UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção do Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

28 de Janeiro de 2025

Assinale as cinco questões escolhidas:

( ) Questão 1 ( ) Questão 2 ( ) Questão 3 ( ) Questão 4

( ) Questão 5 ( ) Questão 6 ( ) Questão 7

Número de Inscrição: ______________________________

Resolva 5 das 7 questões abaixo.

Questão 1. Determine se a afirmação a seguir sobre séries de números reais é **verdadeira ou falsa**. Se for verdadeira, prove-a. Se for falsa, dê um contra-exemplo justificando devidamente a convergência ou divergência das séries envolvidas.

Afirmação: Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes, então $\sum(a_n \cdot b_n)$ é convergente.

Questão 2. Resolva os itens a seguir.

(a) Prove que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente, ou seja, prove o Teorema de Bolzano-Weierstrass. (A completude de $\mathbb{R}$ pode ser usada sem ser provada, mas quaisquer outros conceitos ou propriedades que forem utilizados devem ser demonstrados.)

(b) Prove que toda sequência ilimitada de números reais possui uma subsequência que converge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Questão 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Prove que f é derivável em $x = 0$ e que $f'(0) = 0$.

(b) A série de Taylor de f em $x = 0$ converge pontualmente para $f(x)$ em algum intervalo da forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$?

Questão 4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, se x é irracional, e $f(x) = 1/q$, se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$. Prove que f é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Questão 5. Seja $\Gamma = \{I_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ um conjunto de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, onde Λ é um conjunto arbitrário de índices. Suponha que cada $I_\lambda \in \Gamma$ intersecta uma quantidade finita de intervalos de Γ. Além disso, assuma que existe $\varepsilon > 0$ tal que o comprimento de I_λ seja maior do que ou igual a ε para todo $\lambda \in \Lambda$. Prove que:

(a) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ é um conjunto fechado da reta.

(b) $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} I_\lambda$ é um conjunto compacto se, e somente se, Γ tem cardinalidade finita.

Questão 6. Resolva os itens a seguir.

(a) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I, com f' contínua em $x_0 \in I$ e tal que $f'(x_0) \neq 0$. Mostre que f é monótona em alguma vizinhança de x_0.

(b) Prove que a hipótese sobre a continuidade de f' do item (a) não pode ser removida, ou seja, dê exemplo de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável em um intervalo I, tal que $f'(x_0) \neq 0$ em algum $x_0 \in I$ e que não seja monótona em nenhuma vizinhança de x_0.

Questão 7. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, $f \in C^2((a, b))$, tal que $f'' \geq 0$ em (a, b). Prove que f é convexa, ou seja,

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

para todos $x_1, x_2 \in (a, b)$ e $t \in [0, 1]$.