + \Phi \cdot (y_n)^{\sigma+1}\right).$$

Segue da demonstração da desigualdade 5.14 que a mesma vale tomando $\Sigma = B(y, y_n/2^k)$ para todo $k \in \mathbb{N}$, onde a constante C não depende de k. Daí fazendo $k \to \infty$ na desigualdade acima e usando que w é continua vemos que

$$y_n|Dw(y)| \leq 4C\left(|w(y)| + \Phi \cdot (y_n)^{\sigma+1}\right).$$

Portanto usando a Afirmação 3 nisso obtemos

$$\begin{aligned} y_n|Dw(y)| &\leq 4C\left(|w(y)| + \Phi(y_n)^{\sigma+1}\right) \\ &\leq 4C\left(C_2\left(\frac{|y|}{r}\right)^{\sigma} y_n\left[osc_{B^+_{R/2}}\frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma}\right]\left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} + \Phi(y_n)^{\sigma+1}\right), \end{aligned}$$

o que implica que

$$|Dw(y)| \leq 4C_1 \left(C_2 \left(\frac{|y|}{r} \right)^{\sigma} \left[osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma} + \Phi (y_n)^{\sigma} \right).$$

Como a desigualdade acima vale para qualquer $y \in B^+_{R/2}$, tomando o supremo sobre B^+_r para $r < R/2$ obtemos

$$\begin{aligned} \sup_{B^+_r} |Dw| &\leq 4C_1 \left(C_2 \left[osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} + \Phi R^{\sigma} \right] \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma} + \Phi r^{\sigma} \right) \\ &\leq C \left(osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} + 2\Phi R^{\sigma} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma}, \end{aligned}$$

pois $\left(\frac{R}{r}\right)^{\sigma} r^{\sigma} \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} = R^{\sigma} \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma}$. Uma vez que

$$osc_{B^+_r} Du \leq osc_{B^+_r} Dw + \Phi r^{\alpha},$$

obtemos (pois $r < 1$)

$$\begin{aligned} osc_{B^+_r} Du &\leq C \left(osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} + 2\Phi R^{\sigma} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma} + \Phi r^{\alpha} \\ &\leq C \left(osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} + 3\Phi R^{\sigma} \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma}, \end{aligned}$$

para todo $0 < r < R/2$.

Por fim, como a função $u - \phi$ se anula em B^0_R temos pelas desigualdades do valor médio e triangular que

$$osc_{B^+_{R/2}} \frac{u-\phi}{x_n} \leq 2 \sup_{B^+_{R/2}} |Du - D\phi| \leq 2 \sup_{B^+_{R/2}} |Du| + 2\Phi R^{\alpha}.$$

Então concluímos que para $0 < r < R/2$

$$osc_{B^+_r} Du \leq C \left(2 \sup_{B^+_{R/2}} |Du| + 5\Phi R^{\sigma} \right) \cdot \left(\frac{r}{R} \right)^{\sigma}.$$

□

Agora suponha que $u \in W^{1,G}(B^+_1)$ é solução fraca e limitada do seguinte problema de Dirichlet:

$$\triangle_g u = f \quad \text{em} \quad B^+_1 \quad \text{e} \quad u = \phi \quad \text{em} \quad B^0_1.$$

Sejam $R \in (0,1)$ e $v \in W^{1,G}(B^+_R) \cap L^{\infty}(\overline{B^+_R})$ solução no sentido das distribuições de

$$\begin{cases} \triangle_g v = 0 \quad \text{em} \quad B^+_R \\ v = u \quad \text{em} \quad \partial B^+_R. \end{cases} \tag{5.16}$$

Proposição 5.1.3. *A função v solução de 5.16 satisfaz as seguintes estimativas para uma constante $C = C(n,\delta,g_0) > 0$:*

$$osc_{B_r^+} Dv \leq \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[\sup_{B_{R/2}^+} |Dv| + \Phi R^{\sigma}\right] \quad 0 < r < \frac{R}{2}, \tag{5.17}$$

$$sup_{B_{R/2}^+} G(|Dv|) \leq C\left[R^{-n}\int_{B_R^+} G(|Dv|)\,dx + G(\Phi)\right], \tag{5.18}$$

$$\int_{B_R^+} G(|Dv|)\,dx \leq C\int_{B_R^+} G(|Du|)\,dx. \tag{5.19}$$

Demonstração. A estimativa 5.17 é simplismente a Proposição 5.0.3. Para provarmos 5.19 vamos considerar a função teste $\eta = u - v \in W_0^{1,G}(B_R^+)$, e usando a definição de solução fraca temos:

$$\int_{B_R^+} g(|Dv|)|Dv| = \int_{B_R^+} \frac{g(|Dv|)}{|Dv|} Dv \cdot Du. \tag{5.20}$$

Definimos o conjunto $\Sigma := \{|Dv| \geq 2|Du|\}$, então em Σ temos

$$\frac{g(|Dv|)}{|Dv|}|Dv\cdot Du| \leq \frac{g(|Dv|)}{|Dv|}|Dv||Du| \leq \frac{1}{2}g(|Dv|)|Dv|,$$

enquanto fora de Σ temos as estimativas

$$\begin{aligned}\frac{g(|Dv|)}{|Dv|}|Dv\cdot Du| &\leq \frac{g(|Dv|)}{|Dv|}|Dv||Du| \\ &\leq g(2|Du|)|Du| \leq c(n,\delta,g_0)g(|Du|)|Du|.\end{aligned}$$

A partir dessas estimativas obtemos:

$$\begin{aligned}\int_{B_R^+} \frac{g(|Dv|)}{|Dv|} Dv\cdot Du &= \int_{\Sigma} \frac{g(|Dv|)}{|Dv|} Dv\cdot Du + \int_{\Sigma^c} \frac{g(|Dv|)}{|Dv|} Dv\cdot Du \\ &\leq \int_{\Sigma} \frac{1}{2} g(|Dv|)|Dv| + c(n,\delta,g_0)\int_{\Sigma^c} g(|Du|)|Du|.\end{aligned}$$

Daí, juntando essa estimativa com 5.20 obtemos:

$$\frac{1}{2}\int_{B_R^+} g(|Dv|)|Dv|\,dx \leq C(n,\delta,g_0)\int_{B_R^+} g(|Du|)|Du|\,dx.$$

Assim, temos que 5.19 é obtida a partir desta desigualdade usando (g_3).

Por fim vamos provar que vale a estimativa 5.18. Definimos as funções auxiliares:

$$v^+ = \max\{v - \sup\phi, 0\} \quad \text{e} \quad v^- = \max\{-(v - \inf\phi), 0\}.$$

Note que na Proposição 5.0.1 pela arbitrariedade da semi-bola tomada podemos concluir que $v \in C^{0,1}(B_R^+)$. Em particular, v é contínua até B_R^0.

Daí temos que $v^\pm = 0$ continuamente em B_R^0, estendendo essas funções para zero em B_R^- e aplicando o Lema de extensão (Lema 2.2.2) vemos que $v^\pm$ é subsolução de $\triangle_g v = 0$ em B_R. Então pelo Princípio do Máxmimo Local, Theorem 1.2 em (LIEBERMAN, 1991) e usando que $v^\pm = 0$ em B_R^- temos para uma constante $C = C(n, \delta, g_0, g(1)) > 0$

$$\sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^+ \leq C\left[R^{-n}\int_{B_R^+} |v^+|\,dx + R\right],$$

e

$$\sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^- \leq C\left[R^{-n}\int_{B_R^+} |v^-|\,dx + R\right].$$

Por outro lado, para quaisquer $x, y \in B^+_{\frac{2R}{3}}$ temos

$$v(x) - \sup_{B_R^0}\phi \leq \sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^+ \quad \text{e} \quad \inf_{B_R^0}\phi - v(y) \leq \sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^-,$$

isso implica que

$$osc_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v \leq \sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^+ + \sup_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v^- + osc_{B_R^0}\phi.$$

Assim lembrando que $osc_{B_R^0}\phi \leq \Phi R$ obtemos

$$osc_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v \leq C\left[R^{-n}\int_{B_R^+} |v^+| + R^{-n}\int_{B_R^+} |v^-| + (1+\Phi)R\right].$$

Como havíamos comentado no início, temos que a extensão de $v^\pm$ para zero em B_R^- em particular pertence a $W^{1,G}_{loc}(B_R)$, daí aplicando o Lema 2.1.5 com $p = 1$ temos:

$$\int_{B_R^+} |v^\pm|\,dx \leq CR\int_{B_R^+} |Dv|\,dx.$$

Logo juntando essas duas estimativas obtemos

$$osc_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v \leq C\left[R\left(R^{-n}\int_{B_R^+} |Dv|\,dx\right) + (1+\Phi)R\right],$$

como G é convexa temos pela desigualdade de Jensen

$$G(osc_{B^+_{\frac{2R}{3}}} v/R) \leq C\left[R^{-n}\int_{B^+_R} G(|Dv|)\,dx + G((1+\Phi))\right].$$

Portanto segue aplicando a Proposição 5.0.1 em $B_{\frac{3}{4}\left(\frac{2R}{3}\right)} = B^+_{\frac{R}{2}}$ junto da desigualdade anterior para obtermos

$$\sup_{B^+_{\frac{R}{2}}} G(|Dv|) \leq C\left[R^{-n}\int_{B^+_R} G(|Dv|)\,dx + G(\Phi)\right].$$

$\square$

6 O RESULTADO PRINCIPAL

Agora vamos considerar o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} \triangle_g u = f & \text{em} \quad B_1^+ \\ u = \phi & \text{em} \quad B_1^0, \end{cases} \tag{6.1}$$

onde $f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e $\phi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$.

