UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

28 de janeiro de 2025

Número de Inscrição do Candidato: ____________________

INSTRUÇÕES:

1. O candidato deve colocar somente o número de inscrição na prova.

2. Provas sem identificação do candidato serão anuladas.

3. A duração da prova é de quatro horas, de 14h às 18h.

4. A prova deve ser realizada de forma individual e sem consulta.

5. O início e o término da solução de cada problema devem ser claramente indicados.

6. Todos os cálculos e argumentos pertinentes às soluções devem ser apresentados.

1. Seja $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$ diferenciável, com $f(0) = 0$. Se $f'(0).v \neq v$ para todo $v \neq 0$, prove que existe uma vizinhaça $\mathcal{W}$ de 0 em $\mathbb{R}^5$ tal que $f(x) \neq x$ para todo $x \in \mathcal{W}\backslash\{0\}$.

2. Para os pares de espaços abaixo apresente um homeomorfismo ou prove que não pode existir um.

   (a) $S^1 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ e $[0, 2\pi]$;

   (b) $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ e $S^2 \times \mathbb{R}$;

   (c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$ e $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\}$.

3. Seja $f : M_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ definida por $f(x) = x.x^t$, onde $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ e x^t denotam, respectivamente, o conjunto das matrizes simétricas e a transposta da matriz x.

   (a) Prove que f está bem definida e que $f'(x)$ é sobrejetiva se x é inversivel.

   (b) Conclua que I_3 é um valor regular de f, e determine a dimensão do conjunto $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3) = \{x \in M_3(\mathbb{R}) : x.x^t = I_3\}$, onde I_3 denota a matriz identidade.

4. Seja $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^1 e $X \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto de medida nula. Mostre que $F(X)$ também tem medida nula.

5. Demonstre o Teorema do Green para regiões planares do tipo:

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \quad 0 \leq y \leq f(x)\},$$

   onde a, b são dois números reais dados com $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função C^1.

6. Seja $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ de classe $\mathcal{C}^1$ no aberto $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^m$. Se no ponto $a \in \mathcal{U}$, a derivada $f'(a) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ é um isomorfismo, prove que

$$| \, det(f'(a)) \, | = \lim_{\rho \to 0} \left(\frac{vol(f(B(a; \rho))}{vol(B(a; \rho))} \right), \tag{1}$$

   onde $B(a; \rho)$ é a bola aberta centrada em a com raio ρ.

7. (i) Sejam $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ com autovalores positivos e S_A a superfície que é a fronteira topológica do conjunto $B_A := \{p \in \mathbb{R}^3 : \langle Ap, p \rangle \leq 1\}$ orientada através da normal exterior à B_A. Mostre que dada uma 2-forma diferencial ω fechada em $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ a quantidade $\int_{S_A} \omega$ não depende da matriz A.

   (ii) Se $\omega = \frac{1}{4(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(xdy \wedge dz - ydx \wedge dz + zdx \wedge dy \right)$, calcule $\int_{S_A} \omega$.

Questão 1: Solução Parcial *0.5pt*

Se f é assumida C^1 então da para usar o Teorema da Aplicação Inversa para a aplicação

$$g(x) = f(x) - x$$

no $x = 0$.

Solução Geral *1pt*

Da definição da differencial de f em 0 temos

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + r(x) = f'(0)x + r(x)$$

com $\lim_{x\to 0} \frac{|r(x)|}{|x|} = 0$.

Para $x \neq 0$ temos

$$\frac{|f(x) - x|}{|x|} = \left|(f'(0) - I)\frac{x}{|x|} + \frac{r(x)}{|x|}\right| \geq \left|(f'(0) - I)\frac{x}{|x|}\right| - \frac{|r(x)|}{|x|} \tag{2}$$

Como $f'(0) - I$ é injetora segue que $\inf_{|v|=1} |(f'(0) - I)v| = a > 0$. EScolhe $\delta > 0$ tal que

$$\frac{|r(x)|}{|x|} < \frac{a}{2}, \qquad \forall |x| < \delta,\ x \neq 0$$

Segue do (2) que $|f(x) - x| > \frac{a}{2}|x|$ para $|x| < \delta$ e $x \neq 0$. $\Rightarrow$ Q.E.D.

Questão 2:

(a) Não pode existir porque $S^1 \setminus \{p\}$ fica conexo seja quem for o ponto $p \in S^1$, enquanto $[0, 2\pi] \setminus \{c\}$ vira disconexo se pegar $c \in (0, 2\pi)$.

