UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA
MESTRADO ACADÊMICO EM MATEMÁTICA

RENAN BRAZ PARENTE

GRÁFICOS COM CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

FORTALEZA
2023

RENAN BRAZ PARENTE

GRÁFICOS COM CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Orientador: Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral.

FORTALEZA

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação
Universidade Federal do Ceará
Sistema de Bibliotecas
Gerada automaticamente pelo módulo Catalog, mediante os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

P252g Parente, Renan Braz.
Gráficos com curvatura média prescrita / Renan Braz Parente. – 2023.
78 f.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal do Ceará, Centro de Ciências, Programa de Pós-Graduação em Matemática, Fortaleza, 2023.
Orientação: Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral.

1. Equações diferenciais parciais elípticas. 2. Equações quasilineares. 3. Equação da curvatura média. 4. Estimativa de Schauder. 5. Estimativas a priori. I. Título.

CDD 510

RENAN BRAZ PARENTE

GRÁFICOS COM CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática do Centro de Ciências da Universidade Federal do Ceará, como requisito parcial à obtenção do título de mestre em Matemática. Área de Concentração: Geometria Diferencial.

Aprovada em: 13/07/2023.

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. Rafael Montezuma Pinheiro Cabral (Orientador)
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Prof. Dr. Marco Magliaro
Universidade Federal do Ceará (UFC)

Profa. Dra. Rayssa Helena Aires de Lima Caju
Universidad de Chile (UCh)

À memória de minha mãe, Antonia Fátima Braz Parente.

AGRADECIMENTOS

Ao meu orientador Rafael Montezuma pela ajuda e paciência durante a elaboração deste trabalho.

Aos professores do departamento de matemática da UFC, em especial aos professores Diego Moreira, Antonio Caminha e Fábio Montenegro por sua orientação no passado.

Aos amigos que fiz no decorrer de minha educação matemática, Rodrigo Matos, Elisafã Braga, Esdras Muniz, Luiz Paulo e outros que a margem é pequena demais para conter.

Aos colegas de trabalho na UECE, Eduardo Garcez, Danuso Rocha, Leo Ivo, Valricélio Menezes e outros que direta ou indiretamente me convenceram que não era tarde demais para retomar minha formação matemática.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

"We cannot solve our problems with the same thinking we used when we created them"
(Albert Einstein)

RESUMO

Neste trabalho, estudamos o problema de existência de gráficos com curvatura média prescrita em espaços euclidianos. Analiticamente o problema consiste em uma EDP quasilinear elíptica com condição de Dirichlet. Para manter a apresentação autocontida, mostramos os resultados relevantes da teoria de equações diferenciais parciais elípticas lineares e quasilineares. Para equações lineares, mostramos a estimativa de Schauder para soluções clássicas e aplicamos o método da continuidade para obter um teorema de existência de soluções para o problema de Dirichlet linear. Para equações quasilineares, mostramos uma versão do princípio da comparação e usamos o método do ponto fixo para mostrar que a solubilidade de equações quasilineares está ligada à existência de estimativas a priori adequadas para soluções. Munidos destes resultados, estabelecemos hipóteses adequadas para a demonstração de estimativas a priori para soluções da equação dos gráficos com curvatura prescrita, o que conduz ao resultado final do trabalho.

Palavras-chave: equações diferenciais parciais elípticas; equações quasilineares; equação da curvatura média; estimativa de Schauder; estimativas a priori.

ABSTRACT

In this work, we shall study the problem of existence of graphs with prescribed mean curvature in euclidean spaces. Analytically the problem consists of a quasilinear elliptic equation with Dirichlet condition. To keep the presentation self-contained, we show the relevant results of the theory or linear and quasilinear elliptic partial differential equations. For linear equations, we prove the Schauder estimate for classical solutions, and apply the continuity method to obtain an existence theorem for solutions of the linear Dirichlet problem. For quasilinear equations, we prove a version of the comparison principle, and use the fixed point method to show that solvability of quasilinear equations is connected to the existence of appropriate a priori estimates for solutions. Armed with these results, we establish appropriate hypothesis for the demonstration of a priori estimates for solutions of the equation of graphs with prescribed mean curvature, which leads to the final result of the work.

Keywords: elliptic partial differential equations; quasilinear equations; mean curvature equation; Schauder estimate; a priori estimates.

LISTA DE SÍMBOLOS

Ω	Domínio (isto é, um conjunto aberto e conexo) em $\mathbb{R}^n$
$\partial\Omega$	Fronteira de Ω
$\overline{\Omega}$	Fecho de Ω
dist	Distância euclideana
$B_r(x)$	Bola aberta de centro x e raio r
$A \Subset B$	$\overline{A}$ é compacto e $\overline{A} \subset B$
δ_{ij}	Delta de Kronecker
$\equiv$	$f \equiv g$ quando $f(x) = g(x)$ para todo x no qual f e g estão definidas.
Du	Gradiente de u
$D_i u$	i-ésima componente de Du
$D_{ij}u$	$D_i(D_j u)$
$D^\beta u$	Notação de multi-índice para derivade. Se $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ temos $D^\beta u = \frac{\partial^{\lvert\beta\rvert} u}{\partial x_1^{\beta_1} \ldots \partial x_n^{\beta_n}} u$, onde $\lvert\beta\rvert = \beta_1 + \cdots + \beta_n$.
$D^2 u$	Matriz Hessiana de u.
div	Operador divergente
Δ	Operador Laplaciano
$C^k(\Omega)$	Conjunto das funções com domínio Ω com derivadas contínuas até a ordem k.
$C^{k,\alpha}(\Omega)$	Conjunto das funções em $C^k(\Omega)$ com derivadas de ordem k Hölder contínuas.
$C_c^k(\Omega)$	Conjunto das funções $u \in C^k(\Omega)$ tais que $\{x; u(x) \neq 0\} \Subset \Omega$
$W^{k,p}(\Omega)$	Espaço de Sobolev $\{u \in L^p(\Omega); D^\beta u \in L^p(\Omega), \forall \lvert\beta\rvert \leq k\}$
$W_0^{k,p}(\Omega)$	Fecho de $C_c^k(\Omega)$ em $W^{k,p}(\Omega)$
$\lvert\Omega\rvert$	Medida de Lebesgue n-dimensional de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$
$\lvert\partial\Omega\rvert$	"Área"de $\partial\Omega$, mais precisamente, $\lvert\partial\Omega\rvert = \int_{\partial\Omega} 1$

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Nosso objetivo neste trabalho é demonstrar um resultado de existência de soluções para o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado.

A expressão $\operatorname{div}\left(\dfrac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)(x)$ calcula a curvatura média do gráfico de u no ponto $(x,u(x))$, então queremos saber se existe um gráfico cuja curvatura é dada pela função prescritora $\mathscr{H}(x,z)$ e tem como bordo $\{(x,\varphi(x)) : x \in \partial\Omega\}$.

Este problema tem suas orígens no século XVIII nos trabalhos de Lagrange, que queria encontrar entre todas as superfícies com bordo fixo aquela que tem menor área. Pode ser mostrado com técnicas do cálculo das variações que as superfícies minimizantes da área tem curvatura média nula. Por este motivo superfícies com curvatura média nula são chamadas superfícies mínimas. Então o gráfico de u é uma superfície mínima se e somente se u é solução de

$$\operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = 0$$

em seu domínio.

Em seu trabalho seminal de 1969 [12], James Serrin demonstrou um resultado de existência de soluções de (1.1) no caso particular em que a função prescritora $\mathscr{H}$ não depende da altura, isto é $\mathscr{H}(x,z) = \bar{\mathscr{H}}(x)$.

Nesta dissertação veremos que as idéias de Serrin podem ser adaptadas para obter um resultado de existência onde a função prescritora pode depender da altura. Seguimos [11] como referência princípal.

O trabalho está organizado da seguinte maneira:

No capítulo 2 discutimos conceitos e resultados de geometria diferencial que serão usados nos capítulos seguintes. Na seção 2.1 mostramos a fórmula da curvatura média de um gráfico. A seção 2.2 tem como objetivo mostrar que a função distância para uma superfície compacta tem o mesmo grau de regularidade da superfície numa vizinhança aberta desta, além calcular as derivadas da função distancia até a ordem 2. Na seção 2.3 discutimos a derivada covariante, gradiente e divergencia em hipersuperfícies e introduzimos o operador de Laplace-Beltrami. Por todo este capítulo o objetivo principal é minimizar pré-requisitos, apenas noções de geometria diferencial em $\mathbb{R}^n$ são assumidas, conhecimentos de geometria Riemanniana não são necessários.

O capítulo 3 lida com a estimativa de Schauder e suas consequências. Este capítulo tem como objetivo tornar o trabalho autocontido, coletando os resultados da teoria de equações elípticas lineares que serão usados no tratamento da equação da curvatura média prescrita no capítulo seguinte. A estimativa de Schauder primeiro apareceu na literatura em 1934 (ver [10]) , desde então surgiram várias demonstrações diferentes. Aqui seguimos uma abordagem devida a Leon Simon [13].

No capítulo 4 finalmente lidamos com a equação da curvatura média prescrita. As seções 4.1 a 4.3 estabelecem resultados de natureza mais geral, lidando com uma ampla classe de equações elípticas quasilineares. As seções 4.4 a 4.6 visam o estabelecimento de estimativas a priori para soluções da equação 1.1. Na seção 4.7 os resultados anteriores são coletados para gerar um teorema de existência e unicidade de soluções de 1.1 que é nosso objetivo principal.

2 PRELIMINARES GEOMÉTRICOS

Neste capítulo introduzimos conceitos e ferramentas geométricas a serem usados no estudo do problema dos gráficos com curvatura prescrita nos capítulos seguintes. Aqui nosso principal objetivo é minimizar os pré-requesitos, apenas noções básicas de geometria diferencial são assumidas.

2.1 A curvatura média de um gráfico

Seja M uma hipersuperfície em $\mathbb{R}^{n+1}$ de classe C^k, com $k \geq 2$. A primeira forma fundamental de M em $p \in M$ é a restrição ao espaço tangente T_pM do produto interno de $\mathbb{R}^{n+1}$. Fixada uma base para T_pM, $\{v_i\}_{i=1}^n$, definimos g_{ij} a matriz da primeira forma fundamental nesta base, isto é, $g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle$. Denotamos por g^{ij} a matriz inversa, $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$.

Se M é orientável e $N : M \to S^n$ é um campo vetorial normal ao longo de M, para $p \in M$, a aplicação $A_p = -dN_p : T_pM \to T_pM$ é chamada aplicação de Weingarten, ou operador forma em p e é um operador auto-adjunto [6]. Os autovalores da aplicação de Weingarten são chamados curvaturas principais de M em p, e o traço deste operador é chamado a curvatura média em p, denotada $H(p)$.

Definimos a segunda forma fundamental de M em p como a forma bilinear simétrica $II_p(v,w) = -\langle dN_p(v), w \rangle$, para $u, v \in T_pM$. Com a base $\{v_i\}_{i=1}^n$ de T_pM fixada anteriormente obtemos a matriz $h_{ij} = II_p(v_i, v_j)$.

Se (a_{ij}) é a matriz de A_p na mesma base temos:

$$h_{ij} = \langle A_p(v_i), v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \langle v_k, v_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} g_{kj}$$

Assim temos a identidade matricial $(h_{ij}) = (a_{ij})(g_{ij})$, ou equivalentemente:

$$(a_{ij}) = (h_{ij})(g^{ij}) \tag{2.1}$$

e portanto obtemos a seguinte fórmula para a curvatura média:

$$H = tr(A_p) = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} h_{ij} \tag{2.2}$$

Agora no caso de interesse em que M é o gráfico sobre o domínio $U \subset \mathbb{R}^n$ da função $u \in C^2(U)$, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & U & \to & \mathbb{R}^{n+1} \\ & x & \mapsto & (x, u(x)) \end{array} \tag{2.3}$$

É uma parametrização global de M, de modo que em $p = (x, u(x))$ obtemos a seguinte base para T_pM:

$$v_i = D_i\phi = e_i + D_iu\, e_{n+1}, \quad i = 1, \ldots, n \tag{2.4}$$

Onde $\{e_1, \ldots, e_{n+1}\}$ é a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$. Portanto obtemos os coeficientes da primeira forma fundamental:

$$g_{ij} = \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij} + D_iuD_ju \tag{2.5}$$

Introduzindo a notação $W := \sqrt{1 + |Du|^2}$ pode-se verificar com cálculo direto que a matriz inversa é:

$$g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{D_iuD_ju}{W^2} \tag{2.6}$$

Notamos ainda que $N = \dfrac{(-Du, 1)}{W}$ é um campo vetorial normal a M. Portanto obtemos a expressão dos coeficientes da segunda forma fundamental:

$$h_{ij} = -\langle D_iN, D_j\phi \rangle = \langle N, D_iD_j\phi \rangle = \frac{D_iD_ju}{W} \tag{2.7}$$

Obtemos então de 2.2 que:

$$H = \frac{1}{W} \sum_{i,j=1}^{n} \left(\delta_{ij} - \frac{D_iuD_ju}{W^2} \right) D_iD_ju \tag{2.8}$$

Computação direta mostra que a equação acima pode ser reescrita na forma:

$$H = \operatorname{div} \left(\frac{Du}{\sqrt{1 + |Du|^2}} \right) \tag{2.9}$$

2.2 Vizinhança tubular e função distância

Seja $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície compacta de classe C^k, com $k \geq 2$. Nesta seção estamos interessados na função $\operatorname{dist}(x, M) = \inf\{|x - p|, p \in M\}$. É fácil ver que esta função é lipschitz contínua, aqui demonstraremos propriedades de diferenciabilidade para esta função.

Como M é compacta, para qualquer $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ existe um $p_x \in M$ tal que $\operatorname{dist}(x, M) = |x - p_x|$.

Lema 2.2.1. *Se $p_x \in M$ é tal que $dist(x, M) = |x - p_x|$ então x está na reta normal a M por p_x.*

Demonstração. Para $v \in T_{p_x}M$ qualquer, existe uma curva $\alpha : I \to M$ com $\alpha(0) = p_x$ e $\alpha'(0) = v$. Por hipótese, $t = 0$ é ponto de mínimo da função $f(t) = |\alpha(t) - x|^2$, portanto:

$$0 = f'(0) = 2\langle \alpha(0) - x, \alpha'(0) \rangle = 2\langle p_x - x, v \rangle$$

Vemos então que $x - p_x$ é normal ao plano tangente em p_x, o que mostra o lema. □

Pelo teorema de Samelson [9] M é necessáriamente orientável. Se N é um campo normal unitário em M, dado $p \in M$ denotaremos por $N_\delta(p)$ o segmento aberto da reta normal a M centrada em p de raio δ. Mais especificamente, $N_\delta(p) = \{p + tN(p), t \in (-\delta, \delta)\}$.

Se denotamos $N_\delta(M) = \bigcup_{p \in M} N_\delta(p)$ temos

Lema 2.2.2. $N_\delta(M) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}, dist(x, M) < \delta\}$

Demonstração. Se $x \in N_\delta(M)$ temos $x \in N_\delta(p)$ para algum $p \in M$, portanto $\text{dist}(x, M) \leq |x - p| < \delta$.

Reciprocamente, se $\text{dist}(x, M) < \delta$, sendo M compacta existe $p_x \in M$ tal que $\text{dist}(x, M) = |x - p_x|$, mas então do lema 2.2.1 vemos que $x \in N_\delta(p_x) \subset N_\delta(M)$. □

Vemos então que $N_\delta(M)$ é aberto em $\mathbb{R}^{n+1}$. Definimos a função $F : M \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por

$$F(p, t) = p + tN(p) \tag{2.10}$$

Como $N \in C^{k-1}(M)$, vemos que $F \in C^{k-1}(M \times \mathbb{R})$. Ademais observamos que $F(\{p\} \times (-\delta, \delta)) = N_\delta(p)$ e $F(M \times (-\delta, \delta)) = N_\delta(M)$.

Definição 2.1 (Vizinhança Tubular)**.** Dizemos que $N_\delta(M)$ é uma vizinhança tubular de M se a aplicação $F : M \times (-\delta, \delta) \to N_\delta(M)$ definida por 2.10 é um difeomorfismo.

Teorema 2.2.3 (Existência de Vizinhanças Tubulares)**.** *Se M é uma hipersuperfície compacta, existe $\mu > 0$ tal que $N_\mu(M)$ é uma vizinhança tubular*

Demonstração. Se $p \in M$ temos $dF_{(p,0)}(v, 0) = v$ para todo $v \in T_pM$ e $dF_{(p,0)}(0, 1) = N(p)$, portanto $dF_{(p,0)}$ é um isomorfismo.

Pelo teorema da função inversa existem $V_p \subset M$ uma vizinhança de p em M e $\delta_p > 0$ tais que:

$$F|_{V_p \times (-\delta_p, \delta_p)} : V_p \times (-\delta_p, \delta_p) \to F(V_p \times (-\delta_p, \delta_p)) = N_{\delta_p}(V_p)$$

é um difeomorfismo.

Como M é compacta, podemos cobrir M com um número finito de vizinhanças V_p acima. Tomando então δ_0 como o menor dos δ_p destas vizinhanças vemos que $F|_{M\times(-\delta_0,\delta_0)}$: $M\times(-\delta_0,\delta_0)\to N_{\delta_0}(M)$ é um difeomorfismo local.

Resta então mostrar que podemos escolher $\mu\in(0,\delta_0)$ de modo que $F|_{M\times(-\mu,\mu)}$ seja injetiva, o que equivale a afirmar que os segmentos $N_\mu(p)$ são dois a dois disjuntos.

Suponha que tal μ não exista. Então para todo $n\in\mathbb{N}$ existem $p_n,q_n\in M$, com $p_n\neq q_n$ e

$$N_{1/n}(p_n)\cap N_{1/n}(q_n)\neq\varnothing$$

Como M é compacta, passando a subsequencias se necessário podemos assumir que $\lim p_n=p$ e $\lim q_n=q$, com $p,q\in M$.

Como existe $r_n\in N_{1/n}(p_n)\cap N_{1/n}(q_n)$ temos

$$|p_n-q_n|\leq|p_n-r_n|+|r_n-q_n|<\frac{2}{n}$$

e tomando limite vemos que $p=q$.

Como vimos acima, existem então V_q e δ_q tais que $F|_{V_q\times(-\delta_q,\delta_q)}$ é injetiva. Agora existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq n_0\implies\begin{cases}p_n,q_n\in V_q\\1/n<\delta_q\end{cases}$$

Portanto para $n>n_0$ teremos a contradição

$$N_{1/n}(p_n)\cap N_{1/n}(q_n)\subset N_{\delta_q}(p_n)\cap N_{\delta_q}(q_n)=\varnothing$$

Concluindo a demonstração. $\square$

Se $N_\mu(M)$ é vizinhança tubular, definimos as funções π e d por:

$$F^{-1}(x)=(\pi(x),d(x)),\text{ para }x\in N_\mu(M)\tag{2.11}$$

Lema 2.2.4. *Se $N_\mu(M)$ é uma vizinhança tubular da hipersuperfície compacta M e as funções π e d são dadas por 2.11, então para $x\in N_\mu(M)$ temos*

i $\pi(x)$ é o único ponto de M mais proximo de x, isto é, $|x-\pi(x)|=dist(x,M)$ e $|x-p|>dist(x,M)$ para todo $p\in M$, $p\neq\pi(x)$

ii $|d(x)| = dist(x,M)$.

Demonstração. Temos $x = \pi(x) + d(x)N(\pi(x))$, de modo que $x \in N_\mu((\pi(x)))$. Se houvesse $p \in M$, $p \neq \pi(x)$ tal que $|x - p| = \text{dist}(x,M)$, pelo lema 2.2.1 deveriamos ter $x \in N_\mu(p)$, mas isto contradiria a hipótese de que $N_\mu(M)$ é vizinhança tubular. Segue então:

$$\text{dist}(x,M) = |x - \pi(x)| = |d(x)N(\pi(x))| = |d(x)|$$

□

Observação 2.2.1. *Da demonstração acima vemos que d é a função dist(x,M) adicionada de um sinal que depende de que lado do seguimento normal o ponto x está localizado.*

Como $F \in C^{k-1}(M \times (0,\mu))$, segue do teorema da função inversa que $\pi, d \in C^{k-1}(N_\mu(M))$. O proximo resultado melhora a regularidade de d:

Lema 2.2.5. *Se $N_\mu(M)$ é uma vizinhança tubular da hipersuperfície compacta M, então $Dd(x) = N(\pi(x))$, para todo $x \in N_\mu(M)$. Portanto $d \in C^k(N_\mu(M))$*

Demonstração. Fixe $x_0 \in N_\mu(M)$, assumimos a princípio que $d(x_0) > 0$, então x_0 é um mínimo local para a função $f : N_\mu(M) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$f(x) = |x - \pi(x_0)| - d(x)$$

Portanto $Df(x_0) = 0$, como $Df(x) = \dfrac{x - \pi(x_0)}{|x - \pi(x_0)|} - Dd(x)$ segue que:

$$Dd(x_0) = \frac{x_0 - \pi(x_0)}{|x_0 - \pi(x_0)|} = N(\pi(x_0))$$

No caso $d(x_0) < 0$ a demonstração é análoga, considerando a função $g(x) = |x - \pi(x_0)| + d(x)$. Por continuidade o resultado se extende ao caso $d(x_0) = 0$.

Como as funções N e π são de classe C^{k-1}, vemos que o gradiente de d é de classe C^{k-1}, e portanto $d \in C^k(N_\mu(M))$. □

No capítulo 4 precisaremos de informação sobre o laplaciano da função d. Como o laplaciano é invariante por rotações do sistema de coordenadas escolheremos um sistema de coordenadas conveniente para simplificar os cálculos.

Dado $p_0 \in M$, a menos de uma rotação no sistema de coordenadas podemos assumir $N(p_0) = e_{n+1}$.

Nestas condições existe uma vizinhança V de p_0 tal que $M \cap V$ é o gráfico de uma função $u \in C^k(U)$, onde $U = \mathscr{P}(M \cap V)$, sendo $\mathscr{P} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ a projeção que elimina a última coordenada. Por conveniencia usaremos a notação $p' := \mathscr{P}(p)$.

Podemos então parametrizar $M \cap V$ pela função γ dada em 2.3.

Temos $N(p) = \dfrac{(-Du(p'),1)}{\sqrt{1+|Du(p')|^2}}$ em $M \cap V$ e portanto devemos ter $Du(p'_0) = 0$. E de 2.4 a base associada a esta parametrização em p_0 é $v_i = e_i$, para $i = 1, \ldots, n$.

Segue das equações 2.7, 2.6 e 2.1 que

$$h_{ij}(p_0) = a_{ij}(p_0) = D_i D_j u(p'_0) \tag{2.12}$$

Portanto os autovalores da Hessiana $D^2u(p'_0)$ são as curvaturas principais $(\kappa_1, \ldots, \kappa_n)$ e rotacionando o sistema de coordenadas em torno de e_{n+1} podemos assumir que

$$D^2u(p'_0) = \operatorname{diag}(\kappa_1, \ldots, \kappa_n) \tag{2.13}$$

Um sistema de coordenadas satisfazendo as condições acima será chamado um sistema de coordenadas principais em p_0.

Lema 2.2.6. *Se $N_\mu(M)$ é uma vizinhança tubular da hipersuperfície compacta M e $x_0 \in N_\mu(M)$. Sejam $p_0 = \pi(x_0)$ e $d_0 = d(x_0)$, então em termos de um sistema de coordenadas principais em p_0 teremos:*

$$D^2d(x_0) = diag\left[\frac{-\kappa_1}{1-d_0\kappa_1}, \ldots, \frac{-\kappa_n}{1-d_0\kappa_n}, 0\right]$$

Onde $\kappa_1, \ldots, \kappa_n$ são as curvaturas principais de M em p_0.

