UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção do Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

28 de Janeiro de 2025

Assinale as cinco questões escolhidas:

( ) Questão 1 ( ) Questão 2 ( ) Questão 3 ( ) Questão 4

( ) Questão 5 ( ) Questão 6 ( ) Questão 7

Número de Inscrição: ______________________________

Questão 1. Determine se a afirmação a seguir sobre séries de números reais é **verdadeira ou falsa**. Se for verdadeira, prove-a. Se for falsa, dê um contra-exemplo justificando devidamente a convergência ou divergência das séries envolvidas. Os critérios de convergência podem ser usados sem ser demonstrados.

Afirmação: Se as séries $\sum a_n$ e $\sum b_n$ são convergentes, então $\sum(a_n \cdot b_n)$ é convergente.

Solução. A afirmação é falsa. Basta tomar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$, que converge pelo critério da série alternada, pois $\{\frac{1}{\sqrt{n}}\}$ decresce monotonamente para 0. Além disso, temos

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cdot b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}.$$

Resta provar que esta série é divergente. Observe as seguintes somas parcias:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 2,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{8} > 2 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 2,5,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{16} > 2,5 + 8 \cdot \frac{1}{16} = 3.$$

Indutivamente, segue-se que a série é divergente, pois

$$\sum_{n=1}^{2^m} \frac{1}{n} > 1 + \frac{m}{2}.$$

□

Questão 2. Resolva os itens a seguir.

(a) Prove que toda sequência limitada de números reais tem subsequência convergente, ou seja, prove o Teorema de Bolzano-Weierstrass. (A completude de $\mathbb{R}$ pode ser usada sem ser provada, mas quaisquer outros conceitos ou propriedades que forem utilizados devem ser demonstrados.)

(b) Prove que toda sequência ilimitada de números reais possui uma subsequência que converge para $+\infty$ ou para $-\infty$.

Solução. (a) Sejam $\{x_n\}$, $n \geq 1$, e $M > 0$ tais que $-M \leq x_n \leq M$, para todo n. Existe uma subsequência $\{x(1,j)\}_j$ de $\{x_n\}$ que fica completamente contida em um intervalo de tamanho M, que pode ser $[-M, 0]$ ou $[0, M]$.

Da mesma forma, existe uma subsequência $\{x(2,j)\}_j$ de $\{x(1,j)\}$ que fica completamente contida em um intervalo de tamanho $M \cdot 2^{-1}$, que consiste em decompor o intervalo de tamanho M que contém $\{x(1,j)\}$ em dois intervalos a partir do ponto médio do intervalo anterior.

Indutivamente, obtemos, para cada $n \geq 1$, uma sequência $\{x(n,j)\}_j$, contida em um intervalo de tamanho $M \cdot 2^{-(n-1)}$, e que é uma subsequência de $\{x(n-1,j)\}_j$. Defina $y_n := x(n,n)$, para todo $n \geq 1$, a qual também é subsequência de x_n. De fato, $x(n,n) = x(n-1,j)$ para algum $j \geq n$, o que garante que $x(n-1,n-1)$ é certamente anterior àquele elemento. Como todos os y_n, para $n \geq n_0$, estão em $\{x(n_0,j)\}$, segue-se que $|y_n - y_m| \leq M \cdot 2^{-(n_0-1)}$, para todo $n, m \geq n_0$, ou seja, $\{y_n\}$ é sequência de Cauchy, e, portanto, converge.

(b) Seja $\{x_n\}$ ilimitada. Defina $y_1 = x_1$. Seja $y_2 := x_{n(2)}$, de modo que $n(2) > 1$ e $|y_2| \geq \max\{2, |y_1|\}$. A existência de y_2 é consequência do fato que $\{x_n\}$ é ilimitada. Indutivamente, defina $y_j := x_{n(j)}$, de modo que $n(j) > n(j-1)$ e $|y_j| \geq \max\{j, |y_{j-1}|\}$. Então $\{y_j\}$ é subsequência de $\{x_n\}$ tal que $\{|y_j|\}_j$ é não-decrescente e $|y_j| \geq j$, para todo $j \geq 2$. A subsequência $\{y_n\}$ tem infinitos elementos positivos, que formariam uma subsequência que converge para $+\infty$, ou infinitos negativos, que formariam uma subsequência convergente para $-\infty$. $\square$

Questão 3. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{se } x \neq 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

(a) Prove que f é derivável em $x = 0$ e que $f'(0) = 0$.

