UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

28 de janeiro de 2025

Número de Inscrição do Candidato: ____________________

INSTRUÇÕES:

1. O candidato deve colocar somente o número de inscrição na prova.
2. Provas com identificação do candidato serão anuladas.
3. A duração da prova é de quatro horas, de 14h às 18h.
4. A prova deve ser realizada de forma individual e sem consulta.
5. O início e o término da solução de cada problema devem ser claramente indicados.
6. Todos os cálculos e argumentos pertinentes às soluções devem ser apresentados.

Problemas

1. Seja $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Se $f'(0).v \neq v$ para todo $v \neq 0$, prove que existe uma vizinhaça $\mathcal{W}$ de 0 em $\mathbb{R}^5$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathcal{W}\backslash\{0\}$.

2. Para os pares de espaços abaixo apresente um homeomorfismo ou prove que não pode existir um.

   (a) $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e $[0, 2\pi]$;

   (b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$;

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$.

3. Seja $f : M_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ definida por $f(x) = x.x^t$, onde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e x^t denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes simétricas e a transposta da matriz x.

   (a) Prove que f está bem definida e que $f'(x)$ é sobrejetiva.

   (b) Conclua que I_3 é um valor regular de f, e determine a dimensão do conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3) = \{x \in M_3(\mathbb{R}) : x.x^t = I_3\}$, onde I_3 denota a matriz identidade.

4. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de medida nula. Mostre que $F(X)$ também tem medida nula.

5. Demonstre o Teorema do Green para regiões planares do tipo:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\},$$

   onde a, b são dois números reais dados com $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

6. Seja $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se no ponto $a \in \mathcal{U}$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$\mid det(f'(a)) \mid = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{vol(f(B(a; \rho))}{vol(B(a; \rho))} \right), \tag{1}$$

   onde $B(a; \rho)$ é a bola aberta centrada em a com raio ρ.

7. (i) Sejam $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ com autovalores positivos e S_A a superfície que é a fronteira topológica do conjunto $B_A := \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle Ap, p\rangle \leq 1\}$ orientada através da normal exterior ao conjunto B_A. Mostre que dada uma 2-forma diferencial ω em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a quantidade $\int_{S_A} \omega$ não depende da matriz A.

   (ii) Se $\omega = \frac{1}{4(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy\right)$, calcule $\int_{S_A} \omega$.