Demonstração. Como $N(p_0) = e_{n+1}$, pelo lema 2.2.5 vemos que Dd é constante no segmento $\{p_0 + te_{n+1}, t \in (-\mu, \mu)\}$ que contém o ponto x_0. Portanto:

$$D_i D_{n+1} d(x_0) = D_{n+1} D_i d(x_0) = 0, \text{ para } i = 1, \ldots, n+1$$

Para calcular as outras entradas de $D^2d(x_0)$, sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ e $u \in C^k(U)$ como na discussão acima, considere $n(y) := N \circ \gamma(y) = \dfrac{(-Du(y),1)}{\sqrt{1+|Du(y)|^2}}$ a expressão do campo normal em coordenadas locais. De 2.12 e 2.13 obtemos em $p'_0 = \mathscr{P}(p_0)$ que:

$$\langle D_i n(p'_0), e_j \rangle = -\delta_{ij}\kappa_j$$

Portanto temos a matriz jacobiana:

$$Dn(p'_0) = [-\kappa_1 e_1, \ldots, -\kappa_n e_n] \tag{2.14}$$

Considere agora a função $G : U \times (-\mu,\mu) \to N_\mu(M)$ que expressa a função F dada em 2.10 em coordenadas locais, isto é

$$G(y,t) = F(\gamma(y),t) = (y,u(y)) + n(y)t$$

Se $\overline{\pi} = \mathscr{P} \circ \pi$ é a expressão de π em coordenadas locais temos então

$$G^{-1}(x) = (\overline{\pi}(x), d(x))$$

. Usando 2.14 calculamos também a matriz jacobiana de G em (p_0', d_0),

$$DG(p_0', d_0) = \operatorname{diag}[1-\kappa_1 d_0, \ldots, 1-\kappa_n d_0, 1]$$

Segue

$$DG^{-1}(x_0) = \operatorname{diag}\left[\frac{1}{1-\kappa_1 d_0}, \ldots, \frac{1}{1-\kappa_n d_0}, 1\right] \tag{2.15}$$

Temos do lema 2.2.5 que $Dd(x) = n(\overline{\pi}(x))$. Portanto, se $\overline{\pi}_i$, n_i denotam as funções coordenadas de $\overline{\pi}$ e n, das equações 2.14 e 2.15 obtemos as derivadas destas funções coordenada, de modo que para $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ temos finalmente:

$$D_i D_j d(x_0) = D_i(n_j \circ \overline{\pi})(x_0) = \sum_{k=1}^{n+1} D_k n_j(p_0') D_i \overline{\pi}_k(x_0) = \delta_{ij} \frac{-\kappa_i}{1-d_0\kappa_i}$$

$\square$

Observação 2.2.2. *Como F é um difeomorfismo em $M \times (-\mu,\mu)$, vemos que G também deve ser um difeomorfismo em $U \times (-\mu,\mu)$, de modo que devemos ter* $\mu \leq \dfrac{1}{\sup_{i=1,\ldots,n, p\in M} |\kappa_i(p)|}$.

2.3 Operadores diferenciais em hipersuperfícies

Nesta seção estamos interessados em noções de derivada numa hipersuperfície. Adaptaremos as noções de derivada direcional, gradiente, divergente e laplaciano para aplicações definidas numa hipersuperfície. Como nas seções anteriores $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é uma hipersuperfície de classe C^k, com $k \geq 2$ orientada pela aplicação de gauss $N : M \to S^n$.

Um campo vetorial em M é uma aplicação $X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ tal que $X(p) \in T_pM, \forall p \in M$. Se $X \in C^1(M, \mathbb{R}^{n+1})$ e $v \in T_pM$, podemos definir a derivada direcional de X no ponto p e na direção v como $D_vX(p) := dX_p(v)$. Mais específicamente, se $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ é uma curva com $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = v$ então $D_vX(p) = \lim_{t\to 0} \dfrac{X(\alpha(t)) - X(p)}{t}$.

Agora se $Y : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ é outro campo vetorial em M de classe C^1, podemos definir a derivada do campo X na direção Y como a aplicação $D_Y X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $D_Y X(p) := D_{Y(p)} X(p)$.

A noção de derivada direcional acima tem um problema fundamental que $D_Y X$ não é necessariamente um campo vetorial em M, pois a derivida de um campo em M numa direção tangente pode ter uma componente normal. Para permitir um cálculo diferencial intrínseco à superfície se faz necessário o concetito de *derivada covariante*.

Definição 2.2 (Derivada Covariante)**.** Sejam $X, Y : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ campos vetoriais diferenciáveis em M, a derivada covariante de X na direção Y, é a aplicação $\nabla_Y X : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por:

$$\nabla_Y X(p) = \Pi_{T_pM}(D_Y X(p)) = D_Y X(p) - \langle D_Y X(p), N(p) \rangle N(p)$$

Onde Π_{T_pM} é a projeção ortogonal sobre o espaço tangente T_pM.

Vemos então que se X e Y são campos diferenciáveis em M, então $\nabla_Y X$ é um campo em M. Ademais, como $\langle X, N \rangle \equiv 0$, derivando esta expressão obtemos $\langle D_Y X, N \rangle = -\langle X, D_Y N \rangle = II(X,Y)$, onde II é a segunda forma fundamental de M. Portanto temos:

$$D_Y X = \nabla_Y X + II(X,Y)N \tag{2.16}$$

No caso de uma função escalar $f : M \to \mathbb{R}$ temos apenas um tipo de derivada direcional na direção de Y e usaremos qualquer das notações $D_Y f = \nabla_Y f = df(Y)$.

Lema 2.3.1 (Propriedades da derivada covariante)**.** *Se X, Y, Y_1, Y_2 são campos vetoriais diferenciáveis em M e f, f_1, f_2 são funções diferenciáveis em M temos:*

i $\nabla_{f_1 Y_1 + f_2 Y_2} X = f_1 \nabla_{Y_1} X + f_2 \nabla_{Y_2} X$

ii $\nabla_X (Y_1 + Y_2) = \nabla_X Y_1 + \nabla_X Y_2$

iii $\nabla_Y fX = f \nabla_Y X + \nabla_Y f \cdot X$

iv $\nabla_X \langle Y_1, Y_2 \rangle = \langle \nabla_X Y_1, Y_2 \rangle + \langle Y_1, \nabla_X Y_2 \rangle$

Demonstração. Todas as propriedades acima seguem diretamente de suas análogas para a derivada direcional. □

Pode ser mostrado (Teorema 4.6, página 138 de [6]) que a derivada covariante é uma noção intrínseca à geometria da superfície, isto é, depende apenas da primeira forma fundamental.

A seguir definimos o conceito de gradiente numa superfície.

Definição 2.3. Se $f \in C^1(M)$, o gradiente de f em $p \in M$ é o único vetor $\nabla^M f(p) \in T_pM$ tal que $\nabla_v f(p) = \langle \nabla^M f(p), v \rangle$, para todo $v \in T_pM$.

Se $v_1, \ldots, v_n$ são uma base de T_pM, podemos escrever $\nabla^M f(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i$, temos então da definição acima que:

$$\nabla_{v_j} f(p) = \sum_{i=1}^{n} c_i \langle v_i, v_j \rangle = \sum_{i=1}^{n} c_i g_{ij}$$

Que se traduz na relação matricial $(\nabla_{v_1} f(p), \ldots, \nabla_{v_n} f(p))^T = (g_{ij})(c_1, \ldots, c_n)^T$. Então obtemos seguinte fórmula para o gradiente:

$$\nabla^M f(p) = \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{n} g^{ij} \nabla_{v_i} f(p)) v_j \tag{2.17}$$

Observamos ainda que caso f esteja definida numa vizinhança de M temos:

$$\nabla^M f(p) = \Pi_{T_pM}(\nabla f(p)) \tag{2.18}$$

De fato, como a componente normal não afeta produto interno com vetores tangentes é claro que $\Pi_{T_pM}(\nabla f(p))$ satisfaz as condições da definição 2.3.

Movendo para o conceito de divergência. É possível dar definições "livres de coordenadas"para este conceito (ver [7]), mas para nossos propósitos a seguinte definição será suficiente.

Definição 2.4. Se $X \in C^1(M, \mathbb{R}^{n+1})$ é um campo vetorial em M e $f_1, \ldots, f_n$ é uma base ortonormal de T_pM, definimos a divergência de X em p como:

$$\mathrm{div}_M X(p) := \sum_{i=1}^{n} \langle D_{f_i} X, f_i \rangle$$

Para ver que a definição acima é consistente considere $\overline{X}$ uma extensão C^1 de X para um aberto que contém M. Como $f_1, \ldots, f_n, N(p)$ formam uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{n+1}$ vemos que $\mathrm{div}\overline{X}(p) = \langle D_{N(p)} \overline{X}, N(p) \rangle + \sum_{i=1}^{n} \langle D_{f_i} X, f_i \rangle$, portanto:

$$\mathrm{div}_M X(p) = \mathrm{div}\overline{X}(p) - \langle D_{N(p)} \overline{X}, N(p) \rangle$$

esta expressão não depende da escolha da base $\{f_i\}_{i=1}^{n}$.

Combinando os dois últimos conceitos adaptamos a noção de laplaciano para superfícies.

Definição 2.5 (Laplace-Beltrami)**.** Se $f \in C^2(M)$ definimos o laplaciano de f por $\Delta^M f := \mathrm{div}_M(\nabla^M f)$. O operador Δ^M é chamado operador de Laplace-Beltrami de M.

Definição 2.6. Se $v_1, \ldots, v_n : V \subset M \to \mathbb{R}^{n+1}$ são campos vetoriais num aberto V de M, dizemos que $v_1, \ldots, v_n$ formam um referencial local se para todo $p \in V$ os vetores $v_1(p), \ldots, v_n(p)$ formam uma base de T_pM.

Naturalmente se $\gamma : U \to M$ é uma parametrização de M então $\{D_i\gamma \circ \gamma^{-1}\}_{i=1}^n$ formam um referencial local em $\gamma(U)$.

Como pode ser visto em [7], quando expresso num sistema de coordenadas locais o operador de Laplace-Beltrami toma a forma:

$$\Delta^M f = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(g^{ij} \sqrt{\det g} D_j f \right) \tag{2.19}$$

Desta expressão vemos que Δ^M tem caráter elíptico.

Ao realizar cálculos com operadores diferenciais em hipersuperfícies é frequentemente útil usar um sistema de coordenadas apropriado, que simplifique os cálculos, para este propósito enunciamos o seguinte:

Lema 2.3.2 (Coordenadas Normais)**.** *Para topo $p \in M$ existe uma parametrização local de uma vizinhança de p, chamada um sistema de coordenadas normais em p, tal que, sendo $v_1, \ldots, v_n$ o referencial local associado à parametrização, $v_1(p), \ldots, v_n(p)$ é uma base ortonormal (isto é, $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$) e $\nabla_{v_i} v_j(p) = 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.*

Demonstração. Ver as páginas 131 a 133 de [7]. □

3 TEORIA DE SCHAUDER CLÁSSICA

Neste capítulo demonstraremos uma estimativa a priori para soluções de EDPs Elípticas lineares oriunda dos trabalhos de Juliusz Schauder. Nossa demonstração é devida a Leon Simon [13]. Este resultado e suas consequencias serão fundamentais na demonstração do resultado central do capítulo 4.

Por todo este capítulo assumimos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um domínio limitado. Consideramos operadores da forma:

$$Lu := \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} D_{ij} u + \sum_{i=1}^{n} b^i D_i u + cu \tag{3.1}$$

onde $a^{ij}, b^i, c : \Omega \to \mathbb{R}$ são funções limitadas, isto é $|a^{ij}|, |b^i|, |c| \leq M$. Ademais, a matriz (a^{ij}) é assumida simétrica e uniformemente elíptica, isto é, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2, \text{ para todos } x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.2}$$

Daqui em diante usaremos a *convenção notacional de Einstein* para somatórios, nesta convenção, quando um índice aparece exatamente duas vezes em um termo, fica implícito somatório sobre este índice. Com notação de Einstein o operador L pode ser reescrito como:

$$Lu := a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu$$

e a condição de elípticidade uniforme fica:

$$a^{ij}(x)\xi_i \xi_j \geq \lambda |\xi|^2$$

3.1 Normas Hölder

A estimativa de Schauder se aplica a soluções da EDP $Lu = f$ em que os coeficientes a^{ij}, b^i, c e a função f são Hölder contínuos, portanto iniciamos nosso estudo revisando as definições apropriadas.

Seja $h : \Omega \to \mathbb{R}$ e $A \subset \Omega$. Para $\alpha \in (0,1]$, definimos a semi-norma Hölder por

$$[h]_{\alpha;A} = \sup_{\substack{x,y \in A \\ x \neq y}} \frac{|h(x) - h(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Definimos os espaços:

$C^{0,\alpha}(\Omega) := \{h \in C^0(\Omega) \mid [h]_{\alpha;K} < \infty, \forall K \Subset \Omega\}$,

$C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{h \in C^0(\bar{\Omega}) \mid [h]_{\alpha;\Omega} < \infty\}$,
$C^{k,\alpha}(\Omega) := \{h \in C^k(\Omega) \mid [D^\sigma h]_{\alpha;K} < \infty, \forall K \Subset \Omega, \forall |\sigma| = k\}$,
$C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) := \{h \in C^k(\bar{\Omega}) \mid [D^\sigma h]_{\mu;\Omega} < \infty, \forall |\sigma| = k\}$

Definimos ainda as semi-normas:

$[h]_{k,0;\Omega} = |D^k h|_{0;\Omega} := \sup\limits_{|\sigma|=k} \sup\limits_{\Omega} |D^\sigma h|, \; k = 0,1,2,\ldots$
$[h]_{k,\mu;\Omega} = [D^k h]_{\mu;\Omega} := \sup\limits_{|\sigma|=k} [D^\sigma h]_{\mu;\Omega}$

Com estas semi-normas definimos as normas relacionadas:

$\|h\|_{C^k(\bar{\Omega})} = |h|_{k;\Omega} = |h|_{k,0;\Omega} := \sum\limits_{j=0}^{k} [h]_{j,0;\Omega} = \sum\limits_{j=0}^{k} |D^j h|_{0;\Omega}$,
$\|h\|_{C^{k,\alpha}(\bar{\Omega})} = |h|_{k,\alpha;\Omega} = |h|_{k;\Omega} + [h]_{k,\alpha;\Omega} = |h|_{k;\Omega} + [D^k h]_{\alpha;\Omega}$

Lema 3.1.1. *Se $f, g \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $h \in C^{0,\beta}(\mathbb{R})$ temos:*
i) $[f+g]_{\alpha;\Omega} \leq [f]_{\alpha;\Omega} + [g]_{\alpha;\Omega}$
ii) $[fg]_{\alpha;\Omega} \leq [f]_{\alpha;\Omega}[g]_{0;\Omega} + [f]_{0;\Omega}[g]_{\alpha;\Omega}$
iii) $[h \circ f]_{\beta\alpha;\Omega} \leq [h]_{\beta;\mathbb{R}}([f]_{\alpha;\Omega})^\beta$

Demonstração. Para $x, y \in \Omega$ quaisquer temos:
i) $|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \leq$
$[f]_{\alpha;\Omega}|x-y|^\alpha + [g]_{\alpha;\Omega}|x-y|^\alpha = ([f]_{\alpha;\Omega} + [g]_{\alpha;\Omega})|x-y|^\alpha$.
ii) $|(fg)(x) - (fg)(y)| = |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \leq$
$|f(x)||g(x) - g(y)| + |g(y)||f(x) - f(y)| \leq ([f]_{0;\Omega}[g]_{\alpha;\Omega} + [g]_{0;\Omega}[f]_{\alpha;\Omega})|x-y|^\alpha$
iii) $|h(f(x)) - h(f(y))| \leq [h]_{\beta;\mathbb{R}}|f(x) - f(y)|^\beta \leq [h]_{\beta;\mathbb{R}}([f]_{\alpha;\Omega}|x-y|^\alpha)^\beta \leq$
$[h]_{\beta;\mathbb{R}}([f]_{\alpha;\Omega})^\beta|x-y|^{\beta\alpha}$ □

A utilidade dos espaços $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ no estudo de EDPs elípticas se deve em parte ao seguinte resultado:

Lema 3.1.2. *Se Ω é um domínio limitado e u_m é uma sequência em $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ limitada na norma $\|\cdot\|_{C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}$, então existe uma subsequência u_{m_j} que converge na norma $\|\cdot\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ para uma função $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$*

Demonstração. Faremos indução em k.

No caso $k = 0$ observamos que se $\|u_m\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq M$, a sequência u_m é uniformemente limitada e equicontínua em $\overline{\Omega}$. Portanto segue do teorema de Arzelà-Ascoli que existe uma subsequência $u_{m_j} \xrightarrow{C^0(\overline{\Omega})} u$, ademais temos $|u_{m_j}(x) - u_{m_j}(y)| \leq M|x-y|^\alpha$ para todos $x, y \in \Omega$ e tomando limite com $j \to \infty$ seque

$$|u(x) - u(y)| \leq M|x-y|^{\alpha}$$

de modo que $u \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $[u]_{\alpha,\Omega} \leq M$.

Assumindo o resultado para $k = k_0$. Seja $\{u_m\} \subset C^{k_0+1,\alpha}(\overline{\Omega})$ uma sequência limitada na norma $\|\cdot\|_{C^{k_0+1,\alpha}(\overline{\Omega})}$. Passando a uma subsequência, se necessário, podemos assumir que $u_m \xrightarrow{C^{k_0}(\overline{\Omega})} u$.

Para todo multi-índice β com $|\beta| = k_0 + 1$ a sequência $D^{\beta}u_m$ é limitada em $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, portanto, passando a uma subsequência, podemos assumir $D^{\beta}u_m \to u^{\beta}$ uniformemente e $u^{\beta} \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Se $\beta = \sigma + e_i$ onde $|\sigma| = k_0$ temos

$$\frac{D^{\sigma}u_m(x+he_i) - D^{\sigma}u_m(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h D^{\beta}u_m(x+te_i)dt$$

Fazendo $m \to \infty$ segue $\dfrac{D^{\sigma}u(x+he_i) - D^{\sigma}u(x)}{h} = \dfrac{1}{h}\displaystyle\int_0^h u^{\beta}(x+te_i)dt$ e tomando o limite com $h \to 0$ vemos que $D^{\beta}u = u^{\beta}$.

Segue então que $u_m \xrightarrow{C^{k_0+1}(\overline{\Omega})} u \in C^{k_0+1,\alpha}(\overline{\Omega})$.

$\square$

Na linguagem da análise funcional, o resultado acima significa que a inclusão $\mathrm{i} : C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}) \to C^k(\overline{\Omega})$ é um operador compacto, isto é, leva subconjuntos limitados do domínio em subconjuntos pré-compactos do contradomínio. Por este motivo dizemos que $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ está compactamente imerso em $C^k(\overline{\Omega})$.

A seguinte desigualdade de interpolação será importante para a demonstração da estimativa de Schauder, permitindo estimar as normas das derivadas de uma função $C^{k,\alpha}$ apenas com sua norma C^0 e a seminorma holder de ordem k.

Lema 3.1.3. *Para todos $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1]$, inteiros $1 \leq l \leq k$ e bola $B_R(x_0) \subset \mathbb{R}^n$, existe $C = C(\varepsilon, \alpha, k, n)$, tal que toda $h \in C^{k,\alpha}(\bar{B}_R(x_0))$ satisfaz:*

$$R^l|D^l h|_{0;B_R(x_0)} \leq \varepsilon R^{k+\alpha}|D^k h|_{\alpha;B_R(x_0)} + C|h|_{0;B_R(x_0)}$$

Demonstração. Demonstraremos aqui apenas os casos com $l, k \in \{1,2\}$, que são os únicos que usaremos no que segue. As ideias da demonstração podem ser adaptadas por indução para mostrar o caso geral, com apenas complicações notacionais.

Podemos assumir sem perda de generalidade que $x_0 = 0$ e $0 < \varepsilon < 1/4$.

$\underline{l = 1, k = 1:}$

Sejam $h \in C^{1,\alpha}(\bar{B}_R(0))$, $\alpha \in (0,1]$ e $j \in \{1,\ldots,n\}$. Tome $x_1 \in \bar{B}_R(0)$ tal que $|D_j h(x_1)| = \sup_{B_R(0)} |D_j h|$.
Para todo $\sigma \in (0,R]$, existe $y \in B_R(0)$ tal que $x_1 \in \bar{B}_{\sigma/2}(y)$ e $B_{\sigma/2}(y) \subset B_R(0)$. Portanto para $x \in B_{\sigma/2}(y)$ temos:

$$||D_j h(x_1)| - |D_j h(x)|| \leq |D_j h(x_1) - D_j h(x)| \leq |x_1 - x|^\alpha [D_j h]_{\alpha;B_R(0)} \leq \sigma^\alpha [D_j h]_{\alpha;B_R(0)}$$

Segue que $|D_j h(x_1)| \leq |D_j h(x)| + \sigma^\alpha [D_j h]_{\alpha;B_R(0)}$ para todo $x \in B_{\sigma/2}(y)$. Portanto obtemos:

$$|D_j h|_{0;B_R(0)} \leq \inf_{B_{\sigma/2}(y)} |D_j h| + \sigma^\alpha [D_j h]_{\alpha;B_R(0)}$$

Agora para estimar $\inf_{B_{\sigma/2}(y)} |D_j h|$ consideramos o seguimento $L = \{y + t e_j \mid t \in [-\sigma/4, \sigma/4]\}$, temos:

$$2|h|_{0;B_R(x_0)} \geq |h(y + \frac{\sigma}{4} e_j) - h(y - \frac{\sigma}{4} e_j)| = \left| \int_L D_j h \right| \geq \frac{\sigma}{2} \inf_{B_{\sigma/2}(y)} |D_j h|$$

Assim temos $|D_j h|_{0;B_R(0)} \leq 4\sigma^{-1} |h|_{0;B_R(x_0)} + \sigma^\alpha [D_j h]_{\alpha;B_R(0)}$, e então:

$$|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\sigma^{-1} |h|_{0;B_R(x_0)} + \sigma^\alpha [Dh]_{\alpha;B_R(0)} \qquad \forall \sigma \in (0.R] \tag{3.3}$$

Para concluir a demonstração deste caso basta tomar $\sigma = \varepsilon^{1/\mu} R$, quando obtemos:

$$|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\varepsilon^{-1/\alpha} R^{-1} |h|_{0;B_R(x_0)} + \varepsilon R^\alpha [Dh]_{\alpha;B_R(0)}$$

Que multiplicada por R é o que queriamos.

Em preparação para os casos com $k = 2$, observamos que se $h \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_R(0))$, temos também $h \in C^{1,1}(\bar{B}_R(0))$ e ademais $[Dh]_{1;B_R(0)} \leq |D^2 h|_{0;B_R(0)}$, portanto podemos aplicar 3.3 com $\alpha = 1$ para obter:

$$|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\sigma^{-1} |h|_{0;B_R(x_0)} + \sigma |D^2 h|_{0;B_R(0)} \qquad \forall \sigma \in (0.R] \tag{3.4}$$

Observamos ainda que aplicando 3.3 às funções $D_i h$ obteremos:

$$|D^2 h|_{0;B_R(0)} \leq 4\sigma^{-1} |Dh|_{0;B_R(x_0)} + \sigma^\alpha |D^2 h|_{\alpha;B_R(0)} \qquad \forall \sigma \in (0.R] \tag{3.5}$$

$\underline{l = 1, k = 2:}$

A demonstração consiste em combinar (3.4) e (3.5) com escolhas apropriadas para σ. Para este propósito aplicamos (3.4) com $\sigma = \beta R$, $0 < \beta < 1$, e aplicamos (3.5) com $\sigma = \gamma R$, $0 < \gamma < 1$, obtemos:

$$R|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\beta^{-1}|h|_{0;B_R(x_0)} + \beta R^2|D^2h|_{0;B_R(0)} \tag{3.6}$$

e

$$R|D^2h|_{0;B_R(0)} \leq 4\gamma^{-1}|Dh|_{0;B_R(x_0)} + \gamma^{\alpha}R^{1+\alpha}|D^2h|_{\alpha;B_R(0)} \tag{3.7}$$

Substituindo (3.7) em (3.6) temos:

$$R|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\beta^{-1}|h|_{0;B_R(x_0)} + 4\beta\gamma^{-1}R|Dh|_{0;B_R(x_0)} + \beta\gamma^{\alpha}R^{2+\alpha}|D^2h|_{\alpha;B_R(0)}$$

Agora escolhemos β, γ tais que $4\beta\gamma^{-1} = 1/2$ e $\beta\gamma^{\alpha} = \varepsilon/2$, isto é possível sempre que $\varepsilon < 1/4$. Obteremos:

$$\frac{R}{2}|Dh|_{0;B_R(0)} \leq 4\beta^{-1}|h|_{0;B_R(x_0)} + \frac{\varepsilon}{2}R^{2+\alpha}|D^2h|_{\alpha;B_R(0)}$$

Que conclui a demonstração deste caso.

$\underline{l = 2, k = 2:}$

Para este caso substituímos (3.6) em (3.7) para obter:

$$R|D^2h|_{0;B_R(0)} \leq 16\beta^{-1}\gamma^{-1}R^{-1}|h|_{0;B_R(x_0)} + 4\beta\gamma^{-1}R|D^2h|_{0;B_R(0)} + \gamma^{\alpha}R^{1+\alpha}|D^2h|_{\alpha;B_R(0)}$$

E agora basta escolhermos β, γ tais que $4\beta\gamma^{-1} = 1/2$ e $\gamma^{\alpha} = \varepsilon/2$ para concluir o resultado. □

A seguir estamos interessados na aproximação de funções Hölder contínuas por funções suaves. Usamos o conceito de aproximação da identidade (mollifier), para o qual referimos ao capítulo 2 de [4].