(b) A série de Taylor de f em $x = 0$ converge pontualmente para $f(x)$ em algum intervalo da forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$?

Solução. Afirmamos que as derivadas de f em 0 se anulam em todas as ordens. Observe que, para $x \neq 0$,

$$f'(x) = 2\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}, f''(x) = 4\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} - 6\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4}$$

e, em geral, as derivadas de ordens superiores são somas de parcelas da forma $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$, com $k \in \mathbb{N}$. Como a n-ésima derivada de f em 0 é dada por $f^{(n)}(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x}$, por indução em n, resta provar que

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0.$$

Note que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2k}}\left(\frac{2}{x^3} \cdot x^k - kx^{k-1}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{k+3}}\left(2 - kx^2\right).$$

Portanto, $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$ é monótona em intervalos da forma $(-\delta, 0)$ e $(0, \delta)$. Em particular, os limites laterais

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$$

existem. Analisando o sinal da mesma expressão, temos que o primeiro limite é ≤ 0 e $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$ é crescente em $(-\delta, 0)$, quando k é ímpar, e o mesmo limite é ≥ 0 e $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$ é decrescente em $(-\delta, 0)$, quando k é par. O segundo limite é ≥ 0 e $\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k}$ é crescente em $(0, \delta)$, para todo $k \geq 1$. Por L'Hôpital, temos:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^{-3}e^{-\frac{1}{x^2}}}{kx^{k-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} \cdot \frac{2}{kx^2}.$$

Como $\lim_{x\to 0} 2/(kx^2) = \infty$, segue-se que $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^k} = 0$. Analogamente, o limite à esquerda também é nulo.

Sobre o item (b), concluímos que a série de Taylor de f em $x = 0$ não converge pontualmente para $f(x)$ em nenhum intervalo da forma $(-\varepsilon, \varepsilon)$, com $\varepsilon > 0$. De fato, a série de Taylor nesse ponto é identicamente nula, mas $f(x) \neq 0$, para todo $x \neq 0$.

□

Questão 4. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 0$, se x é irracional, e $f(x) = 1/q$, se $x = p/q$ é uma fração irredutível e $q > 0$. Prove que f é integrável em $[a, b]$ e que $\int_a^b f(x)\, dx = 0$.

Solução. É suficiente provar que f é contínua nos irracionais, o que implicará que o conjunto dos pontos de descontinuidade de f tem medida nula por estar contido no conjunto dos racionais, que é enumerável e, portanto, tem medida nula. Com isto, teremos provado que f é integrável. Além disso, toda partição de $[a, b]$ admite somas de Riemann nulas, pois todo intervalo da partição contém um número irracional, onde f se anula.

Vamos mostrar que f é contínua em todo x irracional. Suponha, por contradição, que existe x irracional onde f é descontínua. Como $f(x) = 0$, deve haver uma sequência p_n/q_n de frações irredutíveis convergindo para x, e um $\varepsilon > 0$, tais que $f(p_n/q_n) = 1/q_n > \varepsilon$, para todo n. Em particular, $\{q_n\}$ é limitada, pois $0 < q_n < 1/\varepsilon$. Como $q_n \in \mathbb{N}$, para todo n, e existe apenas uma quantidade finita de naturais entre 0 e $1/\varepsilon$, concluímos que existe uma subsequência $\{q_{n_k}\}_k$ constante igual a q. Além disso, como $\lim_k p_{n_k}/q_{n_k} = x$, segue-se que $\lim_k p_{n_k} = xq$. Como $\{p_n\}$ é uma sequência de inteiros, ela não pode ter uma subsequência que converge ao irracional qx. Isto é uma contradição, e a afirmação está provada. □