Proposição 6.0.1. *Seja $u \in W^{1,G}(B_1^+) \cap L^\infty(B_1^+)$ solução no sentido das distribuições do problema de Dirichlet 6.1, então existe uma constante $C = C(n, g_0, \delta, G(1)) > 0$ tal que*

$$\int_{B_{3/4}^+} G(|Du|)\, dx \leq C \cdot (||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + 1)^{g_0+1}(1 + ||f||_{L^q(B_1^+)}).$$

Demonstração. A prova base-a se nas ideias presentes em (SIMON, 1976), consideramos $\tilde{\phi}$ a extensão de ϕ como no Lema 5.0.1 a uma função em $C^2(B_{7/8}^+)$ que satisfaz

$$||\tilde{\phi}||_{C^{1,\alpha}} \leq C(n)||\phi||_{C^{1,\alpha}}.$$

Sejam $M = \sup_{B_{7/8}^+} |u - \phi|$ e para $x_0 \in \{x_n = 0\}$ o centro da semi-bola

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, \text{ se} |x - x_0| \leq \frac{3}{4}, \\ M \left(\frac{|x-x_0| - \frac{3}{4}}{\frac{1}{8}} \right), \quad \text{se } \frac{3}{4} < |x - x_0| < \frac{7}{8}, \\ M, \quad \text{se } |x - x_0| \geq \frac{7}{8}, \end{cases}$$

definimos a função contínua $\eta = \max\{u - \phi - \psi, 0\}$ como no Lemma 3 em (SIMON, 1976). Assim $\eta \in W^{1,G}(B_{7/8}^+), \eta \leq M$ e $\eta = 0$ em $\partial B_{7/8}^+$. Com efeito, em $\{x_n = 0\}$ temos $u = \phi$ então $\eta = \max\{-\psi, 0\} = 0$, e em $|x - x_0| = \frac{7}{8}$ temos $\psi = M$, como $u - \phi \leq M$ segue que $\eta = 0$. Então sendo solução fraca temos

$$\int_{B_{7/8}^+ \cap \{u-\phi>0\}} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\eta = -\int_{B_{7/8}^+ \cap \{u-\phi>0\}} f \cdot \eta\, dx.$$

Procedemos da mesma forma que no Lema 5.0.2 temos:

$$\int_{B_{7/8}^+ \cap \{u-\phi>0\}} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot D\eta = \int_{\{\eta>0\}} g(|Du|)|Du| - \int_{\{\eta>0\}} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (D\phi + D\psi),$$

além disso,

$$\begin{aligned} \int_{\{\eta>0\}} \frac{g(|Du|)}{|Du|} Du \cdot (D\phi + D\psi) &\leq \int_{\{\eta>0\}} \varepsilon \tilde{G}(g(|Du|)) + \int_{\{\eta>0\}} C(\varepsilon) G(|D\phi| + |D\psi|) \\ &\leq \varepsilon g_0 \int_{\{\eta>0\}} G(|Du|) + C(\varepsilon) \int_{\{\eta>0\}} G(|D\phi| + |D\psi|). \end{aligned}$$

Tomando $\varepsilon = \frac{1}{2g_0}$ obtemos

$$\int_{\{\eta>0\}} G(|Du|) \leq \int_{B^+_{7/8}\cap\{u-\phi>0\}} |f|\cdot\eta\, dx + C\int_{\{\eta>0\}} G(|D\phi|+|D\psi|).$$

Sendo $||D\phi||_{L^\infty} \leq ||\phi||_{C^{1,\alpha}}$ e $||D\psi||_{L^\infty} \leq 8M$, como $B^+_{3/4}\cap\{u-\phi>0\} \subset \{\eta>0\}$ vemos que usando (G_1)

$$\int_{B^+_{3/4}\cap\{u-\phi>0\}} G(|Du|) \leq C\cdot(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}}+1)^{g_0+1}(1+||f||_{L^q(B_1^+)}).$$

Em particular para todo $k\in\mathbb{N}$

$$\int_{B^+_{3/4}\cap\{u-\phi>\frac{1}{k}\}} G(|Du|) \leq C\cdot(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}}+1)^{g_0+1}(1+||f||_{L^q(B_1^+)}),$$

e pelo Lema de Fatou concluímos que

$$\int_{B^+_{3/4}\cap\{u-\phi\geq 0\}} G(|Du|) \leq C\cdot(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}}+1)^{g_0+1}(1+||f||_{L^q(B_1^+)}).$$

Por fim, considerando agora a função teste $\eta = \max\{\phi-u-\psi,0\}$ no conjunto $B^+_{7/8}\cap\{u-\phi<0\}$ obtemos procedendo da mesma forma como acima

$$\int_{B^+_{3/4}\cap\{u-\phi<0\}} G(|Du|) \leq C\cdot(||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}}+1)^{g_0+1}(1+||f||_{L^q(B_1^+)}).$$

Somando as duas ultimas desigualdades fica provada a Proposição.

□

Finalmente provaremos o principal resultado deste trabalho de tese.

Teorema 6.0.2. *Seja $u\in W^{1,G}(B_1^+)\cap L^\infty(B_1^+)$ solução no sentido das distribuições de 6.1. Então existem constantes μ, C positivas que só dependem possivelmente de n, $G(1)$, δ, g_0 para as quais temos $Du\in C^{0,\mu}(\overline{B^+_{1/2}})$ com a estimativa*

$$[Du]_{C^{0,\mu}(B^+_{1/2})} \leq C\cdot\left[||u||_{L^\infty(B_1^+)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}\right],$$

onde usamos a notação para a seminorma Holder

$$[f]_{C^{0,\alpha}} = \sup_{x\neq y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}.$$

Demonstração. Tendo em vista a Observação 2.5 temos que a menos de um escalonamento adequado é suficiente supormos que

$$\max\{||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}, ||u||_{L^\infty(B_1^+)}, ||f||_{L^q(B_1^+)}\} \leq 1,$$

e provarmos que existem constantes $\mu, C > 0$ que só dependem de n, δ, g_0 e $G(1)$ tais que

$$[Du]_{C^{0,\mu}(B^+_{1/2})} \leq C.$$

Com efeito, tomando $K = ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + g^{-1}(||f||_{L^q}) + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}$ na Observação 2.5 obtemos uma equação escalonada

$$\triangle_{g_K} u_K = f_K \quad \text{em} \quad B_1^+ \quad \text{e} \quad u_K = \phi_K \quad \text{em} \quad B_1^0,$$

onde $\phi_K(x) = \frac{\phi(x)}{K}$, pelas definições de g_K, f_K e $K > 0$ vemos que por g ser uma função não decrescente temos $||f||_{L^q} < g(K)$ o que implica $||f_K||_{L^q} \leq 1$. Além disso $||u_K||_{L^\infty} \leq 1$.

Por fim $||\phi_K||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} \leq 1$, e G_K tem a mesma regularidade de G satisfazendo as condições (CP) e (CQ) com as mesmas constantes δ, g_0, obtemos

$$[Du_K]_{C^{0,\mu}(B^+_{1/2})} \leq C,$$

o que pela definição de u_K na Observação 6.1 nos dá o que desejávamos.

A prova é baseada nas demonstrações dos Teorema 1.7 em (LIEBERMAN, 1991) e Teorema 1 em (LIEBERMAN, 1988) . Assim seja $v \in W^{1,G}(B_R^+) \cap L^\infty(\overline{B_R^+})$ para um $R \in (0,1)$ fixado, uma solução fraca de

$$\triangle_g v = 0 \quad \text{em} \quad B_R^+, \quad v = u \quad \text{em} \quad \partial B_R^+.$$

Observação : O principio do máximo nos diz que v atinge seu máximo e mínimo em ∂B_R^+, como $u = v$ em ∂B_R^+ segue que

$$\begin{aligned} u(x) - v(x) &\leq \sup_{\overline{B_R^+}} u - \inf_{\overline{B_R^+}} v = \sup_{\overline{B_R^+}} u - \inf_{\partial B_R^+} v \\ &= \sup_{\overline{B_R^+}} u - \inf_{\partial B_R^+} u \leq \sup_{\overline{B_R^+}} u - \inf_{\overline{B_R^+}} u, \end{aligned}$$

analogamente,

$$\begin{aligned} v(x) - u(x) &\leq \sup_{\overline{B_R^+}} v - \inf_{\overline{B_R^+}} u = \sup_{\partial B_R^+} u - \inf_{\overline{B_R^+}} u \\ &\leq \sup_{\overline{B_R^+}} u - \inf_{\overline{B_R^+}} u. \end{aligned}$$

Portanto temos a estimativa

$$\sup_{B_R^+} |u - v| \leq osc_{B_R^+} u \leq 2||u||_{L^\infty(B_1^+)}.$$

Usando $u-v\in W_0^{1,G}(B_R^+)$ como função teste da mesma forma que na demostração do Theorem 1 em (LIEBERMAN, 1988) temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B_R^+}\left[\frac{g(|Du|)}{|Du|}Du-\frac{g(|Dv|)}{|Dv|}Dv\right]\cdot[Du-Dv]\,dx\\
&= \int_{B_R^+}\frac{g(|Du|)}{|Du|}Du\cdot[Du-Dv]-\underbrace{\int_{B_R^+}\frac{g(|Dv|)}{|Dv|}Dv\cdot[Du-Dv]}_{=0}\\
&= -\int_{B_R^+}f(x)(u(x)-v(x))\,dx.
\end{aligned}
$$

Agora utilizaremos ideias presentes em (ZHENG; TAVARES, 2022) para majorar I com o auxílio do Teorema do mergulho de Sobolev que se encontra no capítulo 5 de (EVANS,).

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{B_R^+}f(x)(u(x)-v(x))\,dx\right| &\le \left(\int_{B_R^+}|f|^n\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_{B_R^+}|u-v|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\\
&\le |B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\left(\int_{B_R^+}|f|^q\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int_{B_R^+}|u-v|^{\frac{n}{n-1}}\right)^{\frac{n-1}{n}}\\
&\le C(n)|B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}||f||_q\int_{B_R^+}|D(u-v)|\\
&\le C(n)|B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}||f||_q\left[\int_{B_R^+}G(|Du-Dv|)+|B_R^+|\right]\\
&\le C\cdot|B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\int_{B_R^+}G(|Du-Dv|)+C\cdot|B_R^+|^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}},
\end{aligned}
$$

para $C=C(n,G(1))>0$, onde usamos que $||f||_q\le 1$.

Por outro lado, denotando $F(t)=\frac{g(t)}{t}$ temos

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{B_R^+}\int_0^1 a^{ij}(Du+(1-t)(Dv-Du))(D_ju-D_jv)(D_iu-D_iv)\\
&\ge \int_{B_R^+}\int_0^1 F(|Du+(1-t)(Du-Dv)|)|Du-Dv|^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Definindo os conjuntos

$$
S_1=\{|Du-Dv|\le 2|Du|\},\quad S_2=\{|Du-Dv|>2|Du|\}
$$

temos $B_R^+=S_1\cup S_2$, além disso temos:

(i) $\frac{1}{2}|Du|\le|Du+(1-t)(Du-Dv)|\le 3|Du|$ em S_1 para $t\ge 3/4$,

(ii) $\frac{1}{4}|Du-Dv|\le|Du+(1-t)(Du-Dv)|\le 3|Du-Dv|$ em S_2 para $t\le 1/4$.