Proposição 3.1.4. *Se $u \in C^{k,\alpha}(\Omega)$ e ϕ é uma aproximação da identidade, então para todos $0 < \beta < \alpha$ e $\Omega' \Subset \Omega$ vale $|u * \phi_\varepsilon - u|_{k,\beta;\Omega'} \xrightarrow{\varepsilon \to 0} 0$.*

Demonstração. Devido às propriedades da convolução, basta mostrar o resultado no caso $k = 0$. Lembramos que

$$u * \phi_\varepsilon(x) = \int_{B_1} \phi(z)u(x - \varepsilon z)dz$$

A integral acima esta bem definida para $x \in \Omega'$ e ε suficientemente pequeno. Lembramos também que $\int_{B_1} \phi(z)dz = 1$, de modo que

$$(u * \phi_\varepsilon - u)(x) = \int_{B_1} \phi(z)(u(x - \varepsilon z) - u(x))dz$$

Portanto

$$[u * \phi_\varepsilon - u]_{\beta;\Omega'} = \sup_{\substack{x,y \in \Omega' \\ x \neq y}} \left| \int_{B_1} \phi(z) \frac{(u(x - \varepsilon z) - u(x)) - (u(y - \varepsilon z) - u(y))}{|x-y|^\beta} dz \right|$$

Definimos

$$I(\varepsilon, x, y) := \int_{B_1} \left| \phi(z) \frac{(u(x - \varepsilon z) - u(x)) - (u(y - \varepsilon z) - u(y))}{|x-y|^\beta} \right| dz \tag{3.8}$$

Queremos então estimar $I(\varepsilon, x, y)$. Seja $\eta > 0$ qualquer, dividimos a estimativa em dois casos:

caso 1: $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, x, y) &\leq \int_{B_1} \phi(z) \frac{|u(x - \varepsilon z) - u(y - \varepsilon z)| + |u(x) - u(y)|}{|x-y|^\beta} dz \\ &\leq \int_{B_1} 2\phi(z)[u]_{\alpha;\Omega}|x-y|^{\alpha-\beta} dz \leq 2|\phi|_{0;\Omega}[u]_{\alpha;\Omega}|B_1|\delta^{\alpha-\beta} \end{aligned}$$

caso 2: $|x - y| \geq \delta$

Neste caso, como u é uniformemente contínua, para qualquer $\eta_1 > 0$ existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos $|(u(x - \varepsilon z) - u(x)| < \eta_1$, para qualquer $x \in \Omega'$, portanto

$$\begin{aligned} I(\varepsilon, x, y) &\leq \int_{B_1} \phi(z) \frac{|u(x - \varepsilon z) - u(x)| + |u(y - \varepsilon z) - u(y)|}{|x-y|^\beta} dz \\ &\leq \int_{B_1} 2\phi(z)\eta_1\delta^{-\beta} \leq 2|\phi|_{0;\Omega}|B_1|\delta^{-\beta}\eta_1 \end{aligned}$$

Escolhemos então δ suficientemente pequeno no caso 1 e para este delta escolhemos η_1 suficientemente pequeno no caso 2, de modo que $I(\varepsilon, x, y) < \eta$ para $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$. $\square$

Observação 3.1.1. *O resultado acima não se estende para $\beta = \alpha$. Mais ainda, em geral as funções suaves não são densas em $C^{k,\alpha}(\Omega)$.*

De fato, considere a função $f(x) = |x|^{1/2}$, para $x \in [-1, 1]$. É fácil ver que $f \in C^{0,1/2}([-1, 1])$. Para $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ derivável em 0 temos

$$\lim_{x \to 0} \frac{|g(x) - g(0)|}{|x|^{1/2}} = \lim_{x \to 0} \frac{|g(x) - g(0)|}{|x|} |x|^{1/2} = 0$$

Portanto para $x \in (-1,1)$ qualquer temos:

$$[f-g]_{1/2;[-1,1]} \geq \frac{|(f(x)-g(x))-(f(0)-g(0))|}{|x|^{1/2}}$$
$$\geq \left| \frac{|f(x)-f(0)|}{|x|^{1/2}} - \frac{|g(x)-g(0)|}{|x|^{1/2}} \right| = \left| 1 - \frac{|g(x)-g(0)|}{|x|^{1/2}} \right|$$

De modo que fazendo $x \to 0$ vemos que $[f-g]_{1/2;[-1,1]} \geq 1$. Portanto f não pode ser aproximada por funções com derivada na origem na norma $|\cdot|_{0,1/2,[-1,1]}$.

Finalizamos esta seção com a observação de que a semi-norma holder pode ser estimada usando o gradiente.

Mais especificamente, se $u \in C^1(\bar{\Omega})$ e Ω é um domínio convexo então

$$\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^{\alpha}} \leq |x-y|^{1-\alpha} \sup_{\Omega} |Du| \leq l^{1-\alpha} \sup_{\Omega} |Du| \tag{3.9}$$

onde $l = \sup\{|x-y| \mid x,y \in \Omega\}$ é o diâmetro de Ω.

3.2 Estimativa de Schauder local

Obteremos a estimativa de Schauder por generalizações sucessivas. Mostraremos primeiro uma versão para coeficientes constantes, em seguida uma versão local com coeficientes gerais e finalmente a versão global do resultado.

Antes de enunciar a versão a coeficientes constantes nos será útil estabelecer estimativas para derivadas de soluções de tais equações. Partimos da seguinte estimativa para funções harmonicas:

Lema 3.2.1. *Seja u harmônica em Ω (isto é, $\Delta u = 0$ em Ω). Se Ω' é qualquer subconjunto compacto de Ω então para todo multi-índice β temos*

$$\sup_{\Omega'} |D^{\beta} u| \leq \left(\frac{n|\beta|}{d} \right)^{|\beta|} \sup_{\Omega} |u|$$

Onde $d = dist(\Omega', \partial\Omega)$.

Demonstração. Ver Teorema 2.10 na página 23 de [3] □

Consideramos agora operadores da forma $\bar{L}u := \bar{a}^{ij} D_{ij} u$, onde a matriz $(\bar{a}^{ij})$ é constante e positiva definida. Ademais tomamos $\lambda, \Lambda > 0$ tais que λ é uma cota inferior para os autovalores de $(\bar{a}^{ij})$ e Λ é uma cota superior para os coeficientes $\bar{a}^{ij}$ (e portanto $n\Lambda$ é cota superior para os autovalores de $(\bar{a}^{ij})$).

Lema 3.2.2. *Seja u uma solução de $\bar{L}u = 0$ no domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\bar{L}$ descrito acima. Então, para toda bola $B_R(x_0) \subset \Omega$ e todo $0 < \gamma < 1$, existe $C = C(n, \gamma, \lambda, \Lambda)$ tal que:*

$$\sup_{B_{\gamma R}(x_0)} |Du| \leq CR^{-1} \sup_{B_R(x_0)} |u|$$

Demonstração. Assumimos sem perda de generalidade que $x_0 = 0$.

Como $(\bar{a}^{ij})$ é simétrica e positiva definida, existe uma transformação ortogonal Q do $\mathbb{R}^n$ tal que

$$Q(\bar{a}^{ij})Q^T = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

com $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n$. Seja então $P = \operatorname{diag}((\lambda_1)^{-1/2}, \ldots, (\lambda_n)^{-1/2})$, de modo que

$$PQ(\bar{a}^{ij})(PQ)^T = PQ(\bar{a}^{ij})Q^T P = (\delta_{ij})$$

Definimos então a função $\bar{u}$ no elipsoide $\mathscr{E} = (PQ)(B_R(0)) = P(B_R(0))$ por $\bar{u} = u \circ (PQ)^{-1}$. Temos então $u(x) = \bar{u}(PQ(x))$, o que nos dá

$$D^2 u = (D_{ij} u) = \left(\sum_{l,k=1}^{n} (PQ)_{li} (PQ)_{kj} D_{lk} \bar{u} \right) = (PQ)^T D^2 \bar{u} PQ$$

Onde deixamos subentendido que $D^2\bar{u}$ é aplicado em $PQ(x)$ quando D^2u é aplicado a x. Temos então

$$\bar{a}^{ij} D_{ij} u = \operatorname{tr}((\bar{a}^{ij}) D^2 u) = \operatorname{tr}((\bar{a}^{ij})(PQ)^T D^2 \bar{u} PQ) = \operatorname{tr}(PQ(\bar{a}^{ij})(PQ)^T D^2 \bar{u}) = \Delta \bar{u}$$

Seja então $\mathscr{E}' = (PQ)(B_{\gamma R}(0)) = P(B_{\gamma R}(0))$. Para $x \in \partial B_R(0)$ e $y \in B_{\gamma R}(0)$ temos

$$|PQ(x) - PQ(y)| = |PQ(x-y)| \geq \lambda_n^{-1/2} |Q(x-y)| = \lambda_n^{-1/2} |x-y|$$

De modo que podemos estimar a distância $d = \operatorname{dist}(\mathscr{E}', \partial \mathscr{E}) \geq \lambda_n^{-1/2}(1-\gamma)R \geq (n\Lambda)^{-1/2}(1-\gamma)R$. E do lema 3.2.1 obtemos:

$$\sup_{\mathscr{E}'} |D\bar{u}| \leq \left(\frac{(n\Lambda)^{1/2}}{1-\gamma} \right) R^{-1} \sup_{\mathscr{E}} |\bar{u}| = \left(\frac{(n\Lambda)^{1/2}}{1-\gamma} \right) R^{-1} \sup_{B_R(0)} |u|$$

Ademais temos $D_i u = \sum_{k=1}^{n} (PQ)_{ki} D_k \bar{u}$ e as entradas da matriz PQ são majoradas por $\lambda^{-1/2}$, de modo que

$$\sup_{B_{\gamma R}(0)} |Du| \leq n\lambda^{-1/2} \sup_{\mathscr{E}'} |D\bar{u}|$$

Completando a demonstração. $\square$

Lema 3.2.3 (Estimativa de Schauder para coeficientes constantes)**.** *Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$ uma solução de $\bar{a}^{ij}D_{ij}u = f$, onde onde a matriz $(\bar{a}^{ij})$ é constante e positiva definida, tem λ como cota inferior para seus autovalores e Λ como cota superior para seus coeficientes. Se $[D^2u]_{\alpha,\mathbb{R}^n} < \infty$ para algum $0 < \alpha < 1$, então:*

$$[D^2u]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq C[f]_{\alpha,\mathbb{R}^n}$$

Com constante $C = C(n,\lambda,\Lambda,\alpha)$.

Demonstração. A demonstração é por absurdo. Assuma que tal C não exista. Então existem sequências $\bar{a}^{ij}_m, f_m, u_m$, tais que a matriz $\bar{a}^{ij}_m$ satisfaz as condições do enunciado, $\bar{a}^{ij}_m D_{ij}u_m = f_m$ e

$$[f_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} < \frac{1}{m}[D^2u_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} < \infty$$

Pela definição da semi-norma Hölder existem ainda $x_m, y_m \in \mathbb{R}^n$, $x_m \neq y_m$ tais que

$$|D^2u_m(x_m) - D^2u_m(y_m)| \geq \left(1 - \frac{1}{m}\right)[D^2u_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n}|x_m - y_m|^\alpha \tag{3.10}$$

Sejam $\sigma_m = |x_m - y_m|$ e $\rho_m = [D^2u_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n}$, aplicaremos uma renormalização a u_m e f_m, definimos:

$$\tilde{u}_m := \sigma_m^{-2-\alpha}\rho_m^{-1}u_m(\sigma_m x + x_m), \qquad \tilde{f}_m := \sigma_m^{-\alpha}\rho_m^{-1}f_m(\sigma_m x + x_m),$$

Tais funções renormalizadas satisfazem ainda $\bar{a}^{ij}_m D_{ij}\tilde{u}_m = \tilde{f}_m$ e temos:

$$\begin{aligned}
[D^2\tilde{u}_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} &= \sup_{x\neq y}\frac{|D^2\tilde{u}_m(x) - D^2\tilde{u}_m(y)|}{|x-y|^\alpha}\\
&= \sup_{x\neq y}\frac{\sigma_m^{-\alpha}\rho_m^{-1}|D^2u_m(\sigma_m x + x_m) - D^2u_m(\sigma_m y + x_m)|}{\sigma_m^{-\alpha}|\sigma_m(x-y)|^\alpha}\\
&= \sup_{\tilde{x}\neq\tilde{y}}\frac{|D^2u_m(\tilde{x}) - D^2u_m(\tilde{y})|}{|\tilde{x}-\tilde{y}|^\alpha}\cdot\frac{1}{\rho_m} = 1
\end{aligned}$$

Analogamente vemos que $[D^2\tilde{f}_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq \dfrac{[D^2f_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n}}{\rho_m} \leq \dfrac{1}{m}$, e (3.10) pode ser reescrita como:

$$|D^2\tilde{u}_m(\eta_m) - D^2\tilde{u}_m(0)| \geq 1 - \frac{1}{m}$$

Onde $\eta_m := \sigma_m^{-1}(x_m - y_m)$ satisfaz $|\eta_m| = 1$.

Para chegar a um absurdo gostaríamos de aplicar o lema 3.1.2 para obter uma subsequência convergente de $\tilde{u}_m$, entretanto não temos limitante uniforme para estas funções. Faremos então mais uma modificação à sequência $\tilde{u}_m$. Seja τ_m o polinomio de Maclaurin de $\tilde{u}_m$ de ordem 2, isto é

$$\tau_m(x) := \tilde{u}_m(0) + D_i\tilde{u}_m(0)x^i + \frac{1}{2}D_{ij}\tilde{u}_m(0)x^ix^j$$

Lembramos que para cada $x \in \mathbb{R}^n$ existe $\theta \in (0,1)$ tal que

$$\tilde{u}_m(x) := \tilde{u}_m(0) + D_i\tilde{u}_m(0)x^i + \frac{1}{2}D_{ij}\tilde{u}_m(\theta x)x^i x^j$$

Definindo então $v_m := \tilde{u}_m - \tau_m$, temos

$$\sup_{B_R(0)} |v_m| \leq R^2 \sup_{B_R(0)} |D^2\tilde{u}_m(x) - D^2\tilde{u}_m(0)| \leq R^{2+\alpha}[D^2\tilde{u}_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} = R^{2+\alpha} \tag{3.11}$$

Vemos ainda que v_m satisfaz a seguinte equação elíptica:

$$\bar{a}_m^{ij}D_{ij}v_m = \bar{a}_m^{ij}D_{ij}\tilde{u}_m - \bar{a}_m^{ij}D_{ij}\tau_m = \tilde{f}_m - \bar{a}_m^{ij}D_{ij}\tilde{u}_m(0) = \tilde{f}_m - \tilde{f}_m(0)$$

A sequencia v_m também herda de $\tilde{u}_m$ as seguintes propriedades:

$$[D^2v_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} = 1, \ \ ||D^2v_m(\eta_m) - D^2v_m(0)|| = |D^2\tilde{u}_m(\eta_m) - D^2\tilde{u}_m(0)| \geq 1 - \frac{1}{m} \tag{3.12}$$

Agora usando a equação (3.11) e o lema 3.1.3 podemos estimar as derivadas de primeira e segunda ordem de v_m, temos para $l \in \{1,2\}$:

$$\begin{aligned} |D^l v_m|_{0,B_R(0)} &\leq \varepsilon R^{2-l+\mu}[D^2v_m]_{\mu,B_R(0)} + C_\varepsilon R^{-l}|v_m|_{0,B_R(0)} \\ &\leq \varepsilon R^{2-l+\mu} + C_\varepsilon R^{2-l+\mu} = CR^{2-l+\mu} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Nestas condições usando o lema 3.1.2 podemos obter uma subsequencia $v_{m'}$ que converge localmente uniformemente em C^2 para uma função $v \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$.

A função v então satisfaz $[D^2v]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq 1$, $D^2v(0) = 0$ e se η é um ponto de acumulação de $\eta_{m'}$ temos $|\eta| = 1$ e $|D^2v(\eta)| = 1$.

Agora se $(\bar{a}^{ij})$ é ponto de acumulação de $(\bar{a}_{m'}^{ij})$ temos $[D^2\tilde{f}_m]_{\alpha,\mathbb{R}^n} \leq \frac{1}{m} \to 0$ e $\bar{a}_m^{ij}D_{ij}v_m = \tilde{f}_m - \tilde{f}_m(0)$, de modo que passando ao limite obtemos:

$$\bar{a}^{ij}D_{ij}v = 0 \quad \text{em } \mathbb{R}^n$$

A matriz $(\bar{a}^{ij})$ também é positiva definida e satisfaz $|\bar{a}^{ij}| \leq \Lambda$. Então segue que $v \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (ver o teorema 3 na seção 6.3, página 334 de [2]).

Agora iterando o lema 3.2.2, vemos que existe $C_1 = C_1(n,\lambda,\Lambda)$ tal que:

$$\sup_{B_{R/2}(0)} |D^3v| \leq C_1R^{-3} \sup_{B_R(0)} |v|$$

Segue então de (3.11) que

$$\sup_{B_{R/2}(0)} |D^3v| \leq C_2R^{\alpha-1}$$

Fazendo $R \to \infty$ vemos então que $D^3v \equiv 0$ e portanto v tem derivadas de segunda ordem constantes, contradizendo termos $D^2v(0) = 0$ e $|D^2v(\eta)| = 1$. $\square$

Agora estamos prontos para enunciar a estimativa de Schauder local.

Observação 3.2.1. *Na demonstração do próximo teorema e de outras estimativas a priori neste capítulo usamos o mesmo símbolo C para denotar várias constantes distintas. Fazemos isto por conveniencia, evitando uso de novos índices em cada passo* $(C_1, C_2, \dots)$. *Isto não gera problemas pois o valor exato das constantes não é relevante, apenas sua existência.*

Teorema 3.2.4 (estimativa de Schauder local)**.** *Seja* $u \in C^{2,\alpha}(\bar{B}_R(x_0))$ *uma solução de* $Lu = f$ *(como em 3.1) e*

$$|a^{ij}|_{0,\alpha;B_R(x_0)}, |b^i|_{0,\alpha;B_R(x_0)}, |c|_{0,\alpha;B_R(x_0)} \leq \Lambda$$

então para todo $\theta \in (0,1)$ *existe uma constante* $C = C(n, \theta, \lambda, \Lambda, \alpha, R)$ *tal que*

$$|u|_{2,\alpha;B_{\theta R}(x_0)} \leq C(|u|_{0;B_R(x_0)} + |f|_{0,\alpha;B_R(x_0)})$$

Demonstração. Devido ao lema 3.1.3, basta estimar $[D^2u]_{\alpha;B_{\theta R}(x_0)}$.

Por conveniencia, denotaremos $B_R = B_R(x_0)$.

Assumimos a princípio que $R = 1$.

Considere os coeficientes $\bar{a}^{ij} := a^{ij}(x_0)$, observamos que

$$\bar{a}^{ij} D_{ij}u = (\bar{a}^{ij} - a^{ij})D_{ij}u - b^i D_i u - cu + f$$

Pretendemos aplicar o lema 3.2.3. Para um fixado $0 < \theta < 1$ considere uma função cutoff φ de B_θ, isto é, $\varphi \in C_c^\infty(B_1)$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi = 1$ em B_θ. Seja $\tilde{u} = \varphi \cdot u$, como φ tem suporte compacto, extendendo com valor zero fora de B_1 podemos considerar $\tilde{u} \in C^{2,\alpha}(\mathbb{R}^n)$. Temos

$$\begin{aligned}
\bar{a}^{ij} D_{ij}\tilde{u} &= \left(\bar{a}^{ij}(\varphi D_{ij}u + D_i\varphi D_j u + D_j\varphi D_i u + u D_{ij}\varphi)\right) \\
&= \varphi\left((\bar{a}^{ij} - a^{ij})D_{ij}u - b^i D_i u - cu + f)\right) + \left(\bar{a}^{ij}(D_i\varphi D_j u + D_j\varphi D_i u + u D_{ij}\varphi\right) \\
&=: g
\end{aligned}$$

Usando o lema 3.1.1 podemos estimar a semi-norma Hölder de g

$$\begin{aligned}
[g]_{\alpha;\mathbb{R}^n} = [g]_{\alpha;B_1} \leq & C|(\bar{a}^{ij} - a^{ij})\varphi|_{0.B_1}[D^2u]_{\alpha;B_1} + C[(\bar{a}^{ij} - a^{ij})\varphi]_{\alpha;B_1}|D^2u|_{0;B_1} \\
& + C|Du|_{0;B_1}[\varphi b^i]_{\alpha;B_1} + C|Du|_{\alpha;B_1}|\varphi b^i|_{0;B_1} + C|u|_{0;B_1}[\varphi c]_{\alpha;B_1} \\
& + C|u|_{\alpha;B_1}|\varphi c|_{0;B_1} + |f|_{0.B_1}[\varphi]_{\alpha;B_1} + [f]_{\alpha.B_1}|\varphi|_{0;B_1} \\
& + C|\bar{a}^{ij} D\varphi|_{0;B_1}[Du]_{\alpha;B_1} + C[\bar{a}^{ij} D\varphi]_{\alpha;B_1}|Du|_{0;B_1} \\
& + C|\bar{a}^{ij} D^2\varphi|_{0;B_1}[u]_{\alpha;B_1} + C[\bar{a}^{ij} D^2\varphi]_{\alpha;B_1}|u|_{0;B_1},
\end{aligned}$$

Usando (3.9) e o lema 3.1.3 obtemos

$$\begin{aligned}[g]_{\alpha;\mathbb{R}^n} &\leq C|(\bar{a}^{ij}-a^{ij})\varphi|_{0.B_1}[D^2u]_{\alpha;B_1}+C|u|_{2;B_1}+C|f|_{0,\alpha;B_1}\\ &\leq C(|(\bar{a}^{ij}-a^{ij})|_{0.B_1}+\varepsilon)[D^2u]_{\alpha;B_1}+C_\varepsilon|u|_{0;B_1}+C|f|_{0,\alpha;B_1}\end{aligned}$$

Onde a constante C acima depende apenas de n,Λ e φ (que por sua vez depende de θ). Como $[D^2u]_{\alpha;B_\theta}\leq[D^2\tilde{u}]_{\alpha;\mathbb{R}^n}$, aplicando então o lema 3.2.3 a $\tilde{u}$ e g obtemos:

$$[D^2u]_{\alpha;B_\theta}\leq C(|(\bar{a}^{ij}-a^{ij})|_{0.B_1}+\varepsilon)[D^2u]_{\alpha;B_1}+C_\varepsilon|u|_{0;B_1}+C|f|_{0,\alpha;B_1} \tag{3.14}$$

Agora para R geral, podemos reduzir ao caso $R=1$ com a seguinte transformação, para $u:B_R\to\mathbb{R}$, definimos em B_1:

$$\hat{u}(x):=R^{-2}u(R\cdot x),\qquad \hat{f}(x):=f(R\cdot x),\qquad \hat{a}^{ij}(x):=a^{ij}(R\cdot x)$$
$$\hat{b}^i(x):=Rb^i(R\cdot x)\quad \text{e}\quad \hat{c}(x)=R^2c(R\cdot x)$$

teremos então

$$\hat{a}^{ij}D_{ij}\hat{u}+\hat{b}^iD_i\hat{u}+\hat{c}\hat{u}=\hat{f},\quad \text{em } B_1$$

também se verifica facilmente que

$$\begin{aligned}|\hat{u}|_{0;B_1}&=R^{-2}|u|_{0;B_R}\\ [D^2\hat{u}]_{\alpha;B_\theta}&=R^\alpha[D^2u]_{\alpha;B_\theta R}\\ |\hat{f}|_{0;B_1}&=|f|_{0;B_R}\\ [\hat{f}]_{\alpha;B_1}&=R^\alpha[f]_{\alpha;B_R}\end{aligned}$$

De modo que aplicando (3.14) obtemos para R geral que:

$$\begin{aligned}R^\alpha[D^2u]_{\alpha;B_{\theta R}}\leq &C(|(\bar{a}^{ij}-a^{ij})|_{0.B_R}+\varepsilon)R^\alpha[D^2u]_{\alpha;B_R}\\ &+C_\varepsilon R^{-2}|u|_{0;B_R}+C|f|_{0;B_R}+CR^\alpha[f]_{\alpha;B_R}\end{aligned} \tag{3.15}$$

Esta desigualdade nos coloca mais próximos do objetivo, mas para concluir precisamos eliminar o termo com $[D^2u]_{\alpha;B_R}$ do lado direito. Faremos isto com um argumento de cobertura.