(b) A aplicação

$$S^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \qquad (v, t) \to e^t v$$

é homeomorfismo com inversa $x \to \left(\frac{x}{|x|}, \ln(|x|)\right)$

(c) Considere os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$:

$$A_1 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$
$$A_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0, y \geq 0\}$$
$$A_3 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

Temos $A_1 \simeq A_2$ (homeomorfo) e também $A_2 \simeq A_3$ via os seguintes homeomorfismos

$$\varphi : A_1 \to A_2, \qquad \varphi(x, y, z) = (x, 2yz, y^2 - z^2)$$

$$\psi : A_2 \to A_3, \qquad \psi(x, y, z) = (2xy, x^2 - y^2, z)$$

A justificativa disso vem do fato que tanto φ quanto ψ são de tipo $\mathrm{id}_X \times \alpha$ onde $X = [0, \infty)$ respectivamente $X = \mathbb{R}$ e α é um homeomorfismo entre os dois conjuntos do plano

$$\{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0, y \geq 0\} \quad \text{e} \quad \{z = x + iy \in \mathbb{C} \mid x \geq 0\}$$

$$\alpha(z) = i\overline{z}^2$$

Questão 3:

(a)

$$f(x)^t = (x \cdot x^t)^t = (x^t)^t x^t = x \cdot x^t = f(x)$$

então $f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$f'(x)(A) = Ax^t + xA^t$$

Se x é inversivel a equação para $B \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$

$$xA^t = \frac{1}{2}B \tag{3}$$

tem solução $A = \frac{1}{2}(x^{-1}B)^t$. Pegando transposta em (3) tem-se

$$Ax^t = \frac{1}{2}B \qquad \text{ou seja}$$

$$Ax^t + xA^t = B$$

o que prova que f é sobrejetora para x inversivel.

(b) A codimensão de $\mathcal{O}(\mathbb{R}^3)$ em $M_3(\mathbb{R})$ é igual a codimensão do ponto $\{I\}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Isso implica que

$$\dim \mathcal{O}(\mathbb{R}^3) = \dim M_3(\mathbb{R}) - \dim \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) = 3^2 - \frac{3 \cdot 4}{2} = 3$$

Questão 4: Isto é o Teorema 6, Cap. 8, Seção 2 do livro de Análise vol. 2, Elon Lages Lima.

Passos a serem feitos:

(1) f de classe C^1 então pelo Teorema de Valor Medio f é localmente Lipschitz

(2) f Lipschitz então f conjunto de medida nula pra conjunto de medida nula

(3) da cobertura de X com abertos onde f é Lipschitz pode-se extrair uma subcobertura enumeravel

(4) união enumeravel de conjuntos de medida nula é um conjunto de medida nula

Questão 5: Duas observações.

(i) O ponto do exercicio não foi de usar Stokes para provar Green, porque nessa situação precisaria apresentar a demonstração do Teorema de Stokes. Quem fez assim (mas não demonstrou Stokes) recebeu 0.3 pontos.

(ii) A função f precisa ser assumida C^1.

Teorema do Green Seja $F(x,y) = P(x,y)i + Q(x,y)j$ um campo de classe C^1 definido num aberto que contem a região planar dada $\mathcal{D}$. Então

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} Pdx + Qdy$$

onde $\partial\mathcal{D}$ é a curva que limita $\mathcal{D}$ orientada no sentido anti-horario.

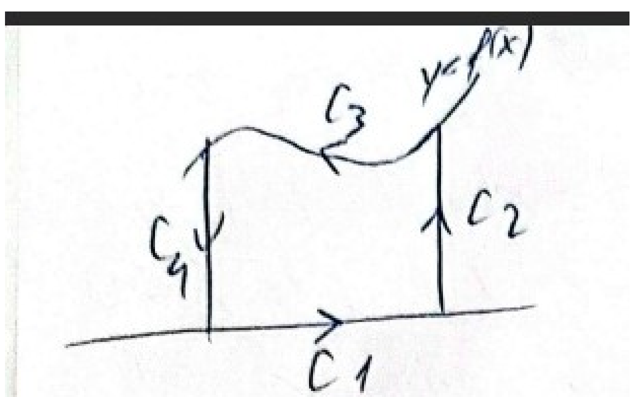
Basta mostrar que

$$\iint -\frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} Pdx \tag{4}$$

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_{\partial\mathcal{D}} Qdy \tag{5}$$

(i) A relação (4) é rá pida e demonstrada em Stewart,vol 2, pag 972 . é usado o fato que $\mathcal{D}$ é região de tipo I.

(ii) A relação (5) NÃO é feita de forma analoga para regiões de tipo I. Segue a prova.