Daí por (i) e (g_1) vemos que em S_1 para todo $t\ge 3/4$

$$
F(|Du+(1-t)(Du-Dv)|)\ge\frac{g(\frac{1}{2}|Du|)}{3|Du|}\ge\frac{1}{2^{g_0}3}F(|Du|).
$$

Enquanto que em S_2 para todo $t \leq 1/4$ usando (ii)

$$\begin{aligned} F(|Du+(1-t)(Du-Dv)|)|Du-Dv|^2 &\geq \frac{g(\frac{1}{4}|Dv-Du|)|Du-Dv|}{3} \\ &\geq \frac{G(|Du-Dv|)}{4^{g_0}3}. \end{aligned}$$

Portanto combinando essas desigualdades vemos que existe uma constante positiva $C = C(g_0, n)$ tal que

$$I \geq C\left[\int_{S_1} F(|Du|)|Du-Dv|^2 + \int_{S_2} G(|Du-Dv|)\right]. \tag{6.2}$$

Usando a estimativa 5.19 vemos que

$$\int_{B_R^+} G(|Du-Dv|) \leq C(g_0)\left[\int_{B_R^+} G(|Du|) + \int_{B_R^+} G(|Dv|)\right] \leq 2C(g_0)\int_{B_R^+} G(|Du|),$$

e obtemos usando que $||f||_{L^q} \leq 1$, uma constante $C = C(n, g_0, G(1)) > 0$ tal que no conjunto S_2 tem-se

$$\int_{S_2} G(|Du-Dv|) \leq C(n, g_0)\left[|B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\int_{B_R^+} G(|Du|) + |B_R^+|^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right].$$

No conjunto S_1 temos por (g_1) usando que g é crescente

$$F(|Du-Dv|)|Du-Dv| \leq CF(|Du|)|Du|.$$

Usando as desigualdades de Hölder e Young temos:

$$\begin{aligned} \int_{S_1} G(|Du-Dv|) &\leq \int_{S_1} [F(|Du-Dv|)|Du-Dv|]^{1/2} F(|Du-Dv|)^{1/2}|Du-Dv|^{3/2} \\ &\leq C\int_{S_1} [F(|Du|)|Du|]^{1/2} F(|Du-Dv|)^{1/2}|Du-Dv|^{3/2} \\ &\leq C\left(\int_{S_1} F(|Du|)|Du-Dv|^2\right)^{1/2}\left(\int_{S_1} F(|Du-Dv|)|Du-Dv||Du|\right)^{1/2} \\ &\leq C\left(\int_{S_1} F(|Du|)|Du-Dv|^2\right)^{1/2}\left(\int_{S_1} g(|Du|)|Du|\right)^{1/2} \\ &\leq C\cdot I^{1/2}\left(\int_{S_1} G(|Du|)\right)^{1/2} \\ &\leq C\left[C\cdot|B_R^+|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\int_{B_R^+} G(|Du-Dv|) + C\cdot|B_R^+|^{1+\frac{1}{n}-\frac{1}{q}}\right]^{1/2}\left[\int_{B_R^+} G(|Du|)\right]^{1/2} \\ &\leq C\cdot\left[|B_R^+|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_{B_R^+} G(|Du|)\right)^{1/2} + |B_R^+|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\right]\left[\int_{B_R^+} G(|Du|)\right]^{1/2} \\ &\leq C\left[|B_R^+|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\int_{B_R^+} G(|Du|) + |B_R^+|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\cdot|B_R^+|^{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\left(\int_{B_R^+} G(|Du|)\right)^{1/2}\right] \\ &\leq C\cdot\left[2|B_R^+|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\int_{B_R^+} G(|Du|) + |B_R^+|^{1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)}\right]. \end{aligned}$$

Portanto juntando as estimativas em S_1 e S_2 lembrando que $S_1 \cup S_2 = B_R^+$ temos para uma constante $C > 0$ que depende somente de $n, g_0, G(1)$ a seguinte desigualdade:

$$\int_{B_R^+} G(|Du - Dv|) \leq C \cdot \left[\left(|B_R^+|^{\frac{1}{n} - \frac{1}{q}} + |B_R^+|^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right) \int_{B_R^+} G(|Du|) + |B_R^+|^{1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{q}} + |B_R^+|^{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right].$$

Sendo $|B_R^+| = |B_1^+| \cdot R^n$ com $R \in (0,1)$ a desigualdade acima implica na seguinte

$$\int_{B_R^+} G(|Du - Dv|) \leq C \cdot \left[R^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \int_{B_R^+} G(|Du|) + R^{n + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right]. \tag{6.3}$$

Afirmação 6.0.1. *Existe uma constante* $C = C(n, g_0, \delta) > 0$ *tal que para todo* $0 < r < R$ *tem-se*

$$\int_{B_r^+} G(|Dv|) \leq C \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n \int_{B_R^+} G(|Dv|) + r^n G(\Phi) \right].$$

Para $0 < r < R/2$ usando a estimativa 5.19 temos

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+} G(|Dv|) &\leq r^n \sup_{B_r^+} G(|Dv|) \\ &\leq r^n \sup_{B_{R/2}^+} G(|Dv|) \\ &\leq C \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n \int_{B_R^+} G(|Dv|) + r^n G(\Phi) \right]. \end{aligned}$$

Quanto ao caso em que $\frac{R}{2} \leq r \leq R$ temos a desigualdade óbvia

$$\int_{B_r^+} G(|Dv|) \leq 2^n \left(\frac{r}{R} \right)^n \int_{B_R^+} G(|Dv|).$$

Isto prova a Afirmação 6.0.1.

Como $G(|Du|) \leq C(G(|Dv|) + G(|Du - Dv|))$, e $\Phi \leq ||\phi||_{C^{1,\alpha}} \leq 1$ retiramos a dependência de Φ da constante $C > 0$ obtendo para todo $0 < r < R$

$$\begin{aligned} \int_{B_r^+} G(|Du|) &\leq C(g_0) \left[\int_{B_r^+} G(|Dv|) + \int_{B_r^+} G(|Du - Dv|) \right] \\ &\leq C \left[\left(\frac{r}{R} \right)^n \int_{B_R^+} G(|Dv|) + G(1) R^n + R^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \int_{B_R^+} G(|Du|) + R^{n + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right] \\ &\leq C \cdot \left[\left\{ \left(\frac{r}{R} \right)^n + R^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right\} \int_{B_R^+} G(|Du|) + R^n \right]. \end{aligned}$$

Agora aplicando o Lemma 2.7 em (LEITÃO *et al.*, 2015) com $w(r) = \int_{B_r^+} G(|Du|)$, $\alpha = n$ e $\beta = \lambda \in (0, n)$ temos para todo $\lambda \in (0, n)$, uma nova constante que vai depender de $\lambda, g_0, \delta, G(1)$ e pela Proposição 6.0.1 não depende de $w(3/4)$, de modo que

$$\int_{B_r^+} G(|Du|)\, dx \leq C(\lambda) r^{\lambda}, \quad \forall r \in (0, 3/4).$$

Fazendo $\lambda = h - 1 + n$, para todo $h \in (0,1)$ temos

$$\int_{B_r^+} G(|Du|)\,dx \leq C(h) r^{h-1+n} \quad \forall r \in (0, 3/4). \tag{6.4}$$

Daí obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_R^+} G(|Du - Dv|) &\leq C \cdot \left[R^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \int_{B_R^+} G(|Du|) + R^{n + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right] \\ &\leq C \left[R^{\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \cdot R^{n+h-1} + R^{n + \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right)} \right].\end{aligned}$$

Assim denotando $\theta = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{q}\right) \in (0,1)$ e pedindo que $h \in (1-\theta, 1)$ chegamos na seguinte estimativa:

$$\int_{B_R^+} G(|Du - Dv|)\,dx \leq C(h) R^{n+\theta+h-1}. \tag{6.5}$$

Logo queremos $h \in (0,1)$ de modo que $\theta + h - 1 > 0$. Esta é a primeira restrição para h.

Agora temos usando desigualdade triangular

$$G(|Du - (Du)_r|) \leq C(g_0)[G(|Du - Dv|) + G(|(Dv)_r - (Du)_r|) + G(|Dv - (Dv)_r|)],$$

como

$$G(|(Dv)_r - (Du)_r|) \leq r^{-n} \int_{B_r^+} G(|Du - Dv|),$$

segue que

$$\int_{B_r^+} G(|Du - (Du)_r|) \leq C(g_0) \left[2 \int_{B_r^+} G(|Du - Dv|) + \int_{B_r^+} G(|Dv - (Dv)_r|) \right].$$

Para o segundo termo do lado direito da desigualdade acima temos:

$$\begin{aligned}\int_{B_r^+} G(|Dv - (Dv)_r|) &\leq \int_{B_r^+} G\left(r^{-n} \int_{B_r^+} |Dv(x) - Dv(y)|\,dy \right) dx \\ &\leq \int_{B_r^+} G\left(r^{-n} \int_{B_r^+} osc_{B_r^+} |Dv| \right) dx \\ &= r^n G\left(osc_{B_r^+} |Dv| \right).\end{aligned}$$

Afirmação 6.0.2.

$$G\left(\sup_{B_{R/2}^+} |Dv| \right) \leq \sup_{B_{R/2}^+} G(|Dv|).$$

Seja $(x_n) \in B^+_{R/2}$ tal que

$$|Dv(x_n)| \to \sup_{B^+_{R/2}} |Dv|,$$

pela continuidade de G temos:

$$G(|Dv(x_n)|) \to G\left(\sup_{B^+_{R/2}} |Dv|\right).$$

Suponha por contradição que vale

$$\sup_{B^+_{R/2}} G(|Dv|) < G\left(\sup_{B^+_{R/2}} |Dv|\right),$$

então existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sup_{B^+_{R/2}} G(|Dv|) < G(|Dv(x_{n_1})|) \leq G\left(\sup_{B^+_{R/2}} |Dv|\right).$$

Porém $x_{n_1} \in B^+_{R/2}$ e por definição de supremo teriamos

$$G(|Dv(x_{n_1})|) \leq \sup_{B^+_{R/2}} G(|Dv|).$$

Assim chegamos a um absurdo e fica provado a Afirmação 6.0.2.

Para $0 < r \leq R/2$ usando as desigualdade 5.17, 5.18 e 5.19, juntamente da Afirmação 6.0.2 temos as estimativas:

$$\begin{aligned}
G\left(osc_{B^+_r}|Dv|\right) &\leq C(\delta^{-1}) \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[G\left(\sup_{B^+_{R/2}} |Dv|\right) + G(\Phi)R^{\sigma}\right] \\
&\leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[\sup_{B^+_{R/2}} G(|Dv|) + G(\Phi)R^{\sigma}\right] \\
&\leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[R^{-n} \int_{B^+_R} G(|Dv|) + G(\Phi) + G(\Phi)R^{\sigma}\right] \\
&\leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[R^{-n} \int_{B^+_R} G(|Du|) + (1+R^{\sigma})G(\Phi)\right],
\end{aligned}$$

Daí pela desigualdade 6.4 vemos que

$$\begin{aligned}
G\left(osc_{B^+_r}|Dv|\right) &\leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[R^{h-1} + (1+R^{\sigma})G(\Phi)\right] \\
&\leq C \cdot \left(\frac{r}{R}\right)^{\sigma} \left[R^{h-1} + R^{h-1}G(\Phi)\right],
\end{aligned}$$

isto é para uma constante $C = C(n, G(1), \delta, g_0) > 0$ que não depende de Φ pois no nosso caso $\Phi \leq ||\phi||_{C^{1,\alpha}} \leq 1$, obtemos

$$G\left(osc_{B_r^+}|Dv|\right) \leq Cr^{\sigma}R^{h-1-\sigma}.$$

Substituindo essa estimativa juntamente com 6.5 temos:

$$\begin{aligned}\int_{B_r^+} G(|Du-(Du)_r|) &\leq C(g_0)\left[2\int_{B_r^+} G(|Du-Dv|) + r^n G\left(osc_{B_r^+}|Dv|\right)\right]\\ &\leq C\left[R^{n+\theta+h-1} + r^{n+\sigma}R^{h-1-\sigma}\right].\end{aligned}$$

Para $R = r^s$ vemos que

$$\int_{B_r^+} G(|Du-(Du)_r|) \leq C\left[r^{s(n+\theta+h-1)} + r^{n+\sigma+s(h-1-\sigma)}\right].$$

Assim queremos que $s > 0$ satisfaça as seguintes condições:

1. $\sigma + s(h-1-\sigma) > 0 \Rightarrow s < \frac{\sigma}{1-h+\sigma}$.
2. $s(n+\theta+h-1) > n \Rightarrow s > \frac{n}{n+\theta+h-1}$.