Para este propósito observamos primeiramente que o argumento acima pode ser repetido em qualquer bola $B_{\delta R}(x)\subset B_R$ com $0<\delta<1$, ademais temos:

$$|(\bar{a}^{ij}-a^{ij})|_{0.B_{\delta R}(x)}\leq\bar{\Lambda}\delta^\alpha$$

onde $\bar{\Lambda}:=\Lambda R^\alpha$.

Isto implica que para toda $B_\rho(y)\subset B_R$ com $\rho\leq\delta R$ temos:

$$\begin{aligned}[D^2u]_{\alpha;B_{\theta\rho}(y)}\leq &C(\varepsilon+\bar{\Lambda}\delta^\alpha)[D^2u]_{\alpha;B_\rho(y)}+C_\varepsilon\rho^{-2-\alpha}|u|_{0;B_\rho(y)}\\ &+C\rho^{-\alpha}|f|_{0;B_\rho(y)}+C[f]_{\alpha;B_\rho(y)}\end{aligned}$$

Agora definimos $S : \{A \subset B_R \mid A \text{ é convexo}\} \to \mathbb{R}$ por $S(A) := [D^2u]_{\alpha;A}$. Note que S é monótona[1] e subaditiva[2]. Deste modo da equação acima temos $\forall\rho \in (0, \delta R]$ e todo y tal que $B_\rho(y) \subset B_R$:

$$\rho^l S(B_{\theta\rho}(y)) \leq \varepsilon_0 \rho^l S(B_\rho(y)) + \gamma \tag{3.16}$$

onde $l := 2+\alpha$, $\varepsilon_0 := C(\varepsilon + \bar{\Lambda}\delta^\alpha)$ e $\gamma := C_\varepsilon |u|_{0;B_R} + CR^2|f|_{0;B_R} + CR^{2+\alpha}[f]_{alpha;B_R}$.

Neste contexto o resultado que queremos se traduz em mostrar que existe C tal que $R^l S(B_{\theta R}) \leq C\gamma$.

Definimos $Q := \sup\limits_{\substack{B_\rho(y)\subset B_R\\ \rho\leq\delta R}} \rho^l S(B_{\theta\rho}(y))$. Aplicando (3.16) a $B_{\theta\rho}(y)$ obtemos então para toda $B_\rho(y) \subset B_R$ e $\rho \leq \delta R$

$$(\theta\rho)^l S(B_{\theta^2\rho}(y)) \leq \varepsilon_0 \theta^l Q + \gamma \tag{3.17}$$

Nestas condições existe $N = N(\theta, n)$ tal que a bola $B_{\theta\rho}(y)$ pode ser coberta por N bolas $B_{\theta^2\rho}(y_1), \ldots, B_{\theta^2\rho}(y_N)$ tais que $B_{\theta\rho}(y_i) \subset B_\rho(y)$. Note que N não depende de ρ pois a cobertura para $\bar{\rho}$ pode ser obtida de uma cobertura para ρ com uma simples mudança de escala. Aplicando 3.17 a $B_{\theta\rho}(y_i)$ temos

$$(\theta\rho)^l S(B_{\theta^2\rho}(y_i)) \leq \varepsilon_0 \theta^l Q + \gamma$$

Ou, equivalentemente

$$\rho^l S(B_{\theta^2\rho}(y_i)) \leq \varepsilon_0 Q + \theta^{-l}\gamma$$

Somando estas desigualdades para $i = 1, \ldots, N$ e usando a subaditividade de S obtemos

$$\rho^l S(B_{\theta\rho}(y)) \leq N\varepsilon_0 Q + N\theta^{-l}\gamma$$

E portanto, tomando supremo do lado esquerdo temos:

$$Q \leq N\varepsilon_0 Q + N\theta^{-l}\gamma$$

Lembrando que $\varepsilon_0 = C(\varepsilon + \bar{\Lambda}\delta^\alpha)$, podemos tomar δ e ε de modo que $\varepsilon_0 \leq \dfrac{1}{2N}$ e substituindo acima obtemos

$$Q \leq 2N(\theta, n)\theta^{-l}\gamma$$

[1] Se $A \subset B$ então $S(A) \leq S(B)$

[2] $S(A \cup B) \leq S(A) + S(B)$

E portanto

$$\rho^l S(B_{\theta\rho}(y)) \leq C(\theta,n,l)\gamma$$

Para concluir agora basta cobrir $B_{\theta R}$ com um número finito de bolas $B_{\theta\rho}(y_j)$, $\rho = \delta R$ e somar as desigualdades acima para cada bola, quando obtemos da subaditividade que

$$(\delta R)^l S(B_{\theta R}) \leq \bar{C}\gamma$$

Com $\bar{C} = \bar{C}(\theta,n,l,\delta)$. Lembrando que $l = 2+\alpha$ e que δ escolhido acima depende de Λ e $N(n,\theta)$ a demonstração está concluida. $\square$

3.3 Domínios de classe $C^{k,\alpha}$

Para que possamos enunciar a estimativa de Schauder global necessitamos da noção de domínio $C^{k,\alpha}$, que estudaremos nesta seção[3]. Estes são domínios cuja fronteira é localmente o gráfico de funções $C^{k,\alpha}$. Mais precisamente temos:

Definição 3.1. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $x_0 \in \partial\Omega$. Dizemos que Ω e sua fronteira $\partial\Omega$ são de classe $C^{k,\alpha}$ numa vizinhança de x_0 se existem uma bola $B_R(x_0)$, uma transformação ortogonal Q e uma função $\psi : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}, \psi \in C^{k,\alpha}$ tais que, sendo $y = Q(x-x_0)$ temos:

$$\Omega \cap B_R(x_0) = \{x_0 + Q^{-1}y \mid y_n > \psi(y_1,\ldots,y_{n-1})\} \cap B_R(x_0) \quad \text{e}$$
$$\partial\Omega \cap B_R(x_0) = \{x_0 + Q^{-1}y \mid y_n = \psi(y_1,\ldots,y_{n-1})\} \cap B_R(x_0)$$

Nas condições da definição acima a aplicação $\xi : B_R(x_0) \to \mathbb{R}^n$ dada por $\xi(x) = (y_1,\ldots,y_{n-1},y_n - \psi(y_1,\ldots,y_{n-1}))$, tem as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} &i)\ \xi(B_R(x_0)\cap\Omega) \subset \overline{\mathbb{R}^n_+};\\ &ii)\ \xi(B_R(x_0)\cap\partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+;\\ &iii)\ \xi \in C^{k,\alpha}(B_R(x_0)), \xi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\xi(B_R(x_0))) \end{aligned} \tag{3.18}$$

Vemos então que o difeomorfismo ξ "planifica"a fronteira de Ω numa vizinhança de x_0 e portanto será chamado uma *função planificadora* para $\partial\Omega$ em x_0.

Definição 3.2 (Domínio $C^{k,\alpha}$)**.** Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, dizemos que Ω e $\partial\Omega$ são de classe $C^{k,\alpha}$ se existem constantes $R, C > 0$ tais que, para todo $x_0 \in \partial\Omega$ existem uma transformação ortogonal Q_{x_0} e uma

[3] nesta seção sempre assumimos $k \geq 1$

função $\psi_{x_0} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}$ com $|\psi_{x_0}|_{k,\alpha;\mathbb{R}^{n-1}} \leq C$ tais que, sendo $y = Q_{x_0}(x - x_0)$ temos:

$$\Omega \cap B_R(x_0) = \{x_0 + Q_{x_0}^{-1} y \mid y_n > \psi(y_1, \ldots, y_{n-1})\} \cap B_R(x_0) \quad \text{e}$$
$$\partial\Omega \cap B_R(x_0) = \{x_0 + Q_{x_0}^{-1} y \mid y_n = \psi(y_1, \ldots, y_{n-1})\} \cap B_R(x_0)$$

Observação 3.3.1. *Na verdade a condição de "uniformidade"de R e C na definição acima pode ser dispensada, sendo consequencia de que $\partial\Omega$ é compacto, mas para nossos propósitos esta definição é a mais conveniente.*

Vemos então que um domínio $C^{k,\alpha}$ pode ser planificado numa vizinhança de cada ponto da fronteira. Uma definição alternativa (e equivalente) poderia ser dada em termos de funções planificadoras: a fronteira $\partial\Omega$ é de classe $C^{k,\alpha}$ se existe uma função planificadora numa vizinhança de cada $x_0 \in \partial\Omega$.

Definição 3.3. Seja $\varphi : \partial\Omega \to \mathbb{R}$, dizemos que $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ se, para cada $x_0 \in \partial\Omega$ sendo ξ uma função planificadora em $B_R(x_0) \cap \partial\Omega$ temos $\varphi \circ \xi^{-1} \in C^{k,\alpha}(\xi(B_R(x_0)) \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$.

Observação 3.3.2. *Na definição acima estamos considerando $\varphi \circ \xi^{-1}$ como uma função de $n-1$ variáveis, ignorando a última coordenada que é sempre nula em $\partial\mathbb{R}^n_+$. Em outras palavras, expressamos φ em coordenadas locais.*

A seguir mostramos dois lemas de extensão para funções de classe $C^{k,\alpha}$. As demonstrações fazem uso da noção de partição da unidade, para a qual referimos a [8].

Lema 3.3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{k,\alpha}$, com $k \geq 1$, Ω' um aberto contendo $\overline{\Omega}$ e $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe uma função $w \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ tal que $w = u$ em Ω e*

$$|w|_{k,\alpha;\Omega'} \leq |u|_{k,\alpha;\Omega}$$

Onde $C = C(k, \Omega, \Omega')$

Demonstração. Seja $z = \xi(x)$ uma função planificadora em $B_R(x_0)$, $x_0 \in \partial\Omega$, e sejam G e $G^+ = G \cap \overline{\mathbb{R}^n_+}$ respectivamente uma bola e semi-bola na imagem de ξ com centro em $\xi(x_0)$. Definimos $\tilde{u}(z) = u \circ \xi^{-1}(z)$, denotaremos daqui em diante $(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n) = (z', z_n)$. Sendo ξ um difeomorfismo de classe $C^{k,\alpha}$ existe $K_1 = K_1(k, |\xi^{-1}|_{k,\alpha,B_R(x_0)})$ tal que:

$$|\tilde{u}|_{k,\alpha;\xi(B_R(x_0)\cap\Omega)} \leq K_1 |u|_{k,\alpha;B_R(x_0)\cap\Omega} \tag{3.19}$$

A função $\tilde{u}$ está definida em G^+, queremos então estendê-la para a outra metade da bola. Definimos para $z_n < 0$

$$\tilde{u}(z', z_n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \tilde{u}(z', -z_n/i) \tag{3.20}$$

Onde as constantes $c_1, \ldots, c_{k+1}$ serão escolhidas de modo que $\tilde{u}$ e suas derivadas até a ordem k sejam contínuas. Observe que para $z_n < 0$ temos:

$$(D_n)^m \tilde{u}(z', z_n) = \sum_{i=1}^{k+1} c_i (-1/i)^m (D_n)^m \tilde{u}(z', -z_n/i), \quad m \in \{0, 1, \ldots, k\}$$

De modo que para termos $(D_n)^m \tilde{u}(z', 0^-) = (D_n)^m \tilde{u}(z', 0^+)$ basta que $c_1, \ldots, c_{k+1}$ sejam a solução do sitema:

$$\sum_{i=1}^{k+1} c_i (-1/i)^m = 1, \quad m \in \{0, 1, \ldots, k\}$$

Para estes c_i temos então $\tilde{u} \in C^{k,\alpha}(G)$ e de (3.19) e (3.20) temos $|\tilde{u}|_{k,\alpha;G} \leq K_2 |u|_{k,\alpha;\Omega}$, com $K_2 = K_2(k, |\xi^{-1}|_{k,\alpha,B_R(x_0)})$. Portanto temos $w = \tilde{u} \circ \xi \in C^{k,\alpha}(\bar{B})$ para alguma bola B centrada em x_0 e $w = u$ em $B \cap \Omega$, de modo que w provê uma extensão $C^{k,\alpha}$ de u para $\Omega \cup B$. Ademais, temos $|w|_{k,\alpha;G} \leq K_3 |u|_{k,\alpha;\Omega}$, com $K_3 = K_3(k, |\xi^{-1}|_{k,\alpha,\xi(B_R(x_0))}, |\xi|_{k,\alpha,B_R(x_0)})$.

Considere agora uma cobertura finita de $\partial\Omega$ por bolas $B_1, \ldots, B_N$ obtidas pelo processo acima e $w_1, \ldots, w_n$ as correspondentes extensões, podemos assumir $B_i \subset \Omega'$. Seja ainda $B_0 \Subset \Omega$ um aberto tal que $B_0, B_1, \ldots, B_N$ completam uma cobertura de Ω, tomando $\{\eta_i\}$, $i = 0, 1, \ldots, N$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, definindo:

$$w = \eta_0 u + \sum_{i=1}^{N} \eta_i w_i$$

Temos a extensão desejada, ademais $|w|_{k,\alpha;\Omega'} \leq K |u|_{k,\alpha;\Omega}$, com $K = K(N, K_3)$. □

Corolário 3.3.2. *Se Ω é um domínio de classe $C^{k,\alpha}$ e $u \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, então existe uma sequencia de funções $u_i \in C^\infty(\overline{\Omega})$ tal que para todo $0 < \beta < \alpha$ vale $|u_i - u|_{k,\beta;\Omega} \xrightarrow{i \to \infty} 0$.*

Demonstração. Segue diretamente do lema 3.3.1 e da proposição 3.1.4. □

Como observamos após a proposição 3.1.4 o resultado acima não se estende para $\beta = \alpha$.

Lema 3.3.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{k,\alpha}$, com $k \geq 1$, e $\varphi \in C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$. Para qualquer aberto $\Omega' \supset \bar{\Omega}$ existe uma função $\Phi \in C_0^{k,\alpha}(\Omega')$ tal que $\Phi = \varphi$ em $\partial\Omega$.*

Demonstração. A demonstração é análoga ao lema 3.3.1.

Para $x_0 \in \partial\Omega$, tome a função planificadora ξ e a bola G como naquele lema, considere $\tilde{\varphi} := \varphi \circ \xi^{-1} \in C^{k,\alpha}(G \cap \partial\mathbb{R}^n_+)$. Estendemos $\tilde{\varphi}$ para todo G considerando $\tilde{\Phi}(z', z_n) := \tilde{\varphi}(z')$ e fazemos $\Phi := \tilde{\Phi} \circ \xi$. Então $\Phi \in C^{k,\alpha}(\bar{B})$ onde B é uma bola centrada em x_0 e $\Phi = \varphi$ em $B \cap \partial\Omega$.

Considere então uma cobertura $\partial\Omega \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_i$ com bolas B_i como acima, $B_i \subset \Omega'$, e as respectivas extensões $\{\Phi_i\}$. Tomando $\{\eta_i\}$, $i = 1, \ldots, N$ uma partição da unidade subordinada a esta cobertura, definimos

$$\Phi = \sum_{i=1}^{N} \eta_i \Phi_i$$

Que é a extensão procurada. □

Devido ao lema anterior podemos definir uma norma em $C^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ por $|\varphi|_{C^{k,\alpha}(\partial\Omega)} = \inf_\Phi |\Phi|_{k,\alpha;\Omega}$, onde o ínfimo é tomado sobre todas as extensões de φ para $\overline{\Omega}$.

3.4 Estimativa de Schauder global

Tratamos primeiramente de obter versões de fronteira dos resultados da seção 3.2. As demonstrações são análogas às daquela seção, de modo que discutimos apenas as diferenças.

Lema 3.4.1. *Seja u uma solução de $\bar{a}^{ij}u = 0$ em $\overline{\mathbb{R}^n_+}$ com $u\,|_{x_n=0} = 0$, onde a matriz $(\bar{a}^{ij})$ é constante e positiva definida, tem $\lambda > 0$ como cota inferior para seus autovalores e Λ como cota superior para seus coeficientes. Então, para toda bola $B_R(x_0)$ e todo $0 < \gamma < 1$, existe $C = C(n, \gamma, \lambda, \Lambda)$ tal que:*

$$\sup_{B_{\gamma R}(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+} |Du| \leq C R^{-1} \sup_{B_R(x_0) \cap \mathbb{R}^n_+} |u|$$

Demonstração. A demonstração é análoga ao lema 3.2.2.

Tomamos P e Q como naquele lema e definimos $\bar{u}$ no semi-espaço $H = PQ(\mathbb{R}^n_+)$ por $\bar{u} = u \circ (PQ)^{-1}$. Então $\bar{u}$ é harmonica em $\overline{H}$ e $\bar{u}\,|_{\partial H} = 0$. Podemos então estender $\bar{u}$ para todo o $\mathbb{R}^n$ pelo princípio da reflexão de Schwarz. A estimativa então segue da estimativa correspondente para funções harmonicas da mesma forma que no lema 3.2.2. □

Lema 3.4.2. *Seja $u \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ uma solução de $\bar{a}^{ij}D_{ij}u = f$ $u\,|_{x_n=0} = 0$, onde onde a matriz $(\bar{a}^{ij})$ é constante e positiva definida, tem λ como cota inferior para seus autovalores e Λ como cota superior para seus coeficientes. Se $[D^2u]_{\alpha,\mathbb{R}^n_+} < \infty$ para algum $0 < \alpha < 1$, então:*

$$[D^2u]_{\alpha,\mathbb{R}^n_+} \leq C[f]_{\alpha,\mathbb{R}^n_+}$$

Com constante $C = C(n, \lambda, \Lambda, \alpha)$.

Demonstração. A demonstração é completamente análoga ao lema 3.2.3 apenas aplicando o lema 3.4.1 ao invés de 3.2.2 no final. □

Teorema 3.4.3 (estimativa de Schauder local na fronteira)**.** *Se* $\partial\Omega$ *é de classe* $C^{2,\alpha}$ *numa vizinhança de* $x_0 \in \partial\Omega$*, existe* $R > 0$ *tal que, se* $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega} \cap B_R(x_0))$ *é uma solução de*

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu = f,$$

onde a_{ij} *é simétrica e satisfaz 3.2,* $|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}, |c|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} \leq \Lambda$*,* $|f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} < \infty$ *e* $u\,|_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} = 0$*. Então existe* $\theta_0 \in (0,1]$ *tal que para todo* $\theta \in (0, \theta_0)$ *existe uma constante* $C > 0$*, dependendo de* $n, \theta, \lambda, \Lambda, \alpha, R$ *e* $\partial\Omega \cap B_R(x_0)$ *tal que*

$$|u|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta R}(x_0)} \leq C(|u|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}) \tag{3.21}$$

Demonstração. Pretendemos adaptar a demonstração do teorema 3.2.4 substituindo o lema 3.2.3 pelo lema 3.4.2, para isto é preciso planificar a fronteira em uma vizinhança de x_0.

Se ξ é uma função planificadora em $\Omega \cap B_R(x_0)$ (ver 3.18), definimos em $\xi(\Omega \cap B_R(x_0))$ as funções $\hat{u} = u \circ \xi^{-1}$ e $\hat{f} = f \circ \xi^{-1}$. Equivalentemente temos:

$$\hat{u}(\xi(x)) = u(x), \quad \hat{f}(\xi(x)) = f(x)$$

Substituindo em $Lu = f$ vemos que $\hat{u}$ satisfaz a equação:

$$\hat{L}\hat{u} = \hat{a}^{ij} D_{ij}\hat{u} + \hat{b}^i D_i \hat{u} + \hat{c}\hat{u} = \hat{f}$$

Onde, para $y = \xi(x)$ temos

$$\begin{aligned}
\hat{a}^{ij}(y) &= \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r}\frac{\partial \xi_j}{\partial x_s} a^{rs}(x), \\
\hat{b}^i(y) &= \frac{\partial^2 \xi_i}{\partial x_r \partial x_s} a^{rs}(x) + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_r} b^r(x), \\
\hat{c}(y) &= c(x)
\end{aligned}$$

Existe então $K = K(\xi) > 0$ tal que $\hat{\lambda} \geq K^{-1}\lambda$ e $\hat{\Lambda} \leq K\Lambda$.

Agora para $\hat{u}$ procedemos como na demonstração do teorema 3.2.4. Aplicamos o lema 3.4.2 a funções do tipo $\varphi\hat{u}$, onde φ é uma função cutoff com $\varphi = 1$ em $B_{\theta\rho}$ e suporte em B_ρ, $0 < \theta < 1$. Como naquele teorema chegaremos a:

$$\begin{aligned}
\rho^\alpha [D^2\hat{u}]_{\alpha;B_{\theta\rho}(y)\cap\mathbb{R}^n_+} \leq & C(|(\bar{\hat{a}}^{ij} - \hat{a}^{ij})|_{0.B_\rho(y)\cap\mathbb{R}^n_+} + \varepsilon)\rho^\alpha [D^2\hat{u}]_{\alpha;B_\rho(y)\cap\mathbb{R}^n_+} \\
& + C_\varepsilon \rho^{-2} |\hat{u}|_{0;B_\rho(y)\cap\mathbb{R}^n_+} + C|\hat{f}|_{0;B_\rho(y)\cap\mathbb{R}^n_+} + C\rho^\alpha [\hat{f}]_{\alpha;B_\rho(y)\cap\mathbb{R}^n_+}
\end{aligned}$$

Daí aplicando o mesmo argumento de cobertura que na prova daquele teorema obtemos:

$$|\hat{u}|_{2,\alpha;B_{\theta R}\cap\mathbb{R}^n_+} \leq C(|\hat{u}|_{0;B_R\cap\mathbb{R}^n_+} + |\hat{f}|_{0,\alpha;B_R\cap\mathbb{R}^n_+}) \tag{3.22}$$

Para concluir basta traduzir esta estimativa para u e f. Como ξ é um difeomorfismo, para $\gamma = \gamma(\xi) \in (0,1]$ apropriado temos $\xi(B_{\gamma\rho}(x_0)\cap\Omega) \subset B_\rho \cap \mathbb{R}^n_+$ e $\xi^{-1}(B_{\gamma\rho}\cap\mathbb{R}^n_+) \subset B_\rho(x_0)\cap\Omega$ para $\rho \in (0,R]$. Existe então $C = C(\xi) > 0$ tal que

$$C^{-1}|u|_{2,\alpha;B_{\gamma\rho}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+} \leq |\hat{u}|_{2,\alpha;B_\rho\cap\mathbb{R}^n_+} \leq C|\hat{u}|_{2,\alpha;B_{\gamma^{-1}\rho}(x_0)\cap\mathbb{R}^n_+}$$

e estimativas análogas para as outras normas em (3.22). De modo que obtemos:

$$\begin{aligned} |u|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta\gamma^2 R}(x_0)} &\leq C|\hat{u}|_{2,\alpha;B_{\theta\gamma R}\cap\mathbb{R}^n_+} \\ &\leq C(|\hat{u}|_{0;B_{\gamma R}\cap\mathbb{R}^n_+} + |\hat{f}|_{0,\alpha;B_{\gamma R}\cap\mathbb{R}^n_+}) \\ &\leq C(|u|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}) \end{aligned}$$

Que da (3.21) com $\theta_0 = \gamma^2$. □

Observação 3.4.1. $i)$ *Observe que $\theta_0 = \gamma^2$ acima depende de o quão próximo a fronteira está de ser um hiperplano (caso em que ξ é apenas um movimento rígido), de modo que reduzindo R podemos tornar θ_0 tão próximo de 1 quanto quisermor.*
$ii)$ *Se Ω é de classe $C^{2,\alpha}$ (definição 3.2) podemos tomar R, θ_0 e C independentes de x_0.*

É fácil estender o teorema para o caso em que u não se anula na fronteira. Devido ao lema 3.3.3 podemos assumir a condição de fronteira definida em $\overline{\Omega}$.

Corolário 3.4.4. *Se Ω é um domínio de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, existe $R > 0$ tal que, se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}\cap B_R(x_0))$ é uma solução de*

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = f, \quad u\mid_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)} = \varphi\mid_{\partial\Omega\cap B_R(x_0)}$$

onde a_{ij} é simétrica e satisfaz 3.2, $|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}, |c|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} \leq \Lambda$ e $|f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} < \infty$. Então existe $\theta_0 \in (0,1]$ tal que para todo $\theta \in (0,\theta_0)$ existe uma constante $C > 0$, dependendo de $n,\theta,\lambda,\Lambda,\alpha,R$ e $\partial\Omega$ tal que

$$|u|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta R}(x_0)} \leq C(|u|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}) \tag{3.23}$$

Demonstração. Temos $L(u-\varphi) = f - L\varphi$ de modo que podemos aplicar o teorema 3.4.3 a $u-\varphi$ para obter:

$$|u-\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta R}(x_0)} \leq C(|u-\varphi|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f-L\varphi|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)})$$

Com $\theta \in (0.\theta_0)$. Temos então:

$$\begin{aligned} |u|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta R}(x_0)} &\leq |u-\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_{\theta R}(x_0)} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} \\ &\leq C(|u-\varphi|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f-L\varphi|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}) + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} \\ &\leq C(|u|_{0;\Omega\cap B_R(x_0)} + |f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega\cap B_R(x_0)}) \end{aligned}$$

. □

Agora estamos prontos para mostrar a estimativa de Schauder global.