Tem-se $\int_{C_1} Qdy = 0$. DEpois

$$\int_{C_2 \cup C_4} Qdy = \int_b^{f(b)} Q(b,t)\ dt - \int_a^{f(a)} Q(a,t)\ dt \qquad \int_{C_3} Qdy = -\int_a^b Q(t,f(t))f'(t)\ dt \tag{6}$$

Por outro lado, por Fubini:

$$\iint_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dxdy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy \right) dx \tag{7}$$

Usamos a relação

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{f(x)} Q(x,y)dy = \int_0^{f(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy + f'(x)Q(x,f(x)) \tag{8}$$

A relação (8) sai rápido da regra da cadeia para a função

$$x \to H(x, f(x))$$

onde

$$H(x,t) := \int_0^t Q(x,y)\ dy$$

Integrando (8) em x entre a e b e usando o Teorema Fundamental do Cálculo para o lado esquerdo da na seguinte igualdade

$$\int_0^{f(b)} Q(b,y)dy - \int_0^{f(a)} Q(a,y)dy = \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} \frac{\partial Q}{\partial x} dy\right) dx + \int_a^b f'(x)Q(x,f(x))\ dx$$

Comparando com (6), (7) e reorganizando obtem-se GReen.

Questão 6: Segue pelo TEorema da Função Inversa e do fato que f é de classe C^1 e $f'(a)$ é isomorfismo que existem $U \ni a$ e $V \ni f(a)$ aberto tal que $f : U \to V$ é difeomorfismo.

Para ρ pequeno tal que $B(a,\rho) \subset U$ e $f(B(a,\rho)) \subset V$ temos a mudança de variavel

$$\int_{B(a,\rho)} |\det(f'(x))|\ dx = \int_{f(B(a,\rho))} 1\ dy = \mathrm{vol}(f(B(a,\rho)))$$

ou seja

$$\frac{1}{\mathrm{vol}(B(a,\rho))}\int_{B(a,\rho)} |\det(f'(x))|\ dx = \frac{\mathrm{vol}(f(B(a,\rho)))}{\mathrm{vol}(B(a,\rho))}$$

Para finalizar, use agora o fato que para uma função continua $g : U \to \mathbb{R}$, que no caso será $g(x) = |\det(f'(x))|$ tem-se

$$\lim_{\rho\searrow 0} \frac{1}{\mathrm{vol}(B(a,\rho))}\int_{B(a,\rho)} g(x)\ dx = g(a) \tag{9}$$

Essa propriedade se demonstra rápido. Da continuidade para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para $|x| < \rho < \delta$ tem-se

$$g(a) - \epsilon < g(x) < g(a) + \epsilon$$

Integra em x sobre $B(a,\rho)$ e depois divide por $\mathrm{vol}(B(a,\rho))$ para concluir que para $\rho < \delta$ tem-se

$$g(a) - \epsilon \le \frac{1}{\mathrm{vol}(B(a,\rho))}\int_{B(a,\rho)} g(x)\ dx \le g(a) + \epsilon$$

Segue (9).

Questão 7: Uma observação: Stokes não se aplica em regões onde a forma não é definida.

(i) Os conjuntos B_A são compactos com fronteira uma superficie regular. A superficie S_A é preimagem do valor regular 1 para a função $p \to \langle Ap, p \rangle$.

Para toda $A \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ com autovalores positivas existe uma bola euclidiana $B_\epsilon(0)$ tal que

$$B_\epsilon(0) \subset B_A$$

e $\partial B_\epsilon(0) \cap \partial B_A = \emptyset$. Basta pegar $\epsilon < \frac{1}{\sqrt{\max \lambda \mid \lambda \in \sigma(A)}}$.

Aplica Stokes sobre $D := B_A \setminus (B_\epsilon(0) \setminus \partial S_\epsilon(0))$ que é um domenio compacto de $\mathbb{R}^3$ com fronteira $S_A \sqcup S_\epsilon(0)$.

$$0 = \int_D d\omega = \int_{S_A} \omega - \int_{S_\epsilon(0)} \omega$$

Do mesmo jeito, Stokes aplicado sobre $B_1(0) \setminus B_\epsilon(0)$ implica

$$\int_{S_1(0)} \omega = \int_{S_\epsilon(0)} \omega$$

Segue

$$\int_{S_I} \omega = \int_{S_1(0)} \omega = \int_{S_\epsilon(0)} \omega = \int_{S_A} \omega$$

(b) Basta calcular $\int_{S_I} \omega$ e reparar que 4ω é a forma que cálcula o elemento de area na esfera de raio 1 em $\mathbb{R}^3$. Ou seja

$$\int_{S_A} \omega = \frac{1}{4} \int_{S_I} 4\omega = \frac{4\pi}{4} = \pi$$