Então pedimos que $h \in (1-\theta, 1)$ seja tal que

$$\frac{n}{n+\theta+h-1} < \frac{\sigma}{1-h+\sigma}.$$

Isto é

$$(1-h+\sigma)n < \sigma(n+\theta+h-1) = \sigma n + \sigma\theta - \sigma(1-h),$$

se somente se

$$(1-h)(n+\sigma) < \sigma\theta,$$

que é equivalente a

$$1-h < \frac{\sigma\theta}{n+\sigma} \Leftrightarrow 1 - \frac{\sigma\theta}{n+\sigma} < h.$$

Note que como $\theta < n$ isso implica que

$$\frac{\sigma\theta}{n+\sigma} < \sigma < 1,$$

além disso

$$1 - \frac{\sigma\theta}{n+\sigma} > 1-\theta.$$

Portanto fixamos $h \in (0,1)$ tal que
$$h > 1 - \frac{\sigma\theta}{n+\sigma}.$$

Então para $s \in \left(\frac{n}{n+\theta+h-1}, \frac{\sigma}{1-h+\sigma}\right)$ fixado, temos que existe um $\gamma \in (0,1)$ dependendo somente de n, δ e g_0 tal que

$$\int_{B_r^+} G(|Du-(Du)_r|)\,dx \leq Cr^{n+\gamma}, \quad \forall r \in (0,1/2),$$

onde $\gamma = \min\{\sigma + s(h-1-\sigma), c(n,\theta)\},\ C = C(n, g_0, \delta, G(1)) > 0$. A partir desta estimativa com a Afirmação a seguir mostramos que o gradiente de u pertence a um espaço de Campanato.

Afirmação 6.0.3. *Existe $\mu \in (0,1)$ tal que para todo $r \in (0,1/2)$*

$$\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\,dx \leq C \cdot r^{n+\mu} \tag{6.6}$$

Seja $\tau \in (0, \gamma/g_0)$ temos dois casos a considerar. O primeiro caso é quando ocorre

$$\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\,dx \leq r^{n+\tau},$$

então basta tomarmos $\mu = \tau$. Suponha então que temos

$$\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\,dx > r^{n+\tau}.$$

Então usando que a função $H(t) = G(t) - G(t)t$ é crescente para $t \geq 1$ juntamente com

$$r^{-n-\tau}\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\,dx > 1,$$

temos
$$G\left(r^{-n-\tau}\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\right) \geq G(1) r^{-n-\tau}\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|.$$

Por outro lado usando (G_1) juntamente com a convexidade de G temos

$$\begin{aligned} G\left(r^{-n-\tau}\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\right) &\leq C(g_0)\max\{(r^{-\tau})^{\delta+1}, (r^{-\tau})^{g_0+1}\} G\left(r^{-n}\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\right) \\ &\leq C(g_0) r^{-\tau(g_0+1)} \cdot r^{-n}\int_{B_r^+} G(|Du-(Du)_r|)\,dx \\ &\leq Cr^{-\tau(g_0+1)} \cdot r^{\gamma}. \end{aligned}$$

Assim obtemos para todo $r \in (0,1/2)$ com $C = C(n, \delta, G(1), g_0) > 0$

$$\int_{B_r^+} |Du-(Du)_r|\,dx \leq C \cdot r^{n+\gamma-\tau g_0},$$

e tomamos $\mu = \gamma - \tau g_0 \in (0,1)$. Então da mesma forma que na demonstração do Theorem 1 em (LIEBERMAN, 1988), isso implica pelo Teorema de Campanato em (GIAQUINTA; MARTINAZZI, 2013), capítulo 5 que $Du \in \mathscr{L}^{1,n+\mu}(B^+_{1/2}) \simeq C^{0,\mu}(\overline{B^+_{1/2}})$. Além disso sendo as seminormas destes espaços equivalentes obtemos a estimativa que desejávamos para uma constante $C = C(n,\delta,G(1),g_0,q,\alpha) > 0$

$$[Du]_{C^{0,\mu}(B^+_{1/2})} \leq C.$$

□

A estimativa obtida no Teorema 6.0.1 implica na seguinte desigualdade para a norma Holder da solução:

$$||u||_{C^{1,\mu}(B^+_{1/2})} \leq C\left[||u||_{L^\infty(B^+_1)} + ||\phi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)})\right]. \tag{6.7}$$

Observação 6.1. *Agora consideremos uma semi bola qualquer de raio $R > 0$, e o problema de Dirichlet*

$$\triangle_g u = f \quad em \quad B^+_R, \quad u = \phi \quad em \quad B^0_R. \tag{6.8}$$

Então pela Observação 1.1 tem-se que para todo $y \in B^+_1$ $u_R(y) = \frac{u(Ry)}{R}$, $\phi_R(y) = \frac{\phi(Ry)}{R}$ e $f_R(y) = Rf(Ry)$

$$\triangle_g u_R = f_R \quad em \quad B^+_1, \quad u_R = \phi_R \quad em \quad B^0_1.$$

Note que

$$||f_R||_{L^q(B^+_1)} = R^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B^+_R)} \quad e \quad [Du_R]_{C^{0,\mu}(B^+_1)} = R^\mu [Du]_{C^{0,\mu}(B^+_R)}.$$

Além disso a norma Hölder da função escalonada pode ser escrita como

$$||u_R||_{C^{1,\mu}(B^+_1)} = \frac{||u||_{L^\infty(B^+_R)}}{R} + ||Du||_{L^\infty(B^+_R)} + R^\mu [Du]_{C^{0,\mu}(B^+_R)}.$$

Definimos a seguinte norma

$$||u||^*_{C^{1,\beta}(B_R)} := ||u||_{L^\infty(B_R)} + R||Du||_{L^\infty(B_R)} + R^{1+\beta}[Du]_{C^{0,\beta}(B_R)}.$$

Assim vemos que $||u||^*_{C^{1,\mu}(B^+_R)} = R||u_R||_{C^{1,\mu}(B^+_1)}$. Portanto a partir deste fato e da desigualdade 6.7 aplicada a função u_R obtemos a seguinte estimativa para soluções fracas do problema de Dirichlet 6.8

$$||u||^*_{C^{1,\mu}(B^+_{R/2})} \leq C\left[||u||_{L^\infty(B^+_R)} + ||\phi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_R)} + R\cdot g^{-1}(R^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B^+_R)})\right]. \tag{6.9}$$

Em particular, tem-se

$$||\nabla u||_{L^\infty(B^+_{R/2})} \leq C\left[\frac{||u||_{L^\infty(B^+_R)}}{R} + \frac{||\phi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_R)}}{R} + g^{-1}(R^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B^+_R)})\right]. \tag{6.10}$$

7 APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE FRONTEIRA LIVRE

Por fim neste trabalho de tese vamos utilizar a estimativa obtida no Teorema 6.0.1 para generalizar resultadas sobre fronteira livre presentes em (BRAGA; MOREIRA, 2022). Denotamos a fronteira livre por $F(u) := \{u > 0\} \cap B_1$.

Definição 7.0.1. *Seja* $0 \leq u \in C^0(\Omega)$ *e* $0 \leq \psi$ *uma função limitada em* $F(u)$. *Dizemos que* φ *toca u por baixo em* $x_0 \in F(u)$ *e denotamos isso por* $\varphi \prec u$ *em* x_0 *se*

$$\varphi \in C^0(B_\delta(x_0)),\ \varphi(x_0) = u(x_0),\ \varphi(x) \leq u(x)\ \forall x \in B_\delta(x_0)\ \textit{ para algum }\ 0 < \delta < dist(x_0, \partial\Omega).$$

Além disso, se $\varphi \in C^1(\overline{\{\varphi > 0\} \cap B_\delta(x_0)})$ *dizemos que* φ *é regular no lado positivo.*

Por fim, dizemos que a Condição de Fronteira Livre

$$|\nabla u^+(x)| \leq \psi \quad \textit{ao longo de} \quad F(u),$$

é satisfeita no sentido da viscosidade quando: $0 \leq \varphi \prec u^+$ *em* $x_0 \in F(u) \cap F(\varphi)$, *onde* φ *é uma função regular no lado positivo com a fronteira livre* C^1 *em torno de* x_0 *onde tem-se*

$$|\varphi_\nu(x_0)| \leq \psi(x_0).$$

Denotamos ν *o vetor normal interior a* $F(\varphi)$ *em* x_0, *apontando para dentro no conjunto positivo* $\{\varphi > 0\}$.

Definição 7.0.2. *Dizemos que* $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_R^0)$ *satisfaz a transição de fase degenerada, em inglês usamos a sigla (DPT), se*

$$\forall x \in B_R^0 \quad \textit{tal que} \quad \varphi(x) = 0 \quad \textit{tem-se} \quad |\nabla \varphi(x)| = 0.$$

Agora vamos enunciar a primeira aplicação que é uma estimativa do gradiente até a fronteira para soluções de Problemas de Fronteira Livre.

Teorema 7.0.1. *Sejam* $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *para algum* $\alpha \in (0,1), f \in L^q(B_1^+)$ *com* $q > n$ *e* $u \in C^0(\overline{B_!^+}) \cap W^{1,G}(B_1^+)$ *solução do seguinte problema de fronteira livre:*

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \quad \textit{em} \quad \{u > 0\} \cap B_1^+ \\ |\nabla u^+| \leq \psi \quad \textit{ao longo de} \quad F(u) \\ u = \varphi \quad \textit{em} \quad B_1^0 \\ \varphi \quad \textit{satisfaz} \quad (DPT) \end{cases}$$

Aqui, $0 \leq \psi$ *é uma função limitada em* $F(u)$*. Então* $u^+ \in C^{0,1}(\overline{B^+_{1/8}})$ *com a seguinte estimativa*

$$||\nabla u^+||_{L^\infty(\overline{B^+_{1/8}})} \leq C\left[\sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||u||_{W^{1,G}(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})\right].$$

Além disso, no caso em que a condição (DPT) é substituída por "u é uma subsolução global,"isto é

$$\triangle_g u \geq h \quad em \quad B_1^+, \quad h \in L^q(B_1^+).$$

Então vale a estimativa

$$||\nabla u^+||_{L^\infty(\overline{B^+_{1/8}})} \leq C\left[\sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)}) + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})\right].$$

Aqui, $C = C(n, q, G(1), \tilde{G}(1), g_0, \delta, \alpha) > 0$.

