UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Exame de seleção de Doutorado - PGMAT/UFC - 2024.2

Questão 1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que

$$\frac{1}{\text{Área}(A)} \int_A f(x)\, dx = f(c).$$

Questão 2. Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denotamos por $B(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r. Sejam X e U subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que X é compacto, U é aberto e $X \subset U$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset U$ para todo $x \in X$.

Questão 3. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) Para todo $x \in [0,1]$, a função $g_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g_x(y) = f(x,y)$ é não decrescente;

(ii) Para todo $y \in [0,1]$, a função $h_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h_y(x) = f(x,y)$ é não decrescente.

Mostre que f é integrável.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Suponha que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, onde c é uma constante não-nula. Prove que existem funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis, tais que $f(x,y) = \phi(