Teorema 3.4.5 (Estimativa de Schauder global)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é uma solução de*

$$Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu = f, \quad u\,|_{\partial\Omega} = \varphi\,|_{\partial\Omega}$$

onde onde a_{ij} é simétrica e satisfaz 3.2, $|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega}, |c|_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda$ e $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Então existe $C = C(n,\alpha,\lambda,\Lambda,\Omega)$ tal que:

$$|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega}) \tag{3.24}$$

Demonstração. Observamos primeiramente que podemos reduzir o resultado ao caso em que u se anula na fronteira. Para este propósito basta aplicar u resultado a $\tilde{u} = u - \varphi$ como fizemos no corolário 3.4.4. Portanto assumimos daqui em diante que $\varphi \equiv 0$.

Pelas observações 3.4.1 podemos tomar R_0 tal que as conclusões do teorema 3.4.3 valem para $\theta = 3/4$ em todo $x_0 \in \partial\Omega$. Definimos

$$\Omega_{R_0} := \{x \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x,\partial\Omega) \geq R_0/2\}$$

Afirmamos primeiramente que

$$|Du(x)| + |D^2u(x)| \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega}) \tag{3.25}$$

Para todo $x \in \Omega$. Para mostrar isto distinguimos dois casos:

i) $x \in \Omega_{R_0}$. Neste caso $B_{R_0/2}(x) \subset \Omega$ e do teorema 3.2.4 a afirmação vale para $C = C(n,\lambda,\Lambda,\alpha,R_0/2)$.

ii) $x \notin \Omega_{R_0}$. Neste caso existe algum $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $x \in B_{\frac{3}{4}R_0}(x_0)$ e do teorema 3.4.3 a afirmação vale para $C = C(n, 3/4, \lambda, \Lambda, \alpha, R_0)$.

Resta então estimar $[D^2u]_{\alpha,\Omega}$. Para isto considere $x, y \in \Omega, x \neq y$. Distinguimos três casos:

i) $\operatorname{dist}(x,y) < R_0/4$ e $x, y \in \Omega_{R_0}$.

Neste caso $B_{R_0/2}(x) \subset \Omega$ e $y \in B_{R_0/4}(x)$ de modo que o teorema 3.2.4 dá

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [D^2u]_{\alpha,B_{R_0/4}(x)} \leq C(|u|_{0;B_{R_0/2}(x)} + |f|_{0,\alpha;B_{R_0/2}(x)})$$
$$\leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

ii) $\operatorname{dist}(x,y) < R_0/4$ e x ou y não está em Ω_{R_0}.

Digamos que $x \notin \Omega_{R_0}$, então existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\operatorname{dist}(x,x_0) < \frac{3R_0}{4} - \operatorname{dist}(x,y)$, de modo $x, y \in B_{\frac{3}{4}R_0}(x_0)$. Portanto do teorema 3.4.3 temos:

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq [D^2u]_{\alpha,\Omega\cap B_{\frac{3}{4}R_0}(x_0)} \leq C(|u|_{0;\Omega\cap B_{R_0}(x_0)} + |f|_{0,\alpha;\Omega\cap B_{R_0}(x_0)})$$
$$\leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

iii) $\operatorname{dist}(x,y) \geq R_0/4$.

Neste caso temos

$$\frac{|D^2u(x) - D^2u(y)|}{|x-y|^\alpha} \leq 2(R_0/4)^{-\mu} \sup_\Omega |D^2u| \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

Portanto temos que

$$[D^2u]_{\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

que combinado com 3.25 dá

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega})$$

□

3.5 Problema de Dirichlet: método da continuidade

Nesta seção aplicaremos a estimativa de Schauder para obter resultados de existencia de soluções para o problema de Dirichlet em domínios $C^{k,\alpha}$. Antes de enunciar e provar os resultados relevantes faremos uma digressão para mostrar resultados úteis de análise funcional.

Lembramos que se $\mathscr{B}$ é um espaço de Banach, uma aplicação $T : \mathscr{B} \to \mathscr{B}$ é uma contração se existe $\theta < 1$ tal que:

$$\|T(u) - T(v)\| \leq \theta \|u - v\|$$

para todos $u, v \in \mathscr{B}$.

Teorema 3.5.1 (Ponto fixo de Banach)**.** *Se T é uma contração no espaço de Banach $\mathscr{B}$, então T tem um único ponto fixo, isto é, existe um único $u \in \mathscr{B}$ que é solução da equação $T(u) = u$*

Demonstração. A demonstração segue o método das aproximações sucessivas. Seja $u_0 \in \mathscr{B}$ qualquer, definimos uma sequencia $u_n = T^n(u_0)$. Então para $n \geq m$ temos:

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\| &\leq \sum_{j=m+1}^{n} \|u_j - u_{j-1}\| \\
&= \sum_{j=m+1}^{n} \|T^{j-1}(u_1) - T^{j-1}(u_0)\| \\
&\leq \sum_{j=m+1}^{n} \theta^{j-1} \|u_1 - u_0\| \\
&\leq \frac{\|u_1 - u_0\| \theta^m}{1 - \theta}
\end{aligned}$$

Como $\theta^m \xrightarrow{m \to \infty} 0$ vemos que u_n é uma sequencia de Cauchy, portanto converge para um $u \in \mathscr{B}$. Temos então:

$$T(u) = \lim_{n \to \infty} T(u_n) = \lim_{n \to \infty} u_{n+1} = u$$

e encontramos um ponto fixo.

Para a unicidade, se v também é ponto fixo de T temos:

$$\|u - v\| = \|T(u) - T(v)\| \leq \theta \|u - v\|$$

Donde $(1 - \theta)\|u - v\| \leq 0$ e segue que $u = v$. □

Teorema 3.5.2 (Método da Continuidade)**.** *Sejam $L_0, L_1 : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$ operadores lineares limitados entre os espaços de Banach $\mathscr{B}_1$ e $\mathscr{B}_2$. Definimos*

$$L_t := (1 - t)L_0 + tL_1$$

Assumindo que existe uma constante C (não dependendo de t) tal que

$$\|u\|_{\mathscr{B}_1} \leq C \|L_t(u)\|_{\mathscr{B}_2}, \quad \textit{para todo } u \in \mathscr{B}_1 \tag{3.26}$$

Então L_0 é sobrejetivo se e somente se L_1 é sobrejetivo.

Demonstração. Suponha que, para algum $\tau \in [0,1]$, L_τ seja sobrejetivo. Então por 3.26 L_τ também é injetivo e portanto é uma bijeção e ainda de 3.26 o operador inverso $L_\tau^{-1} : \mathscr{B}_2 \to \mathscr{B}_1$ é limitado.

Para $t \in [0,1]$ estamos interessados na solubilidade de

$$L_t u = f, \quad \text{com } f \in \mathscr{B}_2 \tag{3.27}$$

Esta equação pode ser reescrita como:

$$L_\tau u = f + (L_\tau - L_t)u = f + (t-\tau)(L_0 u - L_1 u)$$

aplicando L_τ^{-1} vemos que 3.27 equivale a:

$$u = L_\tau^{-1} f + (t-\tau) L_\tau^{-1}(L_0 - L_1)u$$

Portanto, resolver $L_t u = f$ equivale a encontrar um ponto fixo do operador $T : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_1$ dado por $T(u) = L_\tau^{-1} f + (t-\tau)L_\tau^{-1}(L_0 - L_1)u$. Temos:

$$\begin{aligned}
\|T(u) - T(v)\|_{\mathscr{B}_1} &= |t-\tau| \|L_\tau^{-1}(L_0 - L_1)(u-v)\|_{\mathscr{B}_1} \\
&\leq C|t-\tau| \|(L_0 - L_1)(u-v)\|_{\mathscr{B}_2} \\
&\leq C|t-\tau| (\|L_0\| + \|L_1\|)\|u-v\|_{\mathscr{B}_1}
\end{aligned}$$

Onde $\|L_0\|$ e $\|L_1\|$ são as normas de operador de L_0 e L_1. Vemos então que se

$$|t-\tau| \leq \frac{1}{2}(C(\|L_0\| + \|L_1\|))^{-1} =: \delta$$

T é uma contração, e portanto tem ponto fixo.

Isto quer dizer que se $L_\tau u = f$ tem solução para todo $f \in \mathscr{B}_2$ então $L_t u = f$ tem solução para todo $f \in \mathscr{B}_2$ desde que $|t-\tau| < \delta$.

Agora se L_0 é sobrejetivo, dividindo o intervalo $[0,1]$ em subintervalos de comprimento menor que δ concluímos aplicando o que acabamos de demonstrar que L_1 é sobrejetiva. A recíproca é análoga. □

O método da cotinuidade permite transformar um problema de existencia em outro potencialmente mais simples.

Agora passamos a tratar do problema de Dirichlet.

Lema 3.5.3. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^\ltimes$ um domínio e L o operador*

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu$$

onde a_{ij} é simétrica e satisfaz 3.2, $a^{ij}, b^i, c \in C^0(\overline{\Omega})$, $|a^{ij}|_{0;\Omega}, |b^i|_{0;\Omega}, |c|_{0;\Omega} \leq \Lambda$ e $c(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. Se $f \in C^0(\overline{\Omega})$ e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é uma solução de $Lu = f$, então

$$\sup_{\Omega}|u| \leq \sup_{\partial\Omega}|u| + C\sup_{\Omega}|f|$$

Onde C=C(Ω, λ, Λ).

Demonstração. Como Ω é limitado, fazendo uma translação do domínio podemos assumir sem perda de generalidade que existe d tal que $\Omega \subset \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 < x_1 < d\}$. Definimos o operador L_0 por

$$L_0 u = a^{ij}D_{ij}u + b^i D_i u$$

Temos então:

$$L_0 e^{\alpha x_1} = (\alpha^2 a^{11} + \alpha b^1)e^{\alpha x_1}$$

Aplicando 3.2 a $\xi = (1, 0, \ldots, 0)$ vemos que $a^{11} \geq \lambda$. Se tomamos $\alpha = 1 + \dfrac{\Lambda}{\lambda}$ temos então

$$L_0 e^{\alpha x_1} \geq (\lambda\alpha^2 - \alpha\Lambda)e^{\alpha x_1} = \lambda\alpha\left(\alpha - \frac{\Lambda}{\lambda}\right) = \lambda\alpha \geq \lambda$$

Definimos então

$$v := \sup_{\partial\Omega} u^+ + \frac{(e^{\alpha d} - e^{\alpha x_1})}{\lambda}\sup_{\Omega}|f^-|$$

Temos então:

$$Lv = L_0 v + cv \leq L_0 v = \frac{-L_0 e^{\alpha x_1}}{\lambda}\sup_{\Omega}|f^-| \leq -\sup_{\Omega}|f^-|$$

Portanto temos

$$L(v-u) \leq -(\sup_{\Omega}|f^-| + f) \leq 0$$

Ademais temos $v - u \geq 0$ em $\partial\Omega$ portanto segue do princípio do máximo (ver teorema 3.5 de [3]) que $u \leq v$ em Ω e portanto:

$$\sup_{\Omega} u \leq \sup_{\partial\Omega} u^+ + C\sup_{\Omega}|f^-|$$

Onde $C = \dfrac{e^{\alpha d} - 1}{\lambda}$. Aplicando o mesmo argumento a $L(-u) = -f$ encontramos também:

$$\sup_{\Omega}(-u) \leq \sup_{\partial\Omega} u^- + C\sup_{\Omega}|f^+|$$

O que completa a demonstração. □

Corolário 3.5.4. *Nas hipóteses to teorema 3.4.5, se assumimos adicionalmente que $c(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$ então vale*

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C(|f|_{0,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega})$$

Onde $C = C(n, \alpha, \lambda, \Lambda, \Omega)$.

Demonstração. Temos da estimativa de Schauder $|u|_{2,\alpha;\Omega} \leq C(|u|_{0;\Omega} + |f|_{0,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega})$, mas do lema 3.5.3 podemos estimar $|u|_{0;\Omega}$ usando $|f|_{0;\Omega}$ e $|\varphi|_{0;\Omega}$. □

Teorema 3.5.5. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio com $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$, $f \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ e L o operador*

$$Lu = a^{ij} D_{ij} u + b^i D_i u + cu \tag{3.28}$$

onde a_{ij} é simétrica e satisfaz (3.2), $|a^{ij}|_{0,\alpha;\Omega}, |b^i|_{0,\alpha;\Omega}, |c|_{0,\alpha;\Omega} \leq \Lambda$ *e* $c(x) \leq 0$ *para todo* $x \in \Omega$*. Então existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ do problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} Lu = f, & em\ \Omega \\ u = \varphi, & em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{3.29}$$

Antes de demonstrar o teorema observamos que no caso particular em que L é o Laplaciano, o resultado de existência é conhecido como teorema de Kellog. Uma demonstração pode ser encontrada em [5] usando métodos da teoria do potencial. Aqui assumiremos o teorema de Kellog e usaremos o método da continuidade para reduzir o teorema 3.5.5 a este caso particular.

Demonstração. Podemos assumir $\varphi \equiv 0$, de fato, para $\bar{u} = u - \varphi$ e $\bar{f} = f - L\varphi$ o problema 3.29 é equivalente a

$$\begin{cases} L\bar{u} = \bar{f}, & \text{em } \Omega \\ \bar{u} = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Portanto daqui em diante assumimos $\varphi \equiv 0$.

Consideramos a família de equações:

$$\begin{cases} L_t u = f, & \text{para } 0 \leq t \leq 1 \\ u = 0, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{3.30}$$

Onde $L_t = tL + (1-t)\Delta$, sendo Δ o laplaciano.

Os operadores L_t satisfazem as condições do enunciado com

$$\lambda_t = \min(1,\lambda), \ \text{ e } \ \Lambda_t = \max(1,K).$$

Temos $L_0 = \Delta$ e $L_1 = L$. Pelo teorema de Kellog, 3.30 tem solução para $t = 0$. Pretendemos usar o teorema 3.5.2 para concluir que existe solução com $t = 1$.

O operador

$$L_t : \mathscr{B}_1 := \{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \mid u = 0 \ \text{ em } \ \partial\Omega\} \to C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) =: \mathscr{B}_2$$

É claramente limitado devido ao lema 3.1.1 e as hipóteses sobre os coeficientes de L. Do corolário 3.5.4 temos que

$$|u|_{2,\alpha,\Omega} \leq C|L_t u|_{0,\alpha;\Omega}$$

Para todo $u \in \mathscr{B}_1$ e a constante C não depende de t, pois λ_t e Λ_t são independentes de t. Portanto as hipóteses do teorema 3.5.2 são satisfeitas, o que conclui a demonstração da existencia.

Para a unicidade, se $Lu_1 = Lu_2$ e $u_1 = u_2$ em $\partial\Omega$ então $u_1 - u_2$ se anula em $\partial\Omega$ e temos $L(u_1 - u_2) = 0$, do princípio do máximo segue que $u_1 - u_2 \equiv 0$ em Ω. $\square$

Corolário 3.5.6. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio $C^{2,\alpha}$ e L como em 3.28 com $c \leq 0$ e as mesmas condições nos coeficientes lá encontradas. Então o operador*

$$\begin{array}{cccc} \mathscr{L}: & C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) & \to & C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega) \\ & u & \mapsto & (Lu, u\,|_{\partial\Omega}) \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços de Banach

Demonstração. É obvio que $\mathscr{L}$ é linear e contínuo

$$\|(Lu, u\,|_{\partial\Omega})\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)} \leq C\|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})}$$

Obtemos o operador inverso

$$\mathscr{L}^{-1} : C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) \times C^{2,\alpha}(\partial\Omega) \to C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$$

da seguinte forma: sejam $f^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Do lema 3.3.3 e da definição da norma em $C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ que o segue podemos obter $\tilde{\varphi}$ uma extensão de φ para $\overline{\Omega}$ com $\|\tilde{\varphi}\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq 2\|\varphi\|_{C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}$. Pelo teorema 3.5.5 existe uma única solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de $Lu = f$ em $\overline{\Omega}$ e $u = \tilde{\varphi}$ em $\partial\Omega$. Então definimos:

$$\mathscr{L}^{-1}(f, \varphi) = u$$

A função $\mathscr{L}^{-1}$ está bem definida, pois u não depende da extensão específica $\tilde{\varphi}$ devido ao princípio do máximo. Ademais a continuidade de $\mathscr{L}^{-1}$ segue do corolário 3.5.4. Temos:

$$\begin{aligned}\|\mathscr{L}^{-1}(f,\varphi)\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} = \|u\|_{C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})} &\leq C(|f|_{0,\alpha;\Omega} + |\tilde{\varphi}|_{2,\alpha;\Omega}) \\ &\leq \bar{C}(|f|_{0,\alpha;\Omega} + |\varphi|_{2,\alpha;\Omega}) \leq \bar{C}\|(f,\varphi)\|_{C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})\times C^{2,\alpha}(\partial\Omega)}\end{aligned}$$

□

A seguir estamos interessados na regularidida em Ω de soluções de $Lu = f$.

Lema 3.5.7. *Seja $B \subset \mathbb{R}^n$ uma bola e $\varphi \in C^0(\partial B)$. Assuma que $Lu := a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu$ é um operador linear uniformemente elíptico com coeficientes em $C^\alpha(\overline{B})$ e $c \leq 0$. Se $f \in C^\alpha(\overline{B})$ o problema de Dirichlet:*

$$\begin{cases} Lu = f, & \text{em } B \\ u = \varphi, & \text{em } \partial B \end{cases}$$

tem solução única em $C^{2,\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B})$.

Demonstração. Tomamos $\varphi_k \in C^\infty(\partial B)$ com $\varphi_k \xrightarrow{C^0(\partial B)} \varphi$. Pelo teorema 3.5.5 existem soluções únicas $u_k \in C^{2,\alpha}(\overline{B})$ de

$$\begin{cases} Lu_k = f, & \text{em } B \\ u_k = \varphi_k, & \text{em } \partial B \end{cases} \tag{3.31}$$

Pelo princípio do máximo temos ainda:

$$\sup_B |u_k - u_l| \leq \sup_{\partial B} |\varphi_k - \varphi_l|$$

Portanto a sequencia u_k converge em $C^0(\overline{B})$ para alguma função u.

Da estimativa de Schauder u_k é limitada em $C^{2,\alpha}(K)$ para todo compacto $K \Subset B$, do lema 3.1.2 podemos extrair uma subsequencia convergente e vemos que $u \in C^{2,\alpha}(B)$.

Tomando o limite da subsequencia convergente em 3.31 segue que $Lu = f$ em B e $u = \varphi$ em ∂B.

A unicidade segue do princípio do máximo. □

Lema 3.5.8. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $Lu := a^{ij}D_{ij}u + b^iD_iu + cu$ um operador linear uniformemente elíptico com coeficientes em $C^\alpha(\Omega)$ e $f \in C^\alpha(\Omega)$. Se $u \in C^2(\Omega)$ é solução de $Lu = f$ em Ω, então $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração. É suficiente provar que $f \in C^{2,\alpha}(B)$ para qualquer bola $B \Subset \Omega$. Seja B tal bola e considere o seguinte problema de Dirichlet para v:

$$\begin{cases} L_0 v := a^{ij}D_{ij}v + b^i D_i v = f - cu =: \tilde{f}, & \text{em } B \\ v = u, & \text{em } \partial B \end{cases} \tag{3.32}$$

Como $u \in C^2\overline{B}$ temos $\tilde{f} \in C^{0,\alpha}(\overline{B})$. Pelo lema 3.5.7 o problema (3.32) tem solução única em $C^{2,\alpha}(B) \cap C^0(\overline{B})$. Como u é claramente solução, ele deve ser esta solução única e segue que $u \in C^{2,\alpha}(B)$. □

Note que este resultado não depende do sinal de c.

A seguir estendemos este lema para obter regularidade $C^{k,\alpha}$ para soluções. Faremos uso de *quocientes de diferença*, que são definidos da seguinte forma: Se v é uma função definida no domínio Ω e $e_i, i = 1, \ldots, n$ é a base canonica de $\mathbb{R}^n$, o quociente de diferença de v em x na direção e_i é:

$$\Delta^h v(x) = \Delta_i^h v(x) := \frac{v(x+he_i) - v(x)}{h}$$

Teorema 3.5.9 (Regularidade Interior)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, $Lu := a^{ij}D_{ij}u + b^i D_i u + cu$ um operador linear uniformemente elíptico com coeficientes em $C^{k,\alpha}(\Omega)$ e $f \in C^{k,\alpha}(\Omega)$. Se $u \in C^2(\Omega)$ é solução de $Lu = f$ em Ω, então $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$.*

Demonstração. O lema 3.5.8 mostra que o resultado é válido para $k = 0$. Afirmamos que para obter o teorema é suficiente mostrar o caso $k = 1$. De fato, se assumimos o caso $k = 1$ podemos demonstrar o resultado para todo k por indução da seguinte forma:

Seja $k > 1$, assumimos o resultado para $k-1$. Se L, f e u satisfazem as hipóteses do enunciado, temos do caso $k-1$ que $u \in C^{k+1,\alpha}(\Omega)$. Como f e os coeficientes de L são de classe $C^{k,\alpha}(\Omega)$, dado β um multi-indice com $|\beta| = k-1$ podemos derivar $k-1$ vezes a equação $Lu = f$ para obter $L\tilde{u} = \tilde{f}$, onde $\tilde{u} = D^\beta u$ e $\tilde{f}$ é a soma de $D^\beta f$ com termos que são produtos de derivadas dos coeficientes de L de orgem $\leq k-1$ e derivadas de u de ordem $\leq k$. Temos então $\tilde{f} \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ e podemos aplicar o caso $k = 1$ para concluir que $D^\beta u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Como isto vale para todo multi-índice β de ordem $k-1$, segue que $u \in C^{k+2,\alpha}(\Omega)$, como queríamos.

Tratamos então de mostrar o caso $k = 1$. Tomando quociente de diferença na direção e_i em ambos os lados da equação $Lu = a^{ij}D_{ij}u + b^i D_i u + cu = f$ obtemos:

$$\begin{aligned} &L(\Delta^h u) = a^{ij}D_{ij}\Delta^h u + b^i D_i \Delta^h u + c\Delta^h u = F_h \\ &\text{onde } F_h = \Delta^h f - (\Delta^h a^{ij})D_{ij}\bar{u} - (\Delta^h b^i)D_i\bar{u} - (\Delta^h c)\bar{u}, \text{ com } \bar{u}(x) = u(x+he_i) \end{aligned} \tag{3.33}$$

Como $f \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ e temos para h suficientemente pequeno:

$$\Delta^h f(x) = \frac{1}{h}\int_0^1 \frac{d}{dt} f(x+the_i)dt = \int_0^1 D_i f(x+the_i)dt$$

vemos que $\Delta^h f \in C^{0,\alpha}(B)$ para toda bola $B \Subset \Omega$.

Sejam então B e B' bolas tais que $B' \subset B \Subset \Omega$ e $\operatorname{dist}(B', \partial B) = h_0 > 0$, se $x, y \in B'$ e $|h| < \operatorname{dist}(B, \partial\Omega)$ temos

$$|\Delta^h f(x) - \Delta^h f(y)| \leq \int_0^1 |D_i f(x+the_i) - D_i f(y+the_i)|\, dt \leq |x-y|^\alpha [Df]_{\alpha;B}$$

e temos também $\sup_{B'} |\Delta^h f| \leq \sup_B |Df|$. Segue que existe um limitante uniforme $M = |Df|_{0,\alpha;B}$ tal que $|\Delta^h f|_{0,\alpha;B'} \leq M$ para $0 < |h| < h_0$. Análogamente existem limitantes uniformes para $\Delta^h a^{ij}, \Delta^h b^i$ e $\Delta^h c$ em $C^{0,\alpha}(B')$. Como do lema 3.5.8 temos $u \in C^{2,\alpha}(\Omega)$ obtemos também que $F_h \in C^{0,\alpha}(B')$ e também temos limitante uniforme para F_h.