A prova deste resultado é feita seguindo os mesmos passos de (BRAGA; MOREIRA, 2022), com isso em mente vamos enunciar alguns resultados que serão utilizados.

Lema 7.0.1 (Degenerate phase transition and $C^{1,\alpha}$-regularity)**.** *Seja* $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *satisfazendo a condição (DPT). Então* $\varphi^\pm \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *com a seguinte estimativa*

$$||\varphi^\pm||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} \leq ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}.$$

Além disso, a reciproca também é verdadeira isto é, se φ *e* φ^+ *são* $C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *então* $\varphi^- \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *e vale a (DPT).*

Demonstração. Ver no Lemma 10.1 em (BRAGA; MOREIRA, 2022). □

O próximo resultado é obtido a partir da investigação do comportamento das soluções em pontos não tangenciais. Isto é, pontos na fronteira da semi bola que projetam-se não tangencialmente sobre a fronteira livre.

Proposição 7.0.2 (Trace estimate on the fixed boundary)**.** *Seja* $u \in W^{1,G}_{loc}(B_R^+) \cap C^0(\overline{B_R^+})$ *solução do seguinte problema de fronteira livre*

$$\begin{cases} f \in L^q(B_R^+), \quad q > n \\ |\triangle_g u| \leq |f| \quad em \quad \{u > 0\} \cap B_R^+ \\ |\nabla u^+| \leq \psi \quad ao\ longo\ de \quad F(u) \\ u = \varphi \quad em \quad B_R^0, \end{cases}$$

onde $0 \leq \psi$ *é uma função limitada em* $F(u)$, *e* $\varphi \in C^{0,1}(B_R^0)$. *Então para todo* $x \in B_{R/2}^0$ *tem-se*

$$\varphi^+(x) \leq C \cdot T_R \cdot dist(x, \{u \leq 0\}),$$

onde

$$T_R := \left(\sup_{F(u)} \psi + [\varphi]_{C^{0,1}(B_R^0)} + \frac{||u||_{L^\infty(B_R^+)}}{R} + g^{-1}(R^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R^+)}) \right).$$

Aqui $C = C(n, \delta, g_0, q) > 0$.

Demonstração. Ver em Proposition 8.2,(BRAGA; MOREIRA, 2022). □

A geometria das funções barreiras de Pucci construídas em (BRAGA; MOREIRA, 2022) que tocam a fronteira livre são utilizadas para mostrar que "perto"da fronteira livre, soluções de equações não lineares envolvendo o operador g-laplaciano são controladas por cima pela distância para o conjunto de negatividade das mesmas.

Proposição 7.0.3 (Control of the solution near the free boundary by the distance to the negative phase)**.** *Seja* $u \in W_{loc}^{1,G}(B_R^+) \cap C^0(\overline{B_R^+})$ *solução do seguinte problema de fronteira livre:*

$$\begin{cases} f \in L^q(B_R^+), \quad q > n \\ |\triangle_g u| \leq |f| \quad em \quad \{u > 0\} \cap B_R^+ \\ |\nabla u^+| \leq \psi \quad ao\ longo\ de \quad F(u), \end{cases}$$

onde $0 \leq \psi$ *é uma função limitada em* $F(u)$. *Então existe uma constante universal* $C = C(n, q, g_0, \delta) > 0$ *tal que*

$$u^+(x) \leq C \cdot M_R \cdot dist(x, \{u \leq 0\}),$$

$$\forall x \in \overline{B_{3R/4}^+} \cap \{y \in B_R^+; dist(y, \{u \leq 0\}) < |y - y'|\},$$

onde $y' = (y_1, ..., y_{n-1}, 0)$ *para* $y = (y_1, ..., y_n)$ *e*

$$M_R := \left[\sup_{F(u)} \psi + \frac{||u||_{L^\infty(B_R^+)}}{R} + g^{-1}(R^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_R^+)}) \right].$$

Demonstração. Ver Proposition 7.1 em (BRAGA; MOREIRA, 2022). □

Lema 7.0.2 (Continuation lemma for positive part of subsolutions across the free boundary)**.** *Seja* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado. Assuma que* $u \in W_{loc}^{1,G}(\{u > 0\}) \cap C^0(\overline{U})$ *tal que* $\triangle_g u \geq f$ *no sentido das distribuições em* $\{u > 0\}$ *onde* $f \in L_{loc}^n(U)$. *Então*

1. $u^+ \in W^{1,G}_{loc}(U)$

2. $\triangle_g u^+ \geq -f^-$ *no sentido das distribuições em U.*

Demonstração. Ver em Lemma 9.2, (BRAGA; MOREIRA, 2022). $\square$

A proposição a seguir é uma generalização da Proposição 10.1 apresentada em (BRAGA; MOREIRA, 2022). Ela constitui o último componente necessário para a demonstração do Teorema 7.0.1. A abordagem utilizada é a mesma, baseada na aplicação da estimativa do traço da Proposição 7.0.2 e no lema de continuidade para subsoluções na fronteira, permitindo, assim, a extensão global da estimativa da Proposição 7.0.3. Como foi apontado no Remark 10.1 do mesmo artigo, agora com a presença das estimativas $C^{1,\alpha}$ até a fronteira (Teorema 6.0.2) podemos eliminar a restrição que lá é feita para equações que envolvem o operador p-laplaciano.

Proposição 7.0.4 (Control of the solution by the distance to the negative phase)**.** *Seja* $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ *para algum* $\alpha \in (0,1)$ *satisfazendo a (DPT) em* B_1^0*. Assuma que* $u \in W^{1,G}(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ *é solução do seguinte problema de fronteira livre:*

$$\begin{cases} f \in L^q(B_1^+), \quad q > n \\ |\triangle_g u| \leq |f| \quad em \quad \{u > 0\} \cap B_1^+ \\ |\nabla u^+| \leq \psi \quad ao\ longo\ de \quad F(u) \\ u = \varphi \quad em \quad B_1^0. \end{cases}$$

Então

$$u^+(x) \leq C \cdot \tilde{M} \cdot dist(x, \{u \leq 0\}), \ \forall x \in B_{1/2}^+,$$

onde

$$\tilde{M} := \left(\sup_{F(u)} \psi + ||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) + ||u||_{W^{1,G}(B_1^+)} \right).$$

Se a condição (DPT) for substituída por "u é subsolução global,"isto é no sentido das distribuições temos

$$\triangle_g u \geq h \quad em \quad B_1^+,$$

para alguma $h \in L^q(B_1^+)$*, então a estimativa acima é verdadeira com* $\tilde{M}$ *trocada por*

$$M^* := \tilde{M} + g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)}).$$

Aqui $C = C(n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), q) > 0$.

Demonstração. A prova é feita de forma similar a da Proposition 10.1 em (BRAGA; MOREIRA, 2022), com algumas alterações quanto a aplicar estimativa $C^{1,\alpha}$ até a fronteira obtida no capítulo anterior. Ao longo da demonstração estaremos sempre denotando por C uma constante positiva que dependerá somente do parâmetros universais $n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), q$.

Passo 1: A estimativa é verdadeira para pontos que estão mais próximos da fronteira plana do que o conjunto negativo $\{u \leq 0\}$. Mais precisamente

$$u^+(x) \leq C \cdot \tilde{M} \cdot dist(x, \{u \leq 0\}), \ \ \forall x \in B^+_{1/2},$$

sempre que

$$\forall x \in \overline{B^+_{R/2}} \cap \{y \in B^+_R : |y - y'| \leq dist(y, \{u \leq 0\})\}.$$

Seja $x_0 \in \overline{B^+_{1/2}} \cap \{u > 0\}$ tal que

$$d_V := |x_0 - x_0'| \leq d_0 := dist(x_0, \{u \leq 0\}).$$

Consideremos o seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} f \in L^q(B^+_1), \ \ q > n \\ \triangle_g \Gamma = -|f| \ \text{ em } \ B^+_{3/4} \\ \Gamma = u^+ \ \text{ em } \ \partial B^+_{3/4}. \end{cases}$$

A existência de uma solução $\Gamma \in W^{1,G}(B^+_{3/4}) \cap L^\infty(B^+_{3/4})$ no sentido das distribuições é garantida pelo Teorema 2.3.1. Uma vez que pelo Lema 7.0.1 $\varphi^+ \in C^{1,\alpha}(B^0_1)$, então as estimativa 6.10 obtida no capítulo anterior, juntamente com a estimativa L^∞ na Proposição 2.3.2 e a obtida na Proposição 6.0.1 implicam nas seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} ||\nabla\Gamma||_{L^\infty(\overline{B^+_{1/2}})} &\leq C \cdot [||\Gamma||_{L^\infty(B^+_{3/4})} + ||\varphi^+||_{C^{1,\alpha}(B^0_{3/4})} + g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_{3/4})})] \\ &\leq C \cdot [||u||_{L^\infty(B^+_1)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)})] \\ &\leq C \cdot N_0, \end{aligned}$$

onde $N_0 = [||u||_{L^\infty(B^+_1)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)})]$.

Agora a estimativa do traço na Proposição 7.0.2 nos diz que

$$\varphi^+(x_0) \leq C \cdot T_1 \cdot d_0,$$

onde

$$T_1 = \left(\sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) \right).$$

Então, sendo $d_V \le d_0$,

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_0) &\le ||\nabla\Gamma||_{L^\infty(\overline{B_{1/2}^+})} \cdot |x_0 - x_0'| + \varphi^+(x_0) \\
&\le C \cdot N_0 \cdot |x_0 - x_0'| + \varphi^+(x_0) \\
&\le C \cdot N_0 \cdot d_V + C \cdot T_1 \cdot d_0 \\
&\le C \cdot (N_0 + T_1) \cdot d_0 \\
&\le C \cdot \left(\sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^+)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) \right) \cdot d_0.
\end{aligned}$$

O Lema 7.0.2 implica que

$$\triangle_g \Gamma = -|f| \le \triangle_g u^+ \quad \text{em} \quad B_{3/4}^+,$$

no sentido das distribuições. Então o princípio da comparação em Proposition 14.3 (BRAGA; MOREIRA, 2022) nos dá que $u^+ \le \Gamma$ em $\overline{B_{3/4}^+}$. Em particular, no ponto x_0 temos

$$u^+(x_0) \le C \cdot \left(\sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^+)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) \right) \cdot d_0.$$

No caso em que u é uma subsolução global ao invés da condição (DPT), a prova na verdade é mais simples uma vez que não precisamos usar o lema da continuação (Lema 7.0.2). Neste caso consideramos uma nova barreira solução do seguinte problema de Dirichlet:

$$\begin{cases} f \in L^q(B_1^+), \quad q > n \\ \triangle_g \Gamma^* = h \quad \text{em} \quad B_{3/4}^+ \\ \Gamma^* = u \quad \text{em} \quad \partial B_{3/4}^+. \end{cases}$$

As mesmas considerações se aplicam a respeito da existência de uma solução $\Gamma^* \in W^{1,G}(B_1^+) \cap L^\infty(B_1^+)$. Então novamente a estimativa $C^{1,\alpha}$ até a fronteira obtida no capítulo anterior, juntamente com a estimativa L^∞ na Proposição 2.3.2 e a da Proposição 6.0.1 nos dá que

$$||\nabla\Gamma^*||_{L^\infty(\overline{B_{1/2}^+})} \le C \cdot N_0^*,$$

onde $N_0^* = (||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)}))$.