Questão 5. Seja $\Gamma = \{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ um conjunto de intervalos fechados e limitados de $\mathbb{R}$, onde Λ é um conjunto arbitrário de índices. Suponha que cada $I_\lambda \in \Gamma$ intersecta uma quantidade finita de intervalos de Γ. Além disso, assuma que existe $\varepsilon > 0$ tal que o comprimento de I_λ seja maior do que ou igual a ε para todo $\lambda \in \Lambda$. Prove que:

(a) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ é um conjunto fechado da reta.

(b) $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ é um conjunto compacto se, e somente se, Γ tem cardinalidade finita.

Solução. (a) Provemos tal fato mostrando que qualquer sequência convegente em $A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ converge para um ponto também em A. Seja $\{x_k\}_{k\geq 1} \subset A$ tal que $x_k \to x_0$.

Sabemos que, para cada $k \in \mathbb{N}$, existe $I_{\lambda_k} \in \Gamma$ contendo x_k. Ainda, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que
$$|x_k - x_0| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall\, k \geq k_0.$$
Observe agora que, se definirmos $I := \left(x_0 - \frac{3\varepsilon}{2}, x_0 + \frac{3\varepsilon}{2}\right)$, segue da hipótese sobre o comprimento mínimo dos I_λ's que, para todo $k \geq k_0$, $I \cap I_{\lambda_k}$ é um intervalo de comprimento maior do que ou igual a ε. Isto garante que existem, no máximo, três intervalos disjuntos entre si em $\{I_{\lambda_k}\}_{k \geq k_0}$. Fixe um conjunto maximal de intervalos disjuntos em $\{I_{\lambda_k}\}_{k \geq k_0}$. Consequentemente, cada um dos intervalos de $\{I_{\lambda_k}\}_{k \geq k_0}$ deve intersectar pelo menos um dos intervalos distintos fixados anteriormente. No entanto, segue por hipótese, que cada I_λ intersecta apenas uma quantidade finita de intervalos de Γ e, disto concluímos que o conjunto $\{\lambda_k\}_{k \geq k_0}$ é finito. Seja $n \in \mathbb{N}$ tal que
$$\{I_{\lambda_{k_i}}\}_{1 \leq i \leq n} = \{I_{\lambda_k}\}_{k \geq k_0}.$$
Neste caso, como a união finita de conjuntos fechados é um fechado, concluímos que $\bigcup_{i=1}^n I_{\lambda_{k_i}}$ é fechado. Além disso, desde que $\{x_k\}_{k \geq k_0} \subset \bigcup_{i=1}^n I_{\lambda_{k_i}}$ segue que $x_0 \in \bigcup_{i=1}^n I_{\lambda_{k_i}} \subset A$ como queríamos mostrar.

(b) $\Rightarrow$] Suponha, por absurdo, que A é compacto mas Γ tem cardinalidade infinita. Desde que cada I_λ intersecta apenas uma quantidade finita de intervalos de Γ, devemos ter em Γ uma quantidade infinita de intervalos dois a dois disjuntos entre si. Como o comprimento de cada um destes intervalos é maior do que ou igual a $\varepsilon > 0$, segue que o diâmetro de A, isto é,
$$diam(A) := \max\{|x - y| : x, y \in A\}$$
deve ser infinito, levando-nos a uma contradição, pois todo compacto tem diâmetro finito.

$\Leftarrow$] Segue do fato de que a união finita de compactos é um compacto. $\square$

Questão 6. Resolva os itens a seguir.

(a) Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $x_0 \in I$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável em I, com f' contínua em $x_0 \in I$ e tal que $f'(x_0) \neq 0$. Mostre que f é monótona em alguma vizinhança de x_0.