Aplicando então a estimativa de Schauder local a (3.33) obtemos limitante uniforme para $|\Delta^h u|_{2,\alpha,B'}$. Usando o lema 3.1.2 obtemos uma subsequência convergente $\Delta^{h_m} u \xrightarrow{C^2(B')} v \in C^{2,\alpha}(B')$ onde $h_m \to 0$. De $\Delta^h u(x) \xrightarrow{h\to 0} D_i u(x)$, vemos que $v = D_i u$. Como isto vale para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ segue que $u \in C^{3,\alpha}(B')$. Como $B' \Subset \Omega$ é arbitrária temos $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. $\square$

4 A EQUAÇÃO DA CURVATURA MÉDIA PRESCRITA

Neste capítulo estudamos o operador [1]

$$\mathscr{M}u := D_i\left(\frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+|Du|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{D_i u D_j u}{1+|Du|^2}\right)D_{ij}u \tag{4.1}$$

e o problema de Dirichlet associado

$$\begin{cases} \mathscr{M}u = \mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.2}$$

Como vimos na seção 2.1, $\mathscr{M}u(x)$ é a curvatura média do gráfico da função u em $(x,u(x))$. O problema de Dirichlet acima é então conhecido como a equação da curvatura média prescrita para gráficos.

Na seção 4.1 demonstramos um princípio de comparação para equações elípticas quasi-lineares, que será usado para mostrar unicidade de soluções de (4.2). Na seção 4.2 fazemos uma digressão para mostrar o teorema do ponto fixo de Leray-Schauder, que será usado na seção 4.3 para mostrar que o problema de Dirichlet quasilinear é solúvel, desde que tenhamos estimativas a priori adequadas para soluções. Nas seções 4.4, 4.5 e 4.6 estabelecemos hipóteses adequadas e demonstramos as estimativas a priori desejadas para (4.2). Finalmente na seção 4.7 coletamos os resultados anteriores para obter o teorema final.

4.1 Equações quasilineares

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e $u \in C^2(\Omega)$. Chamamos operador quasilinear de segunda ordem um operador da forma:

$$Qu = a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du)$$

onde as funções $a^{ij}(x,z,p), i,j = 1,\dots n, b(x,z,p)$ são definidas em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ e podemos assumir $a^{ij} = a^{ji}$. O operador é dito elíptico em (x,z,p) se $(a^{ij}(x,z,p))$ é uma matriz positiva definida, isto é, se:

$$a^{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j > 0,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

O operador é dito uniformemente elíptico em $\mathscr{U} \subset \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ se existem constantes $\lambda, \Lambda > 0$ tais que, para todos $(x,z,p) \in \mathscr{U}$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$ temos:

$$\lambda|\xi|^2 \leq a^{ij}(x,z,p)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

[1] neste capítulo ainda usamos a convenção de Einstein para somas

Diremos ainda que Q é uniformemente elíptico com relação a u se Q é uniformemente elíptico no conjunto $\{(x, u(x), Du(x)) \mid x \in \Omega\}$.

Note que ao lidar com o problema (4.2) podemos considerar o operador $Qu := \mathscr{M}u - \mathscr{H}(x,u)$, de modo que temos:

$$
\begin{aligned}
a^{ij}(x,z,p) &= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}\right) \\
b(x,z,p) &= -\mathscr{H}(x,z)
\end{aligned}
$$

Como a^{ij} depende apenas de p, podemos escrever $a^{ij}(x,z,p) = a^{ij}(p)$ e temos:

$$
\begin{aligned}
a^{ij}(p)\xi_i\xi_j &= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(\delta_{ij}\xi_i\xi_j - \frac{p_i\xi_i p_j\xi_j}{1+|p|^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(|\xi|^2 - \frac{\langle p,\xi\rangle^2}{1+|p|^2}\right) \\
&\geq \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(|\xi|^2 - \frac{|p|^2|\xi|^2}{1+|p|^2}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(\frac{1}{1+|p|^2}\right)|\xi|^2
\end{aligned}
\tag{4.3}
$$

Portanto $\mathscr{M}$ é um operador elíptico em $\Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Ademais $\mathscr{M}$ é uniformemente elíptico com relação a u desde que u tenha gradiente limitado.

O resultado a seguir para operadores quasi-lineares tem papel semelhante ao pricípio do máximo para equações lineares, a versão que mostramos assume que os coeficientes a^{ij} não dependem de z e que b não depende de p, note que estas restrições se aplicam ao problema (4.2).

Teorema 4.1.1 (Princípio da comparação)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio e o operador Q dado por $Qu = a^{ij}(x,Du)D_{ij}u + b(x,u)$, onde $a^{ij} \in C^1(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ e $\frac{\partial}{\partial z}b(x,z) \leq 0$ para todo $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Suponha que $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ são tais que $Q(u) \geq Q(v)$ em Ω, $u \leq v$ em $\partial\Omega$ e Q é uniformemente elíptico com relação a u. Então $u \leq v$ em Ω.*

Demonstração. Primeiramente escrevemos

$$
\begin{aligned}
Qu - Qv &= a^{ij}(x,Du)D_{ij}u + b(x,u) - a^{ij}(x,Dv)D_{ij}v - b(x,v) \\
&= a^{ij}(x,Du)D_{ij}(u-v) + (a^{ij}(x,Du) - a^{ij}(x,Dv))D_{ij}v + (b(x,u) - b(x,v))
\end{aligned}
$$

Agora observamos que

$$
\begin{aligned}
a^{ij}(x,Du) - a^{ij}(x,Dv) &= \int_0^1 \frac{d}{dt}a^{ij}(x,tDu + (1-t)Dv)dt \\
&= \left(\int_0^1 D_{p_k}a^{ij}(x,tDu + (1-t)Dv)dt\right) \cdot D_k(u-v)
\end{aligned}
$$

Ademais do teorema do valor médio existe η_x entre $u(x)$ e $v(x)$ tal que:

$$b(x,u(x)) - b(x,v(x)) = (u(x) - v(x)) \cdot \frac{\partial b}{\partial z}(x,\eta_x)$$

Portanto temos:

$$Qu - Qv = \tilde{a}^{ij} D_{ij}(u-v) + \tilde{b}^k D_k(u-v) + \tilde{c}(u-v)$$

Onde

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{ij}(x) &= a^{ij}(x,Du) \\
\tilde{b}^k(x) &= D_{ij}v(x) \int_0^1 D_{p_k} a^{ij}(x, tDu(x) + (1-t)Dv(x))dt \\
\tilde{c}(x) &= \frac{\partial b}{\partial z}(x,\eta_x)
\end{aligned}$$

Então

$$\begin{aligned}
\tilde{a}^{ij} D_{ij}(u-v) + \tilde{b}^k D_k(u-v) + \tilde{c}(u-v) \geq 0, &\quad \text{em } \Omega \\
u - v \leq 0, &\quad \text{em } \partial\Omega
\end{aligned}$$

onde $\tilde{a}^{ij}$ satisfaz, para todos $x \in \Omega$ e $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda|\xi|^2 \leq \tilde{a}^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \Lambda|\xi|^2$$

Segue do princípio do máximo para equações lineares (ver teorema 3.5 de [3]) que $u \leq v$ em Ω. $\square$

Como consequência direta obtemos a unicidade de soluções para o problema de Dirichlet:

Corolário 4.1.2. *Para Q como no teorema 4.1.1. Se $u,v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ são tais que $Q(u) = Q(v)$ em Ω, $u = v$ em $\partial\Omega$ e Q é uniformemente elíptico com relação a u e v. Então $u = v$ em Ω.*

4.2 Teoremas de ponto fixo

Nesta seção demonstraremos um teorema de ponto fixo que será usado na próxima seção para demonstrar o resultado central de existencia de soluções para o problema 4.2. Começamos lembrando o teorema do ponto fixo de Brouwer

Teorema 4.2.1 (Ponto Fixo de Brouwer). *Se $B \subset \mathbb{R}^n$ é a bola fechada de centro zero e raio 1. Toda aplicação contínua $f : B \to B$ tem um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$*

Demonstração. Ver teorema 11 do capítulo VII de [8] □

No que segue tratamos de estender este resultado. Naturalmente o resultado se estende para funções contínuas $f : K \to K$ onde K é qualquer conjunto homeomorfo a uma bola unitária euclideana. Sobre isto temos:

Lema 4.2.2. *Se $C \subset \mathbb{R}^n$ é aberto, limitado e convexo então $\overline{C}$ é homeomorfo à bola unitária fechada.*

Demonstração. Assumimos sem perda de generalidade que $0 \in C$ de modo que existe $\eta > 0$ tal que $B_\eta(0) \subset C$.

Seja $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| = 1\}$ a esfera unitária. Definimos a aplicação $d : S \to \mathbb{R}$ por:

$$d(v) := \inf\{r > 0 \mid rv \notin C\}$$

Mostraremos a seguir que a função d é contínua.

Para $v \in S$, denotaremos $Rv := \{tv \mid t \in [0, +\infty)\}$ o raio na direção v.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer, por definição de d existe $x \in C \cap Rv$ tal que $d(v) - |x| < \varepsilon/2$, como C é aberto existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(x) \subset C$, podemos tomar $\delta < \varepsilon/4$. O conjunto $V = \{w \in S \mid Rw \cap B_\delta(x) \neq \varnothing\}$ é aberto em S e temos $d(w) \geq d(v) - \varepsilon$ para todo $w \in V$.

Resta então mostrar que podemos garantir $d(w) \leq d(v) + \varepsilon$ para w numa vizinhança de v em S.

<u>Afirmação:</u> Se $x \in Rv$ é tal que $|x| > d(v)$ então $x \notin \overline{C}$.

De fato, assumindo por absurdo que $x \in \overline{C}$, seja $y \in Rv$ tal que $|y| = d(v)$. Pela definição de d existem pontos de Rv arbitrariamente próximos de y que não estão em C, de modo que devemos ter $y \in \partial C$ e portanto $x \notin B_\eta(0)$, pois do contrário y também estaria no interior desta bola e seiria ponto interior de C.

seja $P : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a função definida da seguinte forma: Se $z \in \mathbb{R}^n$, $P(z)$ é o ponto da semi-reta $\overrightarrow{zy}$ mais próximo da origem. É fácil ver que P é uma aplicação contínua, de modo que sendo $P(x) = 0$ existe $\gamma > 0$ tal que $P(z) \in B_\eta(0)$ para todo $z \in B_\gamma(x)$.

Isto implica que para todo $z \in B_\gamma(x)$ o ponto y está no fecho convexo do conjunto $B_\eta(0) \cup \{z\}$. Como $x \in \overline{C}$, existe algum $z \in B_\gamma(x)$ tal que $z \in C$ e a convexidade de C então implica que $y \in C$, o que contradiz termos $y \in \partial C$. completando a demonstração da afirmação

Tomando agora $x = (d(v) + \varepsilon/2)v$, temos da afirmação que $x \notin \overline{C}$, portanto existe $\delta' > 0$ tal que $B_{\delta'}(x) \subset \mathbb{R}^n \backslash \overline{C}$, podemos assumir $\delta' < \varepsilon/4$ de modo que se $V' = \{w \in S \mid$

$Rw \cap B_{\delta'}(x) \neq \varnothing\}$ vemos que V' é uma vizinhança de v em S e temos $d(w) \leq d(v) + \varepsilon$ para todo $w \in V'$.

Note que a afirmação acima implica ainda que temos

$$d(v) := \sup\{r > 0 \mid rv \in \overline{C}\}$$

Munidos da função d definimos $f : \overline{C} \to \overline{B}_1(0)$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{d(x/|x|)}, & \text{se } x \in \overline{C} \backslash \{0\} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

A função f assim definida será claramente contínua e tem inversa

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} xd(x/|x|), & \text{se } x \in \overline{B}_1(0) \backslash \{0\} \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Também contínua. Mostrando o lema. $\square$

Corolário 4.2.3. *Se B é um espaço de Banach e $\{x_1, \ldots, x_N\} \subset B$ então o fecho convexo de $\{x_1, \ldots, x_N\}$ é homeomorfo a uma bola fechada unitária de algum espaço $\mathbb{R}^n$*

Demonstração. O fecho convexo de $\{x_1, \ldots, x_N\}$ é o conjunto

$$K = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\}$$

Este fecho convexo está contido na variedade afim $V = \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \mid \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\}$. Então $F = \{x - x_1 \mid x \in V\}$ é um subespaço vetorial de B de dimensão finita e portanto é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, onde n é a dimensão de F, daí V também é homeomorfo a $\mathbb{R}^n$, ademais temos $K = \overline{C}$, onde:

$$C := \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \mid 0 < \lambda_i < 1, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\}$$

é aberto em V e convexo, então o resultado segue do lema anterior. $\square$

A seguir obtemos uma extensão do teorema do ponto fixo de Brouwer para espaços de Banach.

Teorema 4.2.4. *Seja C um conjunto compacto e convexo num espaço de Banach B e $T : C \to C$ uma aplicação contínua. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Seja $k \in \mathbb{N}$ qualquer. Como C é compacto, existem $x_1, \ldots, x_N \in C$ tais que $C \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{1/k}(x_i)$. Por conveniencia denotaremos $B_i := B_{1/k}(x_i)$. Seja C_k o fecho convexo de $\{x_1, \ldots, x_N\}$, isto é

$$C_k := \{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i \mid 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1\}$$

Definimos $J_k : C \to C_k$ por:

$$J_k(x) = \frac{\sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}(x, C \backslash B_i) x_i}{\sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}(x, C \backslash B_i)}$$

Claramente J_k é contínua e para cada $x \in C$ e $i \in \{1, \ldots, N\}$ temos ou $\operatorname{dist}(x, C \backslash B_i) = 0$ ou $\|x - x_i\| \leq 1/k$, portanto:

$$\|J_k(x) - x\| \leq \frac{\sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}(x, C \backslash B_i) \|x_i - x\|}{\sum_{i=1}^{N} \operatorname{dist}(x, C \backslash B_i)} \leq \frac{1}{k}$$

Agora observamos que $J_k \circ T \mid_{C_k}$ é uma aplicação de C_k em C_k e devido ao corolário 4.2.3 podemos aplicar o teorema do ponto fixo de Brouwer para encontrar y_k com $J_k \circ T(y_k) = y_k$ e temos:

$$\|y_k - T(y_k)\| = \|J_k \circ T(y_k) - T(y_k)\| \leq \frac{1}{k}$$

Como C é compacto, existe uma subsequencia $y_{k'} \to y$ e tomando limite na expressão acima obtemos $T(y) = y$. □

Corolário 4.2.5 (Ponto Fixo de Schauder)**.** *Seja C um conjunto fechado e convexo num espaço de Banach B e $T : C \to C$ uma aplicação contínua tal que $T(C)$ é pré-compacto, isto é, o fecho de $T(C)$ é compacto. Então T tem um ponto fixo.*

Demonstração. Seja K o fecho convexo de $\overline{T(C)}$, como $T(C) \subset C$ e C é fechado e convexo temos que $K \subset C$, então o conjunto $\overline{K}$ é convexo e compacto (ver teorema 5.35 de [1]) e como C é fechado temos ainda $\overline{K} \subset C$. Portanto a restrição $T \mid_{\overline{K}}$ é uma aplicação de $\overline{K}$ em $\overline{K}$ à qual podemos aplicar o teorema 4.2.4 para obter ponto fixo. □

O seguinte resultado é nosso objetivo principal nesta seção, este teorema de ponto fixo assume uma estimativa a priori para as soluções de uma família de equações e será aplicado na próxima seção a equações quasilineares. Lembramos que uma aplicação entre dois espaços de Banach é dita uma *aplicação compacta* se a imagem de qualquer conjuntos limitado é pré-compacta

Teorema 4.2.6 (Ponto fixo de Leray-Schauder)**.** *Sejam B um espaço de Banach e $T : B \to B$ uma aplicação compacta. Considere a seguinte família de equações em B:*

$$\sigma T(x) = x, \text{ onde } \sigma \in [0,1]. \tag{4.4}$$

Se existe uma constante $M > 0$, independente de σ, tal que toda solução $x \in B$ de 4.4 satisfaz

$$\|x\| < M, \tag{4.5}$$

então T tem ponto fixo.

Demonstração. Definimos

$$T^*(x) := \begin{cases} T(x), & \text{se } \|T(x)\| \le M \\ \dfrac{M}{\|T(x)\|}T(x), & \text{se } \|T(x)\| > M \end{cases}$$

Como $T(\overline{B}_M(0))$ é pré-compacto, afirmamos que $T^*(\overline{B}_M(0))$ também é pré-compacto.

De fato, considere uma sequencia $y_k = T^*(x_k)$, com $x_k \in \overline{B}_M(0)$. Se para infinitos termos x_k tivermos $\|T(x_k)\| \le M$ então para estes termos temos $y_k = T(x_k)$ e podemos obter uma subsequencia de y_k convergente. Caso contrário teremos $\|T(x_k)\| > M$ para todo $k > k_0$, se $T(x_{k'}) \to w$ é uma subsequencia convergente de $T(x_k)$ temos $\|w\| \ge M > 0$ e portanto $y_{k'} \to \dfrac{M}{\|w\|}w$. Concluímos que sequencias em $T^*(\overline{B}_M(0))$ sempre tem subsequencia convergente, como queríamos.

Agora $T^* |_{\overline{B}_M(0)}: \overline{B}_M(0) \to \overline{B}_M(0)$ satisfaz as hipóteses do corolário 4.2.5 e vemos que existe $z \in \overline{B}_M(0)$ com $T^*(z) = z$.

Afirmamos que $\|T(z)\| \le M$ e portanto $T(z) = T^*(z) = z$.

De fato, se fosse $\|T(z)\| > M$, então z é solução de $\sigma T(z) = z$ com $\sigma = \dfrac{M}{\|T(z)\|}$ e segue que $\|z\| < M$. Mas temos também $\|z\| = \|T^*(z)\| = \left\| \dfrac{M}{\|T(z)\|}T(z) \right\| = M$, uma contradição. □

4.3 Existência de soluções

Nesta seção mostraremos um teorema de existência de soluções para equações elípticas quasilineares. Veremos que tais equações tem solução, sob condições de regularidade apropriadas do domínio e dados, desde que tenhamos estimativas a priori para soluções de uma família de equações.

Esta situação é análoga ao caso linear (teorema 3.5.5) em que as estimativas de Schauder foram usadas para obter estimativa a priori das soluções de uma família de equações. Entretanto, no caso de equações quasilineares estimativas a priori não podem ser obtidas com a mesma generalidade.

Teorema 4.3.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, com $0 < \alpha < 1$. Seja ainda Q um operador quasilinear elíptico $Qu = a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du)$ com $a^{ij}, b \in C^{\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Para $0 \leq \sigma \leq 1$ definimos $Q_\sigma u := a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + \sigma b(x,u,Du)$. Considere a família de equações:*

$$\begin{cases} Q_\sigma u = 0, & em\ \Omega \\ u = \sigma\varphi, & em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.6}$$

Se existem constantes C e β (independentes de σ) com $0 < \beta < 1$, tais que toda solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de (4.6) satisfaz:

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C, \tag{4.7}$$

então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} Qu = 0, & em\ \Omega \\ u = \varphi, & em\ \partial\Omega \end{cases} \tag{4.8}$$

tem solução em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Pretendemos aplicar o teorema 4.2.6. Para este propósito definimos a aplicação $T : C^{1,\beta}(\overline{\Omega}) \to C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ da seguinte forma:

Se $v \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, temos $a_v^{ij}(x) := a^{ij}(x,v(x),Dv(x)) \in C^{0,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ e $b_v(x) := b(x,v(x),Dv(x)) \in C^{0,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ (ver ítem (iii) do lema 3.1.1), portanto do teorema 3.5.5 existe uma única $u \in C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$ que é solução do problema de Dirichlet linear:

$$\begin{cases} a_v^{ij}D_{ij}u + b_v = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Definimos então $T(v) = u$. Note que pontos fixos de T são soluções de (4.8). Mostramos a seguir que T satisfaz as hipóteses do teorema 4.2.6.

A aplicação T (vista como aplicação de $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$) é compacta. De fato, devido à estimativa de Schauder, T leva conjuntos limitados em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ em conjuntos limitados em $C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, estes por sua vez são pré-compactos em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ e também em $C^{2}(\overline{\Omega})$ devido ao lema 3.1.2.

Para mostrar que T é contínua suponha que $v_m \to v$ em $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. Como vimos acima, $\{T(v_m)\}$ é pré-compacto em $C^2(\overline{\Omega})$, de modo que existe uma subsequencia $v_{m'}$ tal que $T(v_{m'}) \to u$ em $C^2(\overline{\Omega})$. Então

$$
\begin{aligned}
a^{ij}(x,v,Dv)D_{ij}u + b(x,v,Dv) &= \lim_{m'\to\infty} \left(a^{ij}(x,v_{m'},Dv_{m'})D_{ij}(T(v_{m'})) + b(x,v_{m'},Dv_{m'})\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Portanto segue que $u = T(v)$, e vemos que a sequencia $T(v_m)$ tem $T(v)$ como único ponto de acumulação, segue que $T(v_m) \to T(v)$, mostrando a continuidade.

Agora observamos que para $\sigma \in (0,1]$ temos:

$$
\begin{aligned}
\sigma T(u) = u \iff T(u) &= \frac{u}{\sigma} \\
&\iff \begin{cases} a^{ij}(x,u,Du)\dfrac{D_{ij}u}{\sigma} + b(x,u,Du) = 0, & \text{em } \Omega \\ \dfrac{u}{\sigma} = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} Q_\sigma u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \sigma\varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}
\end{aligned}
$$

se $\sigma T(u) = u$ a princípio sabemos apenas que $u \in C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$, mas como $C^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega}) \subset C^{1,1}(\overline{\Omega})$ vemos que $a_u^{ij}(x) := a^{ij}(x,u(x),Du(x)) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $b_u(x) := b(x,u(x),Du(x)) \in C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$. Como u é solução de:

$$
\begin{cases} a_u^{ij}D_{ij}u + \sigma b_u = 0, & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}
$$

segue da estimativa de Schauder que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Assim vemos que a estimativa (4.7) implica a estimativa (4.5) para T.

Concluímos que as hipóteses do teorama 4.2.6 são satisfeitas e segue que existe u tal que $T(u) = u$. Portanto u é solução de (4.8) e da discussão acima sabemos também que $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

Para a equação da curvatura média prescrita, a família de equações (4.6) se torna:

$$
\begin{cases} \mathscr{M}u = \sigma\mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \sigma\varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.9}
$$

Com $0 \leq \sigma \leq 1$. E temos então:

Corolário 4.3.2 (Existência de soluções de (4.2) assumindo estimativa $C^{1,\beta}$ a priori)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. Seja $\mathscr{H} : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^α com $\frac{\partial}{\partial z}\mathscr{H}(x,z) \geq 0$ para todo $(x,z) \in \Omega \times \mathbb{R}$. Se existem constantes C e β (independentes de σ) com $0 < \beta < 1$, tais que toda solução $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de (4.9) satisfaz:*

$$\|u\|_{C^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq C, \tag{4.10}$$

então 4.2 tem solução única em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$

Demonstração. Note que devido a (4.3) o operador $\mathscr{M}$ é uniformemente elíptico com relação a qualquer função em $C^1(\overline{\Omega})$. Portanto a existencia de soluções segue do teorema 4.3.1 e a unicideda segue do corolário 4.1.2. □

Como já mencionamos anteriormente, ao contrário do caso linear em que estimativas a priori podem ser obtidas com grande generalidade (estimativas de Schauder), no caso quasilinear em geral hipóteses adicionais são necessárias. Para ilustrar este fato suponha que u é uma solução de (4.2), então do teorema da divergencia temos:

$$\begin{aligned}\int_\Omega \mathscr{H}(\cdot,u) &= \int_\Omega \operatorname{div}\left(\frac{Du}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)\\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\langle Du, N\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}\end{aligned}$$

E como $\left|\dfrac{\langle Du, N\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right| \leq 1$ temos

$$\left|\int_\Omega \mathscr{H}(\cdot,u)\right| \leq |\partial\Omega|$$

Portanto vemos que para que existam soluções de (4.2) deve haver relação entre a função prescritora $\mathscr{H}$ e a fronteira do domínio $\partial\Omega$.