Usando novamente a estimativa do traço (Proposição 7.0.2), da mesma forma que anteriormente obtemos:

$$\begin{aligned}\Gamma^*(x_0) &\leq C\cdot(N_0^*+T_1)\cdot d_0.\\ &\leq C\cdot\left[\sup_{F(u)}\psi+||u||_{L^\infty(B_1^+)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})+g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)})\right].\end{aligned}$$

Como $\triangle_g\Gamma^*=h\leq\triangle_g u$ em $B_{3/4}^+$ no sentido das distribuições, o principio da comparação implica que $u\leq\Gamma^*$ em $\overline{B_{3/4}^+}$. Então $u(x_0)\leq\Gamma^*(x_0)$ o que nos dá

$$\begin{aligned}u^+(x_0)&=u(x_0)\\ &\leq C\cdot\left[\sup_{F(u)}\psi+||u||_{L^\infty(B_1^+)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})+g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)})\right]\cdot d_0.\end{aligned}$$

Passo 2: A estimativa é verdadeira em geral para todo ponto de $\overline{B_{1/2}^+}$.

Seja $x_0\in\overline{B_{1/2}^+}\cap\{u>0\}$. No passo 1 mostramos que quando $d_V\leq d_0$ então

$$u^+(x_0)\leq C\cdot\tilde{M}_1\cdot d_0\quad\text{ou}\quad u^+(x_0)\leq C\cdot M_1^*\cdot d_0,$$

onde

$$\tilde{M}_1=\left[\sup_{F(u)}\psi+||u||_{L^\infty(B_1^+)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})\right],$$

e

$$M_1^*=\left[\sup_{F(u)}\psi+||u||_{L^\infty(B_1^+)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})+g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)})\right],$$

dependendo da condição (DPT) ser satisfeita ou que u seja subsolução global. Agora caso tenhamos

$$d_V=|x_0-x_0'|>d_0=dist(x_0,\{u\leq 0\}),$$

temos pela Proposição 7.0.3

$$u^+(x_0)\leq C\cdot M_1\cdot d_0,$$

onde

$$M_1=\left[\sup_{F(u)}\psi+||u||_{L^\infty(B_1^+)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})\right].$$

O resultado fica provado observando que $M_1\leq\max\{\tilde{M}_1,M_1^*\}$.

$\square$

7.1 Prova do Teorema 7.0.1

Sejam

$$x_0 \in \overline{B_{1/8}} \cap \{u > 0\},\ \ 0 < d_0 := dist(x_0, \{u \leq 0\}) = |x_0 - y_0| \leq diam(B_1^+) = 2.$$

Assim temos

$$|x_0 - x_0'| = (x_0)_n =: d_v < \frac{1}{8}.$$

Utilizando a mesma notação que em (BRAGA; MOREIRA, 2022) definimos

$$\triangle_0 := \begin{cases} \sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) \\ \sup_{F(u)} \psi + ||u||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}) + g^{-1}(||h||_{L^q(B_1^+)}), \end{cases}$$

dependendo de φ satisfazer a condição (DPT) ou u ser uma subsolução global. Provaremos os dois casos ao mesmo tempo.

Caso 1: $d_0 < |x_0 - x_0 1| = d_V < \frac{1}{8}$.

Note que neste caso temos $B_{d_0}(x_0) \subset \{u > 0\} \cap B_1^+$. Então usando a estimativa $C^{1,\alpha}$ interior na bola $B_{d_0}(x_0)$ como enunciado em Proposition 13.1, (BRAGA; MOREIRA, 2022) porém demonstrado por G.Lieberman em (LIEBERMAN, 1991), juntamente com a Proposição 7.0.4 obtemos para constantes $C = C(n, q, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1)) > 0$ e $E_1 = E_1(n, q, \delta, g_0) > 0$

$$\begin{aligned} |\nabla u^+(x_0)| &\leq E_1 \cdot \left(\frac{u^+(x_0)}{d_0} + g^{-1}(d_0^{1-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B_{d_0}(x_0))}) \right) \\ &\leq E_1 \cdot (C \cdot \triangle_0 + \triangle_0) \\ &\leq E_1 \cdot (C + 1) \cdot \triangle_0. \end{aligned}$$

Caso 2: $d_V = |x_0 - x_0 1| \leq d_0$.

Dividimos este caso em dois sub casos.

Sub caso 2.1: $\frac{d_0}{16} \leq d_V = |x_0 - x_0'| \leq d_0$.

Neste caso observamos que $B_{d_V}(x_0) \subset B_{1/4}^+ \cap \{u > 0\}$. Com efeito, dado $\xi \in B_{d_V}(x_0)$ como $d_V \leq d_0$ isso implica que $\xi \in \{u > 0\}$, e por desigualdade triangular

$$|\xi| \leq |\xi - x_0| + |x_0| \leq d_V + \frac{1}{8} < \frac{1}{4}.$$

Então de forma análoga ao caso anterior aplicamos a estimativa $C^{1,\alpha}$ interior na bola $B_{d_V}(x_0)$ juntamente com a Proposição 7.0.4 para obter

$$\begin{aligned}
|\nabla u^+(x_0)| &\leq E_1 \cdot \left(\frac{u^+(x_0)}{d_V} + g^{-1}(d_0^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_{d_V}(x_0))}) \right) \\
&\leq 16E_1 \cdot \left(\frac{u^+(x_0)}{d_0} + g^{-1}(d_0^{1-\frac{n}{q}}||f||_{L^q(B_{d_V}(x_0))}) \right) \\
&\leq 16E_1 \cdot (C+1) \cdot \triangle_0.
\end{aligned}$$

Sub caso 2.2: $|x_0 - x_0'| < \frac{d_0}{16}$.

Neste caso o ponto x_0 está mais próximo de B_1^0 do que do bordo de $\{u \leq 0\}$. Então precisamos mudar de estrategia e usar a estimativa $C^{1,\alpha}$ até a fronteira demonstrada no capítulo anterior.

Afirmação: $x_0 \in B^+_{d_0/8}(x_0') \subset B^+_{1/2} \cap \{u > 0\}$.

Com efeito, lembrando que $d_0 \leq 2$ temos para $\xi \in B^+_{d_0/8}(x_0')$,

$$\begin{aligned}
|\xi| &\leq |\xi - x_0'| + |x_0'| \\
&\leq \frac{d_0}{8} + |x_0| \\
&\leq \frac{d_0}{8} + \frac{1}{8} \leq \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Além disso $B^+_{d_0/8}(x_0') \cap \{u \leq 0\} = \emptyset$, pois caso contrário tomando $\xi_0 \in B^+_{d_0/8}(x_0') \cap \{u \leq 0\}$ teríamos

$$d_0 \leq |x_0 - \xi_0| \leq diam\left(B^+_{d_0/8}(x_0')\right) = \frac{d_0}{4}.$$

Isto gera uma contradição pois $d_0 > 0$, e fica provada a afirmação.

Agora sendo $B^+_{d_0/8}(x_0') \subset B^+_{1/2}$, a Proposição 7.0.4 nos diz que

$$u^+(y) \leq C \cdot \triangle_0 \cdot d(y) \quad \forall y \in B^+_{d_0/8}(x_0'),$$

onde $d(y) = dist(y, \{u \leq 0\})$. Da mesma forma que em (BRAGA; MOREIRA, 2022) podemos fazer a estimativa acima ser uniforme em $B^+_{d_0/8}(x_0')$. Com efeito, $\forall y \in B^+_{d_0/8}(x_0')$ temos

$$\begin{aligned}
|d(y) - d_0| \leq |y - x_0| \Rightarrow d(y) &\leq d_0 + |y - x_0| \leq d_0 + |y - x_0'| + |x_0' - x_0| \\
&\leq d_0 + \frac{d_0}{8} + d_V \leq 2d_0.
\end{aligned}$$

Assim obtemos

$$||u^+||_{L^\infty(B^+_{d_0/8}(x_0'))} \leq 2C \cdot \triangle_0 \cdot d_0. \tag{7.1}$$

Como $\varphi = \varphi^+$ em $\overline{B^+_{d_0/8}(x_0')}$ e $\frac{d_0}{8} \leq \frac{1}{4}$, usando 7.1 obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} &= \frac{||\varphi||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + ||\nabla\varphi||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))} + \left(\frac{d_0}{8}\right)^\alpha [\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(B^0_{d_0/8}(x_0'))} \\
&\leq \frac{||u^+||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + ||\nabla\varphi||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))} + \left(\frac{d_0}{8}\right)^\alpha [\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(B^0_{d_0/8}(x_0'))} \\
&\leq 16C \cdot \triangle_0 + 2||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_{1/8})} \\
&\leq (16C+2) \cdot \triangle_0.
\end{aligned}$$

Por fim, sendo $u = u^+$ em $B^+_{d_0}(x_0')$ usando a estimativa 6.10 temos para constantes $C = C(n,q,g_0,\delta,G(1),\tilde{G}(1)) > 0$, e pelas desigualdades acima

$$\begin{aligned}
|\nabla u(x_0)|| &\leq ||\nabla u||_{L^\infty(B^+_{d_0/16}(x_0'))} \\
&\leq \tilde{C} \cdot \left[\frac{||u||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + \frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + g^{-1}\left(\left(\frac{d_0}{8}\right)^{1-\frac{n}{q}} ||f||_{L^q(B^+_{d_0/8}(x_0'))}\right)\right] \\
&\leq \tilde{C} \cdot \left[\frac{||u^+||_{L^\infty(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + \frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_{d_0/8}(x_0'))}}{\frac{d_0}{8}} + g^{-1}\left(||f||_{L^q(B^+_1)}\right)\right] \\
&\leq C \cdot [16C \cdot \triangle_0 + (16C+2) \cdot \triangle_0 + \triangle_0] \\
&\leq C \cdot \triangle_0.
\end{aligned}$$

Assim analisando todos os sub casos chegamos a conclusão que para uma constante $D = D(n,g_0,\delta,G(1),\tilde{G}(1),q) > 0$ tem-se

$$|\nabla u(x)| \leq D \cdot \triangle_0, \quad \forall x \in \overline{B^+_{1/8}} \cap \{u > 0\} =: J. \tag{7.2}$$

Dado $1 < p < +\infty$, como $u \in C^{1,\alpha}(J)$ e pela desigualdade 7.2 vemos que $u \in W^{1,p}(J)$. Em particular temos que para todo $\rho > 0, u_\rho := (u-\rho)^+ \in W^{1,p}(B^+_{1/8})$.