(b) Prove que a hipótese sobre a continuidade de f' do item (a) não pode ser removida, ou seja, dê exemplo de uma função $f : I \to \mathbb{R}$, derivável em um intervalo I, tal que $f'(x_0) \neq 0$ em algum $x_0 \in I$ e que não seja monótona em nenhuma vizinhança de x_0.

Solução. (a) Suponha que $f'(x_0) > 0$. Da continuidade de f' em x_0 existe $\varepsilon > 0$ tal que
$$f'(x) > 0, \quad \forall\, x \in I_0 := (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap I.$$
Tomemos $x_1, x_2 \in I_0$. Podemos supor $x_1 < x_2$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que
$$0 < f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$
Logo, $f(x_1) < f(x_2)$ e, portanto, f é crescente em vizinhança de x_0. O caso $f'(x_0) < 0$ segue analogamente mostrando-se que f é monótona decrescente em uma vizinhança de x_0.

(b) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{x}{\pi} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad x \neq 0$$

e $f(0) = 0$. Note que f é claramente derivável para todo $x \neq 0$. De fato,

$$f'(x) = \frac{1}{\pi} + 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

Em $x = 0$ temos

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x}{\pi} + x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\pi} + x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = \frac{1}{\pi}.$$

Devido a oscilação produzida por $\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ na vizinhança de $x = 0$ e os demais termos de f' definirem uma função contínua em $x = 0$, podemos concluir que f' não pode ser contínua em $x = 0$.
Por fim, vamos justificar que f não é monótona em qualquer vizinhança de $x = 0$. Para tanto, considere a sequência $x_n = \frac{1}{n\pi}, n \in \mathbb{N}$. Segue que se n é ímpar, então $f'(x_n) = \frac{1}{\pi} + 1$ e portanto, pelo item (a), f é monótona crescente em vizinhança de x_n. Caso n seja par, $f'(x_n) = \frac{1}{\pi} - 1$ e novamente por (a), f é monótona decrescente em vizinhança de x_n. Isso impede que f seja monótona em qualquer vizinhança de $x = 0$. □

Questão 7. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2, $f \in C^2((a, b))$, tal que $f'' \geq 0$ em (a, b). Prove que f é convexa, ou seja,

$$f((1-t)x_1 + tx_2) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2),$$

para todos $x_1, x_2 \in (a, b)$ e $t \in [0, 1]$.

Solução. Considere $x_1, x_2 \in (a, b)$ (os quais podemos supor em perda que $x_1 < x_2$) e $t \in (0, 1)$. Defina

$$z := (1-t)x_1 + tx_2.$$

Note que $z \in (x_1, x_2)$. Desde que $f" \geq 0$ segue pelo Teorema do Valor Médio que $f' : (a, b) \to \mathbb{R}$ é monótona não-decrescente. Neste caso, usando novamente o Teorema do Valor Médio temos a existência de $c \in (x_1, z)$ e $d \in (z, x_2)$ tais que

$$f(z) = f(x_1) + f'(c)(z - x_1) \quad \text{ e } \quad f(x_2) = f(z) + f'(d)(x_2 - z),$$

Isto nos dá que

$$\frac{f(z) - f(x_1)}{z - x_1} = f'(c) \leq f'(d) = \frac{f(x_2) - f(z)}{x_2 - z}.$$

Ora, disto segue que

$$(f(z) - f(x_1))(x_2 - z) \leq (f(x_2) - f(z))(z - x_1).$$

Se somarmos em cada lado das desigualdades acima $(f(z)-f(x_1))(z-x_1)$ obtemos:

$$(f(z)-f(x_1))(x_2-x_1) \leq (f(x_2)-f(x_1))(z-x_1).$$

Agora, desde que $t=\frac{z-x_1}{x_2-x_1}$ concluímos que

$$f(z)-f(x_1) \leq tf(x_2)-tf(x_1) \Longrightarrow f((1-t)x_1+tx_2) \leq (1-t)f(x_1)+tf(x_2)$$

como queríamos mostrar. $\square$