Nas seções que seguem estabeleceremos condições suficientes para que tenhamos a estimativa a priori (4.10). Observamos que basta obter estimativas $C^1(\overline{\Omega})$, pois então a estimativa $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ segue do seguite teorema, que não demonstraremos aqui:

Teorema 4.3.3 (Ladyzhenskaya-Ural'tseva)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $\partial\Omega$ de classe C^2 e $\varphi \in C^2(\overline{\Omega})$. Suponha que $u \in C^2(\overline{\Omega})$ é solução de*

$$\begin{cases} Qu = a^{ij}(x,u,Du)D_{ij}u + b(x,u,Du) = 0, & \text{em } \Omega\\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega\end{cases}$$

Onde Q é um operador elíptico tal que $a^{ij} \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ e $b \in C^0(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Se $\|u\|_{C^1(\overline{\Omega})} \leq M$, $\|\varphi\|_{C^2(\overline{\Omega})} \leq \Phi$ e $\lambda > 0$ é uma quota infeior para os autovalores de $(a^{ij}(x,z,p))$ em $\overline{\Omega} \times [-M,M] \times \overline{B}_M(0)$, então existem $C = C(n,M,\Phi,\Omega,\lambda)$ e $\beta = \beta(n,M,\Omega,\lambda) > 0$ tais que:

$$[Du]_{\beta;\Omega} \leq C$$

Demonstração. Ver teorema 13.7 de [3] □

4.4 Estimativa do supremo

Nesta seção estabelecemos condições suficientes para que tenhamos estimativa a priori do supremo de soluções da equação da curvatura média prescrita. Faremos uso de noções básicas de espaços de Sobolev, para as quais referimos ao capítulo 7 de [3].

Por toda esta seção assumimos que $\mathscr{H}(x,z)$ é de classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ e que $\mathscr{H}$ é crescente em z.

Note primeiramente que se u é solução de (4.2), usando integração por partes vemos para $\eta \in C^1_c(\overline{\Omega})$ temos:

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega \mathscr{H}(x,u)\eta\, dx\right| &= \left|\int_\Omega D_i\left(\frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}}\right)\eta\right| dx \\ &= \left|\int_\Omega \frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} D_i\eta\, dx\right| \\ &= \left|\int_\Omega \frac{\langle Du, D\eta\rangle}{\sqrt{1+|Du|^2}}\, dx\right| \leq \int_\Omega |D\eta|\, dx\end{aligned}$$

Mostraremos a seguir que com uma modificação nesta condição, obtemos uma condição suficiente para assegurar a estimativa do supremo.

Especificamente, assumimos que existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que

$$\left|\int_\Omega \mathscr{H}(x,0)\eta\, dx\right| \leq (1-\varepsilon_0)\int_\Omega |D\eta|\, dx \tag{4.11}$$

Para toda $\eta \in C^1_c(\Omega)$. Naturalmente a condição se estende para $\eta \in W^{1,2}_0(\overline{\Omega})$.

Lema 4.4.1 (Iteração de Stampacchia)**.** *Se $\varphi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ é uma função decrescente e existem constantes $\gamma > 1$, $p \geq 1$ e $C_0 > 0$ tais que*

$$|h-k|^p \varphi(h) \leq C_0\,(\varphi(k))^\gamma \quad \forall h > k \geq k_0 \tag{4.12}$$

então $\varphi(k_0 + d) = 0$, onde $d^p = C_0 \cdot 2^{\frac{p\gamma}{\gamma-1}}\,(\varphi(k_0))^{\gamma-1}$

Demonstração. Definimos $k_r = k_0 + d - \frac{d}{2^r}$, para $r = 0, 1, 2, \ldots$. A sequência k_r é crescente em r e $k_r \to k_0 + d$. De (4.12) temos

$$\left|\frac{d}{2^r} - \frac{d}{2^{r+1}}\right|^p \varphi(k_{r+1}) \leq C_0\left(\varphi(k_r)\right)^\gamma$$

ou

$$\varphi(k_{r+1}) \leq C_0\left(\frac{2^{(r+1)p}}{d^p}\right)\left(\varphi(k_r)\right)^\gamma$$

Afirmamos que

$$\varphi(k_r) \leq \varphi(k_0)\cdot 2^{r\mu}, \quad \text{onde } \mu = \frac{p}{1-\gamma} < 0. \tag{4.13}$$

Provamos a afirmação por indução. O caso $r = 0$ é trivial, assumindo (4.13) para r verifiquemos o caso $r+1$:

$$\begin{aligned}
\varphi(k_{r+1}) &\leq C_0\left(\frac{2^{(r+1)p}}{d^p}\right)\left(\varphi(k_r)\right)^\gamma \\
&\leq C_0\left(\frac{2^{(r+1)p}}{d^p}\right)\left(\varphi(k_0)\right)^\gamma \cdot 2^{r\mu\gamma} \\
&= C_0\left(\frac{2^{(r+1)p}}{d^p}\right)\left(\varphi(k_0)\right)^\gamma \cdot 2^{\dfrac{rp\gamma}{1-\gamma}}
\end{aligned}$$

Da definição de d temos $\dfrac{C_0\left(\varphi(k_0)\right)^{\gamma-1}}{d^p} = 2^{\dfrac{-p\gamma}{\gamma-1}}$, o que nos dá:

$$\varphi(k_{r+1}) \leq 2^{\dfrac{-p\gamma}{\gamma-1}}\cdot 2^{(r+1)p}\cdot 2^{\dfrac{rp\gamma}{1-\gamma}}\varphi(k_0)$$

Calculando e expoente de 2 temos:

$$(r+1)p - p\frac{\gamma}{\gamma-1} - rp\frac{\gamma}{\gamma-1} = (r+1-(r+1)\frac{\gamma}{\gamma-1})p = (r+1)\frac{\gamma}{1-\gamma}p = \mu(r+1)$$

completando a indução.

Agora fazendo $r \to \infty$ em (4.13), como $\mu < 0$ segue:

$$\varphi(k_0+d) \leq \lim_{r\to\infty}\varphi(k_r) \leq 0$$

Portanto $\varphi(k_0+d) = 0$, como queríamos. $\square$

Para uso na demonstração da seguinte proposição, lembramos a desigualdade de Sobolev:

Se $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ com $1 \leq p < n$ vale:

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}} \right)^{\frac{n-p}{np}} \leq C(n,p) \left(\int_\Omega |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

Proposição 4.4.2. *Se $\mathscr{H}(x,z)$ é de classe $C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$, $\mathscr{H}$ é crescente em z e a condição* (4.11) *é satisfeita, qualquer solução u de* (4.2) *satisfaz uma estimativa da forma:*

$$\sup_\Omega |u| \leq \sup_\Omega |\varphi| + C(n, \varepsilon_0, |\Omega|)$$

Demonstração. Definimos:

$$u_k = \max\{u-k, 0\} \quad \text{para } k \geq k_0 := \sup_\Omega |\varphi|.$$

Então $u_k \mid_{\partial\Omega} \equiv 0$ e $u_k \in C^{0,1}(\overline{\Omega}) = W^{1,\infty}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$. A função u_k só pode assumir valores não nulos no conjunto:

$$A(k) := \{x \in \Omega \mid u(x) > k\}$$

Claramente $|A(k)|$ é decrescente em k. Pretendemos aplicar a iteração de Stampacchia à função $|A(k)|$.

Como $u_k \in W_0^{1,2}(\Omega)$ podemos usar integração por partes para obter:

$$\int_\Omega \mathscr{H}(x,u) u_k \, dx = -\int_\Omega \frac{D_i u}{\sqrt{1+|Du|^2}} D_i u_k \, dx$$

Se $u_k(x) > 0$ temos $D_i u_k(x) = D_i u(x)$ de modo que podemos estimar

$$\begin{aligned} \int_{A(k)} \frac{|Du_k|^2}{\sqrt{1+|Du_k|^2}} dx &= -\int_{A(k)} \mathscr{H}(x,u) u_k \, dx \\ &\leq -\int_{A(k)} \mathscr{H}(x,0) u_k \, dx \end{aligned}$$

E de (4.11) obtemos:

$$\int_\Omega \frac{|Du_k|^2}{\sqrt{1+|Du_k|^2}} dx \leq (1-\varepsilon_0) \int_{A(k)} |Du_k| \, dx$$

Isto implica:

$$\begin{aligned}
\int_{A(k)} |Du_k|\,dx &\leq \int_{A(k)} \sqrt{1+|Du_k|^2}\,dx \\
&= \int_{A(k)} \frac{1+|Du_k|^2}{\sqrt{1+|Du_k|^2}}\,dx \\
&= \int_{A(k)} \frac{1}{\sqrt{1+|Du_k|^2}}\,dx + \int_{A(k)} \frac{|Du_k|^2}{\sqrt{1+|Du_k|^2}}\,dx \\
&\leq |A(k)| + (1-\varepsilon_0)\int_{A(k)} |Du_k|\,dx
\end{aligned}$$

que nos dá

$$\int_{A(k)} |Du_k|\,dx \leq \frac{1}{\varepsilon_0}|A(k)| \quad \forall k \geq k_0$$

Da desigualdade de Sobolev segue:

$$\left(\int_{\Omega} |u_k|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \leq \frac{C(n)}{\varepsilon_0}|A(k)|$$

Combinando com a desigualdade de Holder obtemos:

$$\begin{aligned}
\int_{A(k)} |u_k|\,dx &\leq \left(\int_{\Omega} |u_k|^{\frac{n}{n-1}}\,dx\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\int_{A(k)} 1^n\,dx\right)^{\frac{1}{n}} \\
&\leq \frac{C(n)}{\varepsilon_0}|A(k)|^{1+\frac{1}{n}}
\end{aligned}$$

Agora observamos que para $h > k \geq k_0$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_{A(k)} |u_k|\,dx = \int_{A(k)} u_k\,dx \geq \int_{A(h)} u_k\,dx &= \int_{A(h)} (u-k)\,dx \\
&\geq \int_{A(h)} (h-k)\,dx = |h-k||A(h)|
\end{aligned}$$

Que combinado com a estimativa anterior nos dá:

$$|h-k||A(h)| \leq \frac{C(n)}{\varepsilon_0}|A(k)|^{1+\frac{1}{n}}$$

De modo que a condição (4.12) do lema 4.4.1 é satisfeita. Este lema então nos dá:

$$|A(k_0+d)| = 0, \text{ onde } d = \tilde{C}(n)\varepsilon_0^{-1}|A(k_0)|^{\frac{1}{n}} \leq \tilde{C}(n)\varepsilon_0^{-1}|\Omega|^{\frac{1}{n}}$$

Como u é contínua, segue que $A(k_0+d)=\varnothing$ e temos então:

$$\sup_\Omega u \leq k_0+d \leq \sup_\Omega|\varphi| + \tilde{C}(n)\varepsilon_0^{-1}|\Omega|^{\frac{1}{n}}$$

Agora para estimar $\inf_\Omega u$ basta aplicar a estimativa já provada a $v := -u$. Note que v satisfaz $\mathscr{M}v = -\mathscr{H}(x,-v) =: \tilde{\mathscr{H}}(x,v)$ e temos $\frac{\partial}{\partial z}\tilde{\mathscr{H}}(x,v) \geq 0.$ $\square$

Observe que quando aplicada à (4.9) a estimativa acima é claramente independente de σ.

4.5 Estimativa interior do gradiente

Nesta seção mostraremos que a norma do gradiente de soluções da equação da curvatura média prescrita pode ser controlada por sua norma restrita à fronteira. Isto é, vale uma espécie de princípio do máximo para o gradiente. Nesta seção faremos uso dos conceitos e notações introduzidos na seção 2.3.

Seja u uma solução de $\mathscr{M}u = \mathscr{H}(x,u)$ em um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, com $\frac{\partial \mathscr{H}}{\partial z} \geq 0$. Se $M = \{(x,u(x)) : x \in \Omega\}$ é o gráfico de u, considere em M a normal apontando para cima $N : M \to \mathbb{R}^{n+1}$ dada por $N(x,u(x)) = \frac{(-Du(x),1)}{\sqrt{1+|Du(x)|^2}}$.

A função $W : M \to \mathbb{R}$ dada por $W(x,u(x)) = \sqrt{1+|Du(x)|^2}$ é particularmente apropriada para realizar cálculos em M pois ela se relaciona com o campo normal por

$$W = \langle N, e_{n+1}\rangle^{-1}$$

onde estamos denotando por $e_1,\ldots,e_{n+1}$ a base canônica de $\mathbb{R}^{n+1}$.

Uma primeira tentativa de obter a estimativa que procuramos é tentar mostrar que $\Delta^M W \geq 0$, onde Δ^M é o operador de Laplace-Beltrami. Como este operador é elíptico, o princípio do máximo aplicado a W nos daria a estimativa procurada.

Fixado $p = (x,u(x)) \in M$, tomamos um sistema de coordenadas normais em p (ver lema 2.3.2), de modo que sendo $v_1,\ldots,v_n$ o referencial local associado à parametrização temos $g_{ij}(p) = \langle v_i(p), v_j(p)\rangle = \delta_{ij}$ e $\nabla_{v_i}v_j(p) = 0$. Nos cálculos a seguir deixamos subentendido que todas as funções são aplicadas em p. Temos

$$\begin{aligned}\Delta^M W &= \nabla_{v_i}\nabla_{v_i}W = \nabla_{v_i}\nabla_{v_i}\langle N, e_{n+1}\rangle^{-1} \\ &= \nabla_{v_i}(-\langle N,e_{n+1}\rangle^{-2}\langle D_{v_i}N, e_{n+1}\rangle) = \nabla_{v_i}(-W^2\langle D_{v_i}N, e_{n+1}\rangle)\end{aligned}$$

lembrando da segunda forma fundamental temos $h_{ij} = -\langle D_{v_i}N, v_j\rangle$, como a base $\{v_i(p)\}_{i=1}^n$ é ortonormal, temos em p que $D_{v_i}N = -h_{ij}v_j$, substituindo acima:

$$\begin{aligned}\Delta^M W &= \nabla_{v_i}(W^2 h_{ij}\langle v_j, e_{n+1}\rangle) \\ &= 2W\nabla_{v_i}W\, h_{ij}\langle v_j, e_{n+1}\rangle + W^2\nabla_{v_i}h_{ij}\,\langle v_j, e_{n+1}\rangle + W^2 h_{ij}\langle D_{v_i}v_j, e_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

lembramos que $h_{ij}\langle v_j, e_{n+1}\rangle = W^{-2}\nabla_{v_i}W$, de (2.16) temos em p que $D_{v_i}v_j = h_{ij}N$, ademais notamos que:

$$\begin{aligned}\nabla_{v_i}h_{ij} = D_{v_i}h_{ji} &= -D_{v_i}\langle D_{v_j}N, v_i\rangle \\ &= -\langle D_{v_i}D_{v_j}N, v_i\rangle - \langle D_{v_j}N, D_{v_i}v_j\rangle \\ &= \langle D_{v_j}N, D_{v_i}v_i\rangle + \langle N, D_{v_j}D_{v_i}v_j\rangle = D_{v_j}\langle N, D_{v_i}v_i\rangle \\ &= \nabla_{v_j}h_{ii} = \nabla_{v_j}H\end{aligned}$$

onde $H : M \to \mathbb{R}$ é a função curvatura média calculada com relação a N. Substituindo na expressão de $\Delta^M W$ temos:

$$\Delta^M W = 2W^{-1}\nabla_{v_i}W\,\nabla_{v_i}W + W^2\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle + W^2 h_{ij}h_{ji}\langle N, e_{n+1}\rangle$$

Denotaremos $|II|^2 = h_{ij}h_{ji} = \mathrm{tr}(h_{ij})(h_{ij})$, de modo que temos

$$\Delta^M W = 2W^{-1}|\nabla^M W|^2 + W|II|^2 + W^2\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle \tag{4.14}$$

Para lidar com $\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle$, tomamos $\bar{H}$ a extensão de H que é constante na direção e_{n+1}, temos de (2.18) que

$$\nabla^M H = \Pi_{T_pM}(D\bar{H}) = D\bar{H} - \langle D\bar{H}, N\rangle N$$

portanto

$$\begin{aligned}\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle &= \underbrace{\langle D\bar{H}, e_{n+1}\rangle}_{=0} - \langle D\bar{H}, N\rangle\langle N, e_{n+1}\rangle = -W^{-1}\langle D\bar{H}, N\rangle \\ &= W^{-2}\sum_{i=1}^n D_i\bar{H}D_i u\end{aligned}$$

Agora notamos que $\bar{H}(x,z) = \mathscr{H}(x, u(x))$, de modo que $D_i\bar{H} = \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_i} + \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial z}D_i u$ e segue

$$W^2\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^n \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_i}D_i u + \frac{\partial\mathscr{H}}{\partial z}|Du|^2 \tag{4.15}$$

Olhando para (4.14), vemos que o termo $\sum_{i=1}^n \dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial x_i}D_i u$ é o único empecilho para que possamos concluir que $\Delta^M W \geq 0$. Esta abordagem não leva diretamente ao que queríamos.

Vale mencionar, entretanto, que no caso particular em que $\mathscr{H}$ depende apenas da altura $\mathscr{H}(x,z) = \mathscr{H}(z)$ temos:

$$\Delta^M W = 2W^{-1}|\nabla^M W|^2 + W|II|^2 + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial z}|Du|^2 \geq 0$$

Portanto neste caso particular podemos aplicar o princípio do máximo em M para obter $\sup_M W \leq \sup_{\partial M} W$ e portanto:

$$\sup_{\Omega}|Du| \leq \sup_{\Omega}\sqrt{1+|Du|^2} \leq \sup_{\partial\Omega}\sqrt{1+|Du|^2}$$

Na proposição seguinte vemos como o argumento acima pode ser modificado para acomodar o caso geral.

Proposição 4.5.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, $u \in C^3(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ e $\mathscr{H}(x,z) \in C^1(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ tais que $\mathscr{M}u = \mathscr{H}(x,u)$ em Ω e $\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial z} \geq 0$. Se J, K e L são constantes tais que $\sup_\Omega |u| \leq J$, $\sup_{\Omega\times[-J,J]} |D_x \mathscr{H}| \leq K$ e $\sup_{\partial\Omega}|Du| \leq L$, existe $C = C(n,J,K,L)$ tal que:*

$$\sup_{\Omega}|Du| \leq C$$

Demonstração. Considere $l : M \to \mathbb{R}$ a função altura, isto é $l(p) = \langle p, e_{n+1}\rangle$, então claramente temos $l(x,u(x)) = u(x)$.

A idéia da demonstração é aplicar o princípio do máximo à função $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f = e^{\lambda l}W$, onde a constante λ será escolhida posteriormente.

Como antes, fixamos $p = (x,u(x)) \in M$ e tomamos um sistema de coordenadas normais em p cujo referencial local associado é $v_1,\ldots,v_n$. Deixamos subentendido que nos cálculos seguintes todas as funções são aplicadas em p. Temos

$$\begin{aligned}\Delta^M f &= \nabla_{v_i}\nabla_{v_i}(e^{\lambda l}W) = \nabla_{v_i}(\lambda e^{\lambda l}W\nabla_{v_i}l + e^{\lambda l}\nabla_{v_i}W)\\ &= \lambda\langle\nabla^M f, \nabla^M l\rangle + \lambda f\Delta^M l + \lambda e^{\lambda l}\nabla_{v_i}l\nabla_{v_i}W + e^{\lambda l}\Delta^M W\end{aligned}$$

Observamos que $\lambda e^{\lambda l}\nabla_{v_i}l\nabla_{v_i}W = \lambda\langle\nabla^M f,\nabla^M l\rangle - \lambda^2 W e^{\lambda l}|\nabla^M l|^2$ e lembrando (4.14) obtemos

$$\begin{aligned}\Delta^M f =& 2\lambda\langle\nabla^M f,\nabla^M l\rangle + \lambda e^{\lambda l}W\Delta^M l - \lambda^2 W e^{\lambda l}|\nabla^M l|^2 + 2W^{-1}e^{\lambda l}|\nabla^M W|^2\\ &+ e^{\lambda l}W|II|^2 + e^{\lambda l}W^2\langle\nabla^M H, e_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}2W^{-1}e^{\lambda l}|\nabla^M W|^2 &= 2W^{-1}\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle - 2\lambda e^{\lambda l}\langle\nabla^M l,\nabla^M W\rangle\\ &= 2W^{-1}\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle - 2\lambda\langle\nabla^M l,\nabla^M f\rangle + 2\lambda^2 e^{\lambda l}W|\nabla^M l|^2\end{aligned}$$

Então obtemos

$$\begin{aligned}\Delta^M f =& 2W^{-1}\langle \nabla^M f, \nabla^M W\rangle + \lambda^2 e^{\lambda l} W |\nabla^M l|^2 + \lambda e^{\lambda l} W \Delta^M l \\ &+ e^{\lambda l} W |II|^2 + e^{\lambda l} W^2 \langle \nabla^M H, e_{n+1}\rangle\end{aligned} \tag{4.16}$$

Agora de $\nabla_{v_i} l = \langle v_i, e_{n+1}\rangle$, temos $\nabla^M l = \langle v_i, e_{n+1}\rangle v_i = \Pi_{T_pM}(e_{n+1})$, portanto

$$\begin{aligned}|\nabla^M l|^2 &= \left|\Pi_{T_pM}(e_{n+1})\right|^2 = 1 - \langle N, e_{n+1}\rangle^2 \\ &= 1 - W^{-2}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\Delta^M l &= \nabla_{v_i}\nabla_{v_i} l = \nabla_{v_i}\langle v_i, e_{n+1}\rangle = \langle D_{v_i} v_i, e_{n+1}\rangle = h_{ii}\langle N, e_{n+1}\rangle \\ &= HW^{-1}\end{aligned}$$

Substituindo em (4.16) temos:

$$\begin{aligned}\Delta^M f =& 2W^{-1}\langle \nabla^M f, \nabla^M W\rangle + \lambda^2 f\left(1 - \frac{1}{W^2}\right) + \lambda e^{\lambda l} H \\ &+ e^{\lambda l} W |II|^2 + e^{\lambda l} W^2 \langle \nabla^M H, e_{n+1}\rangle\end{aligned}$$

De (4.15) temos

$$W^2\langle \nabla^M H, e_{n+1}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial x_i} D_i u + \frac{\partial \mathscr{H}}{\partial z}|Du|^2 \geq -K|Du| \geq -KW$$

O que implica

$$\Delta^M f \geq 2W^{-1}\langle \nabla^M f, \nabla^M W\rangle + \lambda^2 f\left(1 - \frac{1}{W^2}\right) + \lambda \frac{f}{W} H + f|II|^2 - Kf \tag{4.17}$$

A quantidade $|II|^2 = h_{ij}h_{ji}$ não muda se usarmos outra base ortonormal tem T_pM, de modo que considerando a base das direções principais vemos que $|II|^2 = \sum_{i=1}^n \kappa_i^2$, onde os κ_i são as curvaturas principais de M em p. Usando a desigualdade de Cauchy-Schwartz obtemos

$$|H| = |\langle (\kappa_1, \ldots, \kappa_n), (1, \ldots, 1)\rangle| \leq (\kappa_1^2 + \cdots + \kappa_n^2)^{1/2} n^{1/2}$$

Que equivale a

$$|II|^2 \geq \frac{1}{n} H^2$$

Agora da desigualdade das médias temos:

$$f\frac{\lambda}{W} H \leq f\left(\frac{n\lambda^2}{4W^2} + \frac{1}{n} H^2\right)$$

Usando estas desigualdades em (4.17) obtemos:

$$\begin{aligned}\Delta^M f &\geq 2W^{-1}\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle+\lambda^2 f\left(1-\frac{1}{W^2}\right)-f\frac{n\lambda^2}{4W^2}\underbrace{-f\frac{1}{n}H^2+f|II|^2}_{\geq 0}-Kf\\ &\geq 2W^{-1}\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle+\lambda^2 f\left(\frac{4W^2-4-n}{4W^2}\right)-Kf\end{aligned}$$

Se o ponto p for tal que $W^2\geq n+4$ teremos $\dfrac{4W^2-4-n}{4W^2}\geq\dfrac{1}{4}$, escolhendo então $\lambda=\sqrt{4K+4}$ temos:

$$\Delta^M f\geq 2W^{-1}\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle+f$$

Desta expressão vemos que p não pode ser ponto de máximo local para f, pois caso contrário teríamos $\Delta^M f\leq 0$ (devido a (2.19)), $\langle\nabla^M f,\nabla^M W\rangle=0$ e f é sempre positiva, o que contradiz a desigualdade acima.