De fato, temos

$$||\nabla u_\rho||_{L^\infty(B^+_{1/8})} \leq ||u_\rho||_{W^{1,\infty}(B^+_{1/8})} \leq (D+1) \cdot \triangle_0.$$

Além disso,

$$|u_\rho(x) - u^+(x)| = |(u-\rho)^+ - u^+| \leq \rho, \quad \forall x \in B^+_{1/8}.$$

Logo quando $\rho \to 0^+$ temos que $u_\rho \to u^+$ uniformemente em $B^+_{1/8}$. Então sendo o espaço $W^{1,p}(B^+_{1/8})$ reflexivo temos a menos de uma subsequência que $u_\rho \rightharpoonup u^+$ em $W^{1,p}(B^+_{1/8})$.

Portanto temos as seguintes estimativas

$$\begin{aligned}
||\nabla u^+||_{L^p(B^+_{1/8})} &\leq \liminf_{\rho \to 0^+} ||\nabla u_\rho||_{L^p(B^+_{1/8})} \\
&\leq |B^+_{1/8}|^{1/p} \liminf_{\rho \to 0^+} ||\nabla u_\rho||_{L^\infty(B^+_{1/8})} \\
&\leq |B^+_{1/8}|^{1/p} \cdot (D+1) \cdot \triangle_0 \\
&\leq (|B^+_{1/8}| + 1) \cdot (D+1) \cdot \triangle_0.
\end{aligned}$$

Isto implica pelo Theorem 2.14 em (ADAMS; FOURNIER, 2003) que $u^+ \in W^{1,\infty}(B^+_{1/8}) = C^{0,1}(B^+_{1/8})$, com a estimativa

$$||\nabla u^+||_{L^\infty(B^+_{1/8})} \leq (|B^+_{1/8}| + 1) \cdot (D+1) \cdot \triangle_0.$$

Desta forma concluímos a demonstração do Teorema 7.0.1.

8 APLICAÇÕES A PROBLEMAS DE PERTUBAÇÃO SINGULAR

Nosso objetivo será investigar estimativas Lipschtiz até a fronteira de soluções do seguinte problema:

$$\begin{cases} f \in L^q(B_1^+) \quad \text{com} \quad q > n \\ \triangle_g u_\varepsilon = f + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad \text{em} \quad B_1^+ \\ u_\varepsilon \geq 0 \quad \text{em} \quad B_1^+ \\ u_\varepsilon = \varphi \quad \text{em} \quad B_1^0, \end{cases} \tag{8.1}$$

onde u_ε pertence a $C^0(\overline{B_1^+})$ para qualquer $0 < \varepsilon < 1$. Quanto ao dado de fronteira consideramos $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$ e também assumimos que $\beta_\varepsilon \geq 0$ converge para a delta de Dirac δ_0 quando $\varepsilon \to 0^+$. Mais precisamente,

$$\beta \in C^0(\mathbb{R}), \text{ com } supp(\beta) \subset [0,1] \text{ e definimos } \beta_\varepsilon(t) := \frac{1}{\varepsilon}\beta\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \text{ para todo } 0 < \varepsilon < 1. \tag{8.2}$$

Novamente iremos utilizar a estimativa obtida no Teorema 6.0.1 para generalizar os resultados obtidos em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023) do problema com o operador p-Laplaciano para o g-Laplaciano. A motivação para estudar este tipo de problema vem das aplicações na teoria de propagação de chamas. Da teoria desenvolvida por Luis Caffarelli, Noemi Wolanski e Claudia Lederman nos anos noventa, é razoável esperar que soluções do problema de pertubação singular como enunciado acima, convirjam num sentido adequado para soluções fracas do seguinte problema de fronteira livre:

$$\begin{cases} \triangle_g u = f \ \text{ em } B_1^+ \cap \{u > 0\} \\ |\nabla u| = C \ \text{ em } B_1^+ \cap \partial\{u > 0\} \\ u = \varphi \ \text{ em } B_1^+. \end{cases}$$

Usamos a regularidade Lipschitz até a fronteira das soluções do problema de fronteira livre do capítulo anterior para obter a regularidade desejada para a família de soluções do problema 8.1 $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, com $\varepsilon > 0$ pequeno. Seguimos a mesma estrategia adotada em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023) usando as estimativas do traço, lá os autores trataram do problema de pertubação singular com o operador p-Laplaciano e com o lado direito da equação sendo uma função limitada. Aqui iremos melhorar o resultado obtido trocando o operador pelo g-Laplaciano para uma função g satisfazendo (CP) e (CQ). Além disso o lado direito da equação será uma função não limitada que mora no espaço de Lebesgue L^q com $q > n$.

Para $\varepsilon > 0$ definimos os seguintes conjuntos

$$\Omega_\varepsilon^- := \overline{B_1^+} \cap \{u_\varepsilon \leq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad S_\varepsilon := \{x = (x_1, ..., x_n); 0 \leq x_n \leq \varepsilon\}.$$

Utilizaremos a seguinte estimativa do traço demonstrada em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023).

Proposição 8.0.1 (Estimativa do traço na $\varepsilon-$strip)**.** *Seja $f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$. Considere $u_\varepsilon \in W^{1,G}(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ uma solução fraca não negativa do seguinte problema de pertubação singular*

$$\begin{cases} \triangle_g u_\varepsilon = f + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad em \quad B_1^+ \\ u = \varphi \quad em \quad B_1^0 \\ \beta \quad satisfaz \quad 8.2. \end{cases}$$

Então para qualquer $x_0 \in \Omega_\varepsilon^- \cap S_\varepsilon \cap B_{1/2}^+$ vale a seguinte estimativa

$$\varphi(x_0') \leq C \cdot \left[1 + [\varphi]_{C^{0,1}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)} + ||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right] \cdot \varepsilon,$$

onde $x_0' = x_0 - (0, ..., 0, (x_0)_n)$ e $C = C(n, g_0\delta, q) > 0$.

Demonstração. Ver em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023) Proposition 5.4. □

O próximo resultado é uma generalização da Proposition 6.2 em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023).

Proposição 8.0.2. *Seja $f \in L^q(B_1^+)$ com $q > n$ e $\varphi \in C^{1,\alpha}(B_1^0)$. Considere $u_\varepsilon \in W^{1,G}(B_1^+) \cap C^0(\overline{B_1^+})$ uma solução fraca não negativa do seguinte problema de pertubação singular*

$$\begin{cases} \triangle_g u_\varepsilon = f + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad em \quad B_1^+ \\ u_\varepsilon = \varphi \quad em \quad B_1^0 \\ \beta \quad satisfaz \quad 8.2. \end{cases}$$

Então, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{16}$ temos

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{1/2}^+ \cap \Omega_\varepsilon^-)} \leq C \cdot \left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)} + ||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right],$$

onde $C = C(n, q, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1)) > 0$.

Demonstração. Durante a prova iremos utilizar o seguinte fato

$$g^{-1}(||f+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)||_{L^q(B_1^+)}) \leq C(n,q)g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})}).$$

Seja $x_0 \in B_{1/2}^+ \cap \Omega_\varepsilon^-$. Trataremos dois casos separadamente.

Caso 1: $dist(x_0, B_1^0) > \varepsilon$.

Observe que neste caso $\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}}(x_0) \subset B_1^+$. Com efeito, dado $y \in \overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}}(x_0)$ temos

$$y_n \geq (x_0)_n - |y_n-(x_0)_n| \geq \frac{\varepsilon}{2} > 0,$$

e

$$|y| \leq |y_n - x_0| + |x_0| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2} < 1.$$

Então usando a desigualdade de Harnack como no Theorem 3.1 em (BRAGA, 2018) temos

$$\begin{aligned}
\sup_{\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}}(x_0)} u_\varepsilon &\leq C\left[\inf_{\overline{B_{\frac{\varepsilon}{2}}}(x_0)} u_\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1+\frac{1}{g_0}\left(1-\frac{n}{q}\right)} g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right] \\
&\leq C\cdot\left[\frac{u_\varepsilon(x_0)}{\varepsilon} + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{g_0}\left(1-\frac{n}{q}\right)} g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]\cdot\varepsilon \\
&\leq C\cdot\left[1+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]\cdot\varepsilon.
\end{aligned}$$

Então a estimativa $C^{1,\alpha}$ interior aplicado na bola $B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0)$ como enunciado em Proposition 13.1 (BRAGA; MOREIRA, 2022) juntamente das desigualdades acima nos dá que

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\varepsilon(x_0)| &\leq C\cdot\left[\frac{||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_{\frac{\varepsilon}{2}}(x_0))}}{\varepsilon} + g^{-1}\left(\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n}{q}}(||f+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)||_{L^q(B_1^+)})\right)\right] \\
&\leq C\cdot\left[1+g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]
\end{aligned}$$

Caso 2: $dist(x_0, B_1^0) \leq \varepsilon$.

Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \triangle_g w_\varepsilon = f & \text{em} \quad B_{7/8}^+ \\ w_\varepsilon = u_\varepsilon & \text{em} \quad \partial B_{7/8}^+. \end{cases}$$

A existência de uma solução $w_\varepsilon \in W^{1,G}(B_{7/8}^+) \cap L^\infty(\overline{B_{7/8}^+})$ no sentido das distribuições é garantida pelo Teorema 2.3.1. Daí usando 6.9 juntamente com a estimativa L^∞ na Proposição 2.3.2 e da

Proposição 6.0.1 implicam nas seguintes desigualdades

$$
\begin{aligned}
||\nabla w_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{3/4})} &\leq C\cdot\left[||w_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{7/8})}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_{7/8})}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_{7/8})})\right]\\
&\leq C\cdot\left[||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{1})}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_{1})}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_{1})})\right]\\
&\leq C\cdot N_1,
\end{aligned}
$$

onde

$$N_1 := \left[||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{1})}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_{1})}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_{1})})\right].$$

Como $\triangle_g w_\varepsilon = f \leq \triangle_g u_\varepsilon$ em $B^+_{7/8}$ no sentido das distribuições, segue do Principio da Comparação que $u_\varepsilon \leq w_\varepsilon$ em $\overline{B^+_{7/8}}$. Então para $0<\varepsilon\leq\frac{1}{16}$ sendo $x_0\in B^+_{1/2}$ temos que $B^+_{2\varepsilon}(x'_0)\subset B^+_{3/4}$, daí para todo $y\in\overline{B^+_{2\varepsilon}}(x'_0)$ vale o seguinte

$$
\begin{aligned}
w_\varepsilon(y) &\leq ||\nabla w_\varepsilon||_{L^\infty(\overline{B^+_{2\varepsilon}}(x'_0))}\cdot|y-x'_0|+w_\varepsilon(x'_0)\\
&\leq C\cdot N_1\cdot|y-x'_0|+w_\varepsilon(x'_0)\\
&\leq C\cdot N_1\cdot 2\varepsilon+u_\varepsilon(x'_0).
\end{aligned}
$$

Por outro lado uma vez que neste caso $x_0\in S_\varepsilon$, a estimativa do traço Proposição 8.0.1 nos permite fazer as seguintes estimativas

$$u_\varepsilon(x'_0)=\varphi(x'_0)\leq C\cdot\left[1+[\varphi]_{C^{0,1}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]\cdot\varepsilon$$

Assim obtemos para $0<\varepsilon\leq\frac{1}{16}$ e $y\in\overline{B^+_{2\varepsilon}}(x'_0)$

$$u_\varepsilon(y)\leq C\cdot\left[1+||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]\cdot\varepsilon. \tag{8.3}$$

Agora como $\varphi=u_\varepsilon$ em B^0_1 temos

$$
\begin{aligned}
\frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}}{\varepsilon} &\leq \frac{||\varphi||_{L^\infty(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}}{\varepsilon}+||\nabla\varphi||_{L^\infty(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}+(2\varepsilon)^\alpha[\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}\\
&\leq \frac{||u_\varepsilon||_{L^\infty(\overline{B^+_{2\varepsilon}}(x'_0))}}{\varepsilon}+||\nabla\varphi||_{L^\infty(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}+(2\varepsilon)^\alpha[\nabla\varphi]_{C^{0,\alpha}(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}.
\end{aligned}
$$

Então usando a estimativa até a fronteira 6.10 em $B^+_{2\varepsilon}(x'_0)$ juntamente de 8.3 temos

$$\begin{aligned}
|\nabla u_\varepsilon(x_0)| &\leq ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{\frac{2\varepsilon}{3}}(x'_0))} \\
&\leq C\cdot\left[\frac{||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))}}{\varepsilon}+\frac{||\varphi||^*_{C^{1,\alpha}(B^0_{2\varepsilon}(x'_0))}}{\varepsilon}+g^{-1}\left((2\varepsilon)^{1-\frac{n}{q}}||f+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)||_{L^q(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))}\right)\right] \\
&\leq C\left[2\cdot\frac{||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))}}{\varepsilon}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}\left((2\varepsilon)^{1-\frac{n}{q}}||f+\beta_\varepsilon(u_\varepsilon)||_{L^q(B^+_{2\varepsilon}(x'_0))}\right)\right] \\
&\leq C\cdot\left[1+||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right].
\end{aligned}$$

Portanto a partir da análise dos dois casos podemos concluir que para uma constante $C = C(n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), q) > 0$ tem-se

$$|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \leq C\cdot\left[1+||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right].$$

□

Finalmente estamos prontos para enunciar o principal resultado deste capitulo. Sua demonstração aqui é feita seguindo as estrategias em (BRAGA J. M; MOREIRA, 2023).

Teorema 8.0.3. *Seja $f \in L^q(B^+_1)$ com $q > n$ e $\varphi \in C^{1,\alpha}(B^0_1)$. Considere $u_\varepsilon \in W^{1,G}(B^+_1) \cap C^0(\overline{B^+_1})$ uma solução fraca não negativa do seguinte problema de pertubação singular*

$$\begin{cases} \triangle_g u_\varepsilon = f + \beta_\varepsilon(u_\varepsilon) \quad em \quad B^+_1 \\ u_\varepsilon = \varphi \quad em \quad B^0_1 \\ \beta \quad satisfaz \quad 8.2. \end{cases}$$

Então, para $0 < \varepsilon \leq \frac{1}{8}$ temos

$$||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(\overline{B^+_{1/8}})} \leq C\cdot\left[1+||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right],$$

onde $C = C(n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), q) > 0$.

Demonstração. Seja $x_0 \in B^+_{1/8}$, novamente consideramos dois casos.

Caso $x_0 \in \Omega^-_\varepsilon$, então pela Proposição 8.0.2 temos

$$|\nabla u_\varepsilon(x_0)| \leq C\cdot\left[1+||u_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_1)}+||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B^0_1)}+g^{-1}(||f||_{L^q(B^+_1)}+||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right].$$

Caso $x_0 \in \{u_\varepsilon > \varepsilon\}$, então denotando $v_\varepsilon = u_\varepsilon - \varepsilon$, como $supp(\beta_\varepsilon) \subset [0,\varepsilon]$ segue que $\beta_\varepsilon(u_\varepsilon) = 0$ em $\{u_\varepsilon > \varepsilon\}$. Daí temos que a função v_ε é solução no sentido das distribuições do seguinte problema de fronteira livre

$$\begin{cases} \triangle_g v_\varepsilon = f \quad \text{em} \quad B^+_{1/2} \cap \{v_\varepsilon > 0\} \\ |\nabla v_\varepsilon| \leq \psi \quad \text{em} \quad F(v_\varepsilon) \\ v_\varepsilon = \varphi - \varepsilon \quad \text{em} \quad B^0_{1/2}, \end{cases}$$

onde tomamos

$$\psi(x) \equiv C \cdot \left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)} + ||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right],$$

para $C = C(n, g_0, \delta, G(1), \tilde{G}(1), q) > 0$ a mesma constante da Proposição 8.0.2. Pois sendo

$$F(v_\varepsilon) = \partial\{v_\varepsilon > 0\} \cap B^+_{1/2} \subset \{u_\varepsilon \leq \varepsilon\} \cap B^+_{1/2} = \Omega^-_\varepsilon \cap B^+_{1/2},$$

segue da Proposição 8.0.2 que

$$|\nabla v_\varepsilon(x)| \leq ||\nabla u_\varepsilon||_{L^\infty(\Omega^-_\varepsilon \cap B^+_{1/2})} \leq \psi(x) \quad \forall x \in F(v_\varepsilon).$$

Então uma vez que $\triangle_g v_\varepsilon \geq f$ em B_1^+, segue do resultado obtido para soluções de Problemas de Fronteira Livre Teorema 7.0.1

$$\begin{aligned} |\nabla u_\varepsilon(x_0)| &\leq ||\nabla v_\varepsilon||_{L^\infty(B^+_{1/8})} \\ &\leq C \cdot \left[\sup_{F(v_\varepsilon)} \psi + ||v_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi - \varepsilon||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)})\right] \\ &\leq 2C \cdot \left[1 + ||u_\varepsilon||_{L^\infty(B_1^+)} + ||\varphi||_{C^{1,\alpha}(B_1^0)} + g^{-1}(||f||_{L^q(B_1^+)} + ||\beta_\varepsilon||_{L^\infty(\mathbb{R})})\right]. \end{aligned}$$

□

REFERÊNCIAS

ADAMS, R. A.; FOURNIER, J. J. **Sobolev spaces**. [*S. l.*]: Elsevier, 2003.

BRAGA, J. E. M. **Problemas variacionais de fronteira livre com duas fases e resultados do tipo Phragmén-Lindelöf regidos por equações elípticas não lineares singulares/degeneradas** 2015, 126f. Tese (Doutorado em Matemática) - Centro de Ciências, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza. 2015.

BRAGA, J. E. M. On the Lipschitz regularity and asymptotic behaviour of the free boundary for classes of minima of inhomogeneous two-phase Alt-Caffarelli functionals in Orlicz spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Germany, v. 197, p. 1885–1921, 2018.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R. Up to the boundary gradient estimates for viscosity solutions to nonlinear free boundary problems with unbounded measurable ingredients. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, Germany, v. 61, n. 5, p. 197, 2022.

BRAGA, J. E. M.; MOREIRA, D. R.; SOUSA, J. W. V. de. An inhomogeneous version of the Carleson estimate for singular/degenerate nonlinear equations. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Heidelberg,,v. 202, p. 1–19, 2023.

BRAGA J. M, C. J. G.; MOREIRA, D. R. Uniform Lipschitz estimates up to the boundary for singular perturbation problem for some nonlinear elliptic PDEs with unbounded ingredients. **Nonlinear Analysis**, United Kingdom, v. 232, p. 113283, 2023.

CIANCHI, A.; MAZ'YA, V. G. Second-order two-sided estimates in nonlinear elliptic problems. **Archive for Rational Mechanics and Analysis**, Germany, v. 229, p. 569–599, 2018.

DIBENEDETTO, E. **C1+ alpha local regularity of weak solutions of degenerate elliptic equations**. [*S. l.*]: University of Wisconsin, 1982.

EVANS, L. C. **Partial differential equations**. Providence, RI: American Mathematical Society., 2022. (Graduate studies in mathematics, 19).

GIAQUINTA, M.; MARTINAZZI, L. **An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs**. [*S. l.*]: Springer Science & Business Media, 2013.

GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin : Springer, 1977. (Classics in mathematics, 224).

GIUSTI, E. **Direct methods in the calculus of variations**. New Jersey: World Scientific, 2003.

LADYZHENSKAYA O. A, U. N. N. **Linear and quasilinear elliptic equations**. New York: Academic Press, 1968. (Mathematics in Science and Engineering, v. 46).

LEITÃO, R.; QUEIROZ, O. S. de; TEIXEIRA, E. V. Regularity for degenerate two-phase free boundary problems. **Annales de l'Institut Henri Poincaré C**, France, v. 32, n. 4,, p. 741–762, 2015.

LIEBERMAN, G. Regularized distance and its applications. **Pacific Journal of Mathematics**, United States, v. 117, n. 2, p. 329–352, 1985.

LIEBERMAN, G. M. Interior gradient bounds for non-uniformly parabolic equations. **Indiana University Mathematics Journal**, United States, v. 32, n. 4, p. 579–601, 1983.

LIEBERMAN, G. M. The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continuously differentiable boundary data. **Communications in partial differential equations**, United States, v. 11, n. 2, p. 167–229, 1986.

LIEBERMAN, G. M. Boundary regularity for solutions of degenerate elliptic equations. **Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications**, United Kingdom, v. 12, n. 11, p. 1203–1219, 1988.

LIEBERMAN, G. M. The natural generalization of the natural conditions of Ladyzhenskaya and Urall'tseva for elliptic equations. **Communications in Partial Differential Equations**, United States, v. 16, n. 2-3, p. 311–361, 1991.

MARTÍNEZ, S.; WOLANSKI, N. A minimum problem with free boundary in Orlicz spaces. **Advances in Mathematics**, United States, v. 218, n. 6, p. 1914–1971, 2008.

PUCCI, P.; SERRIN, J. B. **The maximum principle**. [s.l]: Springer Science & Business Media, 2007 (Progress in nonlinear differential equations and their applications, v. 73).

SIMON, L. Interior gradient bounds for non-uniformly elliptic equations. **Indiana University Mathematics Journal**, United States, v. 25, n. 9, p. 821–855, 1976.

ZHENG, J.; FENG, B.; ZHAO, P. Regularity of minimizers in the two-phase free boundary problems in orlicz–sobolev spaces. **Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen**, [s. l.], v. 36, n. 1, p. 37–47, 2017.

ZHENG, J.; TAVARES, L. S. A free boundary problem with subcritical exponents in orlicz spaces. **Annali di Matematica Pura ed Applicata**, Germany, v. 201, p. 1–37, 2022.