Vemos que para todo $p\in M$ temos que $W^2(p)<n+4$ ou p não é ponto de máximo local para f. Se denotamos $\partial M=\{(x,u(x):x\in\partial\Omega\}$ temos então

$$\sup_M f\leq\max\{\sup_{\partial M}f,\sqrt{n+4}e^{J\sqrt{4K+4}}\}\leq e^{J\sqrt{4K+4}}\max\{\sup_{\partial\Omega}\sqrt{1+|Du|^2},\sqrt{n+4}\}$$

Temos finalmente:

$$\begin{aligned}\sup_\Omega|Du|\leq\sup_\Omega\sqrt{1+|Du|^2}=\sup_M W\leq e^{J\sqrt{4K+4}}\sup_M f\\ \leq e^{2J\sqrt{4K+4}}\max\{\sup_{\partial\Omega}\sqrt{1+|Du|^2},\sqrt{n+4}\}\\ \leq e^{2J\sqrt{4K+4}}\max\{\sqrt{1+L^2},\sqrt{n+4}\}\end{aligned}$$

□

4.6 Estimativa de fronteira do gradiente

Nesta seção assumimos que Ω é um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^2 e $\varphi\in C^2(\partial\Omega)$. Denotaremos N o campo normal interior em $\partial\Omega$ e d a função $d(x)=\text{dist}(x,\partial\Omega)$. Definimos $\Gamma_\mu:=\{x\in\overline{\Omega}:d(x)<\mu\}$ onde $\mu>0$ é uma constante pequena o suficiente para que a função d seja de classe C^2 em $\overline{\Gamma_\mu}$ (ver seção 2.2).

Nosso objetivo é estimatar $\sup_{\partial\Omega}|Du|$ onde u é solução de (4.2).

Podemos estimar as derivadas de u em direções tangentes a $\partial\Omega$ usando as derivadas de φ nas mesmas direções. De fato, se $x_0\in\partial\Omega$ e $v\in T_{x_0}\partial\Omega$ é um vetor tangente, tomando

$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \partial\Omega$ uma curva com $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma'(0) = v$, temos:

$$D_v u(x_0) = (u \circ \gamma)'(0) = (\varphi \circ \gamma)'(0) = D_v \varphi(x_0)$$

Resta então estimar a derivada de u em direções normais a $\partial\Omega$. Faremos isto construindo barreiras superiores e inferiores, isto é, construiremos as funções $\delta^+, \delta^- \in C^2(\overline{\Gamma_\eta})$, onde $\eta \leq \mu$ e temos:

1. $\delta^-(x) \leq u(x) \leq \delta^+(x)$ para $x \in \Gamma_\eta$.
2. $\delta^-(y) = \delta^+(y) = \varphi(y)$ para $y \in \partial\Omega$.

Assumindo a existencia destas funções temos para $x_0 \in \partial\Omega$:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{t \to 0^+} \frac{\delta^+(x_0 + tN(x_0)) - u(x_0 + tN(x_0))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\delta^+(x_0 + tN(x_0)) - \delta^+(x_0) + u(x_0) - u(x_0 + tN(x_0))}{t} \\ &= D_{N(x_0)} \delta^+(x_0) - D_{N(x_0)} u(x_0) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{t \to 0^+} \frac{\delta^-(x_0 + tN(x_0)) - u(x_0 + tN(x_0))}{t} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \frac{\delta^-(x_0 + tN(x_0)) - \delta^-(x_0) + u(x_0) - u(x_0 + tN(x_0))}{t} \\ &= D_{N(x_0)} \delta^-(x_0) - D_{N(x_0)} u(x_0) \end{aligned}$$

De modo que:

$$D_{N(x_0)} \delta^-(x_0) \leq D_{N(x_0)} u(x_0) \leq D_{N(x_0)} \delta^+(x_0)$$

e então

$$|Du(x_0)|^2 \leq |\nabla^{\partial\Omega} \varphi(x_0)|^2 + \max\{|D_{N(x_0)} \delta^-(x_0)|^2, |D_{N(x_0)} \delta^+(x_0)|^2\}$$

concluímos que

$$\sup_{\partial\Omega} |Du| \leq \sqrt{\sup_{\partial\Omega} |\nabla^{\partial\Omega} \varphi|^2 + \max\{\sup_{\Gamma_\eta} |D\delta^-|^2, \sup_{\Gamma_\eta} |D\delta^+|^2\}} \tag{4.18}$$

Para que possamos construir estas barreiras, entretanto, é necessária alguma hipótese adicional relacionando a função prescritora $\mathscr{H}$ e a geometria da fronteira $\partial\Omega$. De fato, considere o problema:

$$\begin{cases} \mathscr{M} u = n, & \text{em } B_1(0) \\ u = 0, & \text{em } \partial B_1(0) \end{cases}$$

Claramente a função $u(x) = -\sqrt{1-|x|^2}$ tem como gráfico o hemisfério inferior da esfera unitária em $\mathbb{R}^{n+1}$ e é portanto solução. Mas apesar de termos $u \in C^\infty(B_1(0))$, u não tem derivada limitada em $\partial B_1(0)$.

Em geral para que possamos limitar $\sup_{\partial\Omega}|Du|$ é necessária uma hipótese que impeça que o gráfico de u seja tangente ao cilindro $\partial\Omega \times \mathbb{R}$.

A condição que assumiremos é:

$$H_{\partial\Omega}(y) > |\mathscr{H}(y,u(y))| \quad \text{para todo } y \in \partial\Omega \tag{4.19}$$

Onde $H_{\partial\Omega}$ é a função curvatura média de $\partial\Omega$ com relação à normal interior N. Como $\partial\Omega$ é compacto temos

$$\inf_{y\in\partial\Omega}(H_{\partial\Omega}(y) - |\mathscr{H}(y,u(y))|) > 0$$

Proposição 4.6.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe C^2, $\varphi \in C^2(\partial\Omega)$, $\mathscr{H}(x,z) \in C^1(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$ tal que $\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial z} \geq 0$ e a condição (4.19) é satisfeita. Se $u \in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ é solução de*

$$\begin{cases} \mathscr{M}u = \mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

e M, K, P e ε_0 são constantes positivas tais que $\sup_\Omega |u| \leq M$, $\sup_{\Omega\times[-M,M]}|D_x\mathscr{H}| \leq K$, $|\varphi|_{C^2(\partial\Omega)} \leq P$ e $\varepsilon_0 \leq \inf_{y\in\partial\Omega}(H_{\partial\Omega}(y) - |\mathscr{H}(y,u(y))|)$, então existe $C = C(\Omega, M, K, P, \varepsilon_0)$ tal que:

$$\sup_{\partial\Omega}|Du| \leq C$$

Demonstração. Primeiramente observamos que podemos tomar $\tilde{\varphi}$ uma extensão de φ para $\overline{\Omega}$ com $|\tilde{\varphi}|_{C^2(\Omega)} \leq C(\Omega)|\varphi|_{C^2(\partial\Omega)} \leq C(\Omega)P =: \tilde{P}$. Podemos ainda assumir que a extensão $\tilde{\varphi}$ é tal que $\tilde{\varphi}(y) = \tilde{\varphi}(y_0)$ para $y_0 \in \partial\Omega$ e $y \in \Gamma_{\mu/2}$ tais que $|y - y_0| = d(y,\partial\Omega)$. De fato, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função cutoff de $[-\mu/2, \mu/2]$ com suporte em $(-\mu,\mu)$, para $y_0 \in \partial\Omega$ qualquer podemos definir $\tilde{\varphi}(y_0 + tN(y_0)) := \varphi(y_0)f(t)$.

Por conveniência, no que segue omitiremos o $\sim$ e usaremos a mesma notação para φ e sua extensão.

Como mencionamos anteriormente, a estimativa de $\sup_{\partial\Omega}|Du|$ é lograda pela construção das barreiras $\delta^\pm : \Gamma_\eta \to \mathbb{R}$. Partimos do Ansatz $\delta^\pm = \varphi \pm \psi(d)$, onde $d : \Gamma_\mu \to \mathbb{R}$ é a função distancia para $\partial\Omega$ e $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função com $\psi(0) = 0$ a ser escolhida posteriormente. Note que com este Ansatz já temos $\delta^-(y) = \delta^+(y) = \varphi(y)$ para $y \in \partial\Omega$.

Focamos primeiramente na construção de δ^+. Queremos uma ψ para a qual $\delta^+(x) \geq u(x)$ para todo $x \in \Gamma_\eta$ para algum $\eta \leq \mu$. Devido ao princípio da comparação (teorema 4.1.1) é suficiente que tenhamos $\mathscr{M}\delta^+ \leq \mathscr{H}(\cdot, \delta^+)$ em Γ_η e $\delta^+ \geq M$ em $\partial\Gamma_\eta \cap \Omega$. Podemos escrever $\mathscr{M}\delta^+ = a^{ij}(D\delta^+)D_{ij}\delta^+$, onde

$$a^{ij}(p) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}\right)$$

Temos

$$D_j\delta^+ = D_j\varphi + \psi' D_j d \ \text{ e } \ D_{ij}\delta^+ = D_{ij}\varphi + \psi'' D_i d D_j d + \psi' D_{ij} d$$

Como $|Dd|^2 = 1$ (lema 2.2.5) derivando segue $D_{ij}dD_id = 0$ e obtemos

$$\begin{aligned} a^{ij}(D\delta^+)D_{ij}d &= \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}\Delta d - \frac{(D_i\varphi + \psi' D_i d)(D_j\varphi + \psi' D_j d)}{(1+|D\delta^+|^2)^{3/2}} D_{ij} d \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}\Delta d - \frac{D_i\varphi D_j\varphi}{(1+|D\delta^+|^2)^{3/2}} D_{ij} d \end{aligned}$$

Agora se $y \in \Gamma_\mu$ e $y_0 \in \partial\Omega$ é tal que $d(y) = |y - y_0|$, sendo $\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}$ as curvaturas principais de $\partial\Omega$ em y_0, temos do lema 2.2.6 que

$$\Delta d(y) = -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\kappa_i}{1-\kappa_i d(y)} = -\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i \left(1 + \frac{\kappa_i d(y)}{1-\kappa_i d(y)}\right) \leq -\sum_{i=1}^{n-1} \kappa_i = -H_{\partial\Omega}(y_0)$$

Onde usamos $\max\{|\kappa_i| \leq \frac{1}{\mu}\}$ (ver a observação 2.2.2). Ademais temos:

$$a^{ij}(D\delta^+)D_{ij}\varphi \leq \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}\left|\delta_{ij} - \frac{D_i\delta^+ D_j\delta^+}{1+|D\delta^+|^2}\right| |D_{ij}\varphi| \leq \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}|D^2\varphi|$$

Portanto em y temos a estimativa:

$$\begin{aligned} \mathscr{M}\delta^+ \leq & \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}|D^2\varphi| + a^{ij}\psi'' D_i d D_j d - \frac{\psi'}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}} H_{\partial\Omega}(y_0) \\ & - \frac{\psi' D_i\varphi D_j\varphi}{(1+|D\delta^+|^2)^{3/2}} D_{ij} d \end{aligned}$$

Tomamos daqui em diante $\psi(d) = \frac{1}{\nu}\log(1+kd)$ onde k, ν são constantes positivas a serem escolhidas posteriormente. Temos

$$\psi'(d) = \frac{k}{\nu(1+kd)} \ \text{ e } \ \psi''(d) = -\frac{k^2}{\nu}\frac{1}{(1+kd)^2}$$

Observamos $\psi'' \leq 0$ e de (4.3) temos $a^{ij}D_idD_jd \geq \dfrac{1}{(1+|D\delta^+|)^{3/2}}$.

Se assumimos $d(y) \leq \mu/2$, usando a observação 2.2.2 temos $\frac{\kappa_i}{1-\kappa_i d(y)} \leq \frac{|\kappa_i|}{|1-\kappa_i d(y)|} \leq \frac{1/\mu}{1/2} = \frac{2}{\mu} =: C_1$, portanto teremos $D_{ij}d(y) \leq C_1$ e obtemos a estimativa:

$$\begin{aligned}\mathscr{M}\delta^+ \leq & \frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}|D^2\varphi| - \frac{k^2}{\nu}\frac{1}{(1+kd)^2}\frac{1}{(1+|D\delta^+|)^{3/2}} \\ & - \frac{k}{\nu(1+kd)}\frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}H_{\partial\Omega}(y_0) + C_1\frac{\|\varphi\|^2_{C^1}}{(1+|D\delta^+|^2)^{3/2}}D_{ij}d\frac{k}{\nu(1+kd)}\end{aligned} \tag{4.20}$$

Pretendemos escolher k, ν e η tais que o segundo termo após a desigualdade compense o primeiro e quarto termos, de modo que a soma destes três termos seja ≤ 0.

Para compensar o último termo com metade do segundo termo precisamos que

$$\frac{k}{1+kd} \geq 2C_1\|\varphi\|^2_{C^1} \tag{4.21}$$

Note que para $d \leq \eta$ temos:

$$\frac{k}{1+kd} = \frac{1}{1/k+d} \geq \frac{1}{1/k+\eta}$$

Que tende a infinito se $k \to \infty$ e $\eta \to 0$. Vemos que existem $k_1 = k_1(\tilde{P})$ e $\eta_1 = \eta_1(\tilde{P})$ tais que (4.21) é satisfeita se

$$k \geq k_1 \ \text{ e } \ d \leq \eta_1$$

Para lidar com o primeiro termo em (4.20) observamos primeiramente que:

$$1+|D\delta^+|^2 \leq 1+2|D\varphi|^2+2(\psi')^2 \leq 1+2\|\varphi\|^2_{C^1}+2\frac{k^2}{\nu^2(1+kd)^2}$$

Portanto para compensar o primeiro termo após a desigualdade em (4.20) com metade do segundo termo é suficiente que tenhamos:

$$\frac{k^2}{2\nu(1+kd)^2} \geq \|\varphi\|_{C^2}(1+2\|\varphi\|^2_{C^1}+2\frac{k^2}{\nu^2(1+kd)^2}) \tag{4.22}$$

que equivale a

$$\frac{k^2}{(1+kd)^2}\left(\frac{\nu-4\|\varphi\|_{C^2}}{2\nu^2\|\varphi\|_{C^2}}\right) \geq 1+2\|\varphi\|^2_{C^1}$$

Observanmos que para $d \leq \eta$ temos

$$\frac{k^2}{(1+kd)^2} = \frac{1}{(1/k+d)^2} \geq \frac{1}{(1/k+\eta)^2}$$

Que tende a infinito se $k \to \infty$ e $\eta \to 0$. Deste modo se fixamos

$$\nu = 8\tilde{P} > 4\|\varphi\|_{C^2}$$

vemos que existem $k_2 = k_2(\tilde{P})$ e $\eta_2 = \eta_2(\tilde{P})$ tais que (4.22) é satisfeita se

$$k \geq k_2 \text{ e } d \leq \eta_2$$

Agora observamos que para $z \in \partial\Omega$ qualquer temos $H_{\partial\Omega}(z) \geq -\mathscr{H}(z,u(z)) + \varepsilon_0$ de modo que

$$-H_{\partial\Omega}(z) \leq \mathscr{H}(z,u(z)) - \varepsilon_0 \tag{4.23}$$

Das estimativas acima se $k \geq \max\{k_1,k_2\}$ e $d \leq \min\{\eta_1,\eta_2,\mu/2\}$ temos:

$$\mathscr{M}\delta^+ \leq -\frac{k}{\nu(1+kd)}\frac{1}{\sqrt{1+|D\delta^+|^2}}H_{\partial\Omega}(y_0) \tag{4.24}$$

Mostraremos que o fator na frente de $H_{\partial\Omega}(y_0)$ se torna arbitrariamente próximo de 1 se k for grande e d pequeno. Lembre que temos:

$$\begin{aligned}1+|D\delta^+|^2 &= 1+|D\varphi|^2+(\psi')^2+2\psi'\langle D\varphi, Dd\rangle \\ &= 1+|D\varphi|^2+\left(\frac{k}{\nu(1+kd)}\right)^2+2\frac{k}{\nu(1+kd)}\langle D\varphi, Dd\rangle\end{aligned}$$

o que implica

$$\left(\frac{\nu(1+kd)}{k}\right)^2(1+|D\delta^+|^2) = 1+2\frac{\nu(1+kd)}{k}\langle D\varphi, Dd\rangle+\left(\frac{\nu(1+kd)}{k}\right)^2(1+|D\varphi|^2)$$

E notamos que se $d \leq \eta$ temos:

$$0 \leq \frac{\nu(1+kd)}{k} \leq \nu\left(\frac{1}{k}+\eta\right)$$

E esta última expressão tende a zero quando $k \to \infty$ e $\eta \to 0$. O que mostra que o coeficiente de $H_{\partial\Omega}(y_0)$ tende a 1 nas mesmas condições

Isto implica que existem k_3 e η_3 dependendo de $\|\varphi\|_{C^1}$, $\sup_{\partial\Omega} H_{\partial\Omega}$ e ε_0 tais que $k \geq k_3$ e $d \leq \eta_3$ implica

$$\mathscr{M}\delta^+ \leq -H_{\partial\Omega}(y_0)+\frac{\varepsilon_0}{4} \leq \mathscr{H}(y_0,\varphi(y_0))-\frac{3\varepsilon_0}{4}$$

Lembrando que $\sup_{\Omega\times[-M,M]}|D_x\mathscr{H}| \leq K$, vemos que existe $\eta_4 < \mu/2$, dependendo de K tal que $|y-y_0| = d(y) \leq \eta_4$ implica

$$\mathscr{H}(y_0,\varphi(y_0))-\frac{3\varepsilon_0}{4} \leq \mathscr{H}(y,\varphi(y_0)) \leq \mathscr{H}(y,\delta^+(y))$$

onde a última desigualdade se deve a termos $\dfrac{\partial \mathscr{H}}{\partial z} \geq 0$ e $\delta^+(y) \geq \varphi(y) = \varphi(y_0)$, esta última igualdade é devida a nossa escolha de extensão para φ no início da demonstração.

Fixemos então $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$. Se $y \in \partial\Gamma_\eta \cap \Omega$ temos $d(y) = \eta$ e portanto

$$\delta^+(y) = \varphi(y_0) + \frac{1}{\nu}\log(1 + k\eta)$$

Vemos que existe k_4 tal que $k \geq k_4$ implica

$$\delta^+(y) \geq M, \ \forall y \in \partial\Gamma_\eta \cap \Omega$$

Portanto se tomamos $\nu = 8\tilde{P}$, $k = \max\{k_1, k_2, k_3, k_4\}$ e $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4\}$, a função

$$\delta^+(y) = \varphi(y) + \frac{1}{\nu}\log(1 + kd(y))$$

é uma barreira superior para u em Γ_η. Observe que ν, k e η dependem de Ω e das quantidades M, K, P e ε_0.

Para obter a barreira inferior δ^- podemos argumentar de forma análoga.

Alternativamente, podemos substituir u por $-u$, φ por $-\varphi$ e $\mathscr{H}(x,z)$ por $-\mathscr{H}(x,-z)$ e usar o argumento acima para obter a barreira superior $\tilde{\delta}^+$ para $-u$, então $\delta^- = -\tilde{\delta}^+$ será barreira inferior para u.

Como as barreiras dependem de Ω e das constantes M, K, P e ε_0, usando a expressão (4.18) obtemos estimativa para $\sup_{\partial\Omega}|Du|$ dependendo destas mesmas quantidades. $\square$

4.7 Existência de gráficos com curvatura média prescrita

Coletando os resultados das seções anteriores estamos prontos para enunciar o seguinte resultado de existência e unicidade

Teorema 4.7.1. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado com $\partial\Omega$ de classe $C^{2,\alpha}$ e sejam $\mathscr{H} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$ satisfazendo $\dfrac{\partial}{\partial z}\mathscr{H} \geq 0$ e $\varphi \in C^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. Suponha que existe um ε_0 tal que*

$$\left| \int_\Omega \mathscr{H}(x,0)\eta \, dx \right| \leq (1 - \varepsilon_0) \int_\Omega |D\eta| \, dx$$

para toda $\eta \in C_c^1(\Omega)$, e

$$H_{\partial\Omega}(x) > \mathscr{H}(x, u(x)) \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Então o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \mathscr{M}u = \mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases}$$

Tem solução única $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Demonstração. Devido ao corolário 4.3.2, basta mostrar que soluções em $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ de

$$\begin{cases} \mathscr{M}u = \sigma\mathscr{H}(x,u), & \text{em } \Omega \\ u = \sigma\varphi, & \text{em } \partial\Omega \end{cases} \tag{4.25}$$

admitem estimativa a priori $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ independente de $\sigma \in [0,1]$.

A proposição 4.4.2 provê estimativa $C^0(\overline{\Omega})$.

Para obter estimativa C^1 note que se $u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ é solução de (4.25) então u é solução do problema linear $\bar{a}^{ij}D_{ij}u = f$, onde $\bar{a}^{ij} = a^{ij}(Du)$ com $a^{ij}(p) = \frac{1}{\sqrt{1+|p|^2}}\left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{1+|p|^2}\right)$ e $f = \mathscr{H}(\cdot,u)$. Temos então $\bar{a}^{ij} \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ e $f \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Do teorema 3.5.9 segue que $u \in C^{3,\alpha}(\Omega)$. Portanto usando as proposições 4.5.1 e 4.6.1 obtemos estimativa $C^1(\overline{\Omega})$.

Munidos de estimativa C^1 o teorema 4.3.3 provê estimativa $C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, o que completa a demonstração. $\square$

5 CONCLUSÃO

Neste trabalho vimos como estimativas a priori permitem mostrar existência de soluções clássicas para EDPs elípticas lineares e quasi-lineares.

No caso linear demonstramos a estimativa de Schauder para EDPs elípticas com com coeficientes Hölder contínuos. Aqui usamos o método de Leon Simon [13] que usa um argumento de scaling para obter uma versão do resultado para equações com coeficientes constantes, em seguida vendo uma equação com coeficientes gerais como uma perturbação de uma equação a coeficientes constantes obtemos, após um argumento de cobertura, a estimativa de Schauder . Estabelecida a estimativa de Schauder, vimos que ela pode ser aplicada, via o método da continuidade, para obter resultados de existencia de soluções para o problema de Dirichlet linear.

No caso quasi-linear vimos que o princípio da comparação pode ser usado como substituto para o princípio do máximo. Após uma digressão topológica para demonstrar o teorema de ponto fixo de Leray-Schauder, vimos que a questão de existencia de soluções pode ser reduzida ao estabelecimente de estimativas a priori para soluções de uma família relacionada de equações.

Estabelecidos estes resultados gerais, os aplicamos no caso de interesse da equação da curvatura média prescrita para gráficos. Obtivemos estimativa a priori do supremo de soluções usando a iteração de Stampacchia. Em seguida vimos que fazendo cálculos sobre o gráfico de uma solução podemos obter um princípio do máximo para o gradiente. Para estimar o gradiente de soluções na fronteira construímos barreiras superiores e inferiores que nos permitiram estimar a componente normal do gradiente. Coletando as estimativas obtemos o resultado de existência procurado.

REFERÊNCIAS

[1] ALIPRANTIS, C. D.; BORDER, K. C. **Infinite Dimensional Analysis**: a hitchhiker's guide. 3rd ed. Berlin: Springer, 2006.

[2] EVANS, L. C. **Partial differential equations**. 2nd ed. Providence, R. I.: AMS, 2010. (Graduate studies in mathematics, v. 19).

[3] GILBARG, D.; TRUDINGER, N. S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer, 1998. (Classics in Mathematics).

[4] GRIGOR'YAN, A. **Heat kernel and analysis on manifolds**. 1st ed. Providence, R.I.: AMS, 2009, (Studies in advanced mathematics, v. 47).

[5] KELLOG, O. D. On the derivatives of harmonic functions on the boundary. **Transactions of the American Mathematical Society**, v. 33, p. 486–510, 1931.

[6] KÜHNEL, W. **Differential Geometry**: curves-surfaces-manifolds. 2nd ed. Providence, R. I.:AMS, 2006. (Student Mathematical Library, v. 16).

[7] LEE, J. M. **Introduction to riemannian manifolds**. 2. ed. Cham: Springer, 2018. (Graduate texts in mathematics, v. 176).

[8] LIMA, E. L. **Curso de análise**. 10 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. v. 2.

[9] SAMELSON, H. Orientability of hypersurfaces in $\mathbb{R}^n$. **Proceedings of The American Mathematical Society**, v. 22, p. 301–302, 1969.

[10] SCHAUDER, J. Über lineare elliptische differentialgleichungen zweiter Ordnung. **Mathematische Zeitschrift**, v. 38, n. 1, p. 257–282, 1934.

[11] SCHULZE, F. **Partial differential equations II**. Berlin: Freie Universität Berlin, 2012. Notas de aula. Disponível em: https://www.felixschulze.eu/images/felix/Lecture_notes/PDE2_notes.pdf. Acesso em: 21 mar. 2022.

[12] SERRIN, J. The problem of Dirichlet for quasilinear elliptic differential equations with many independent variables. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**: Series A, Mathematical and Physical Sciences, v. 264, n. 1153, p. 413–496, 1969.

[13] SIMON, L. Schauder estimates by scaling. **Calculus of Variations and Partial Differential Equations**, v. 5, p. 391–407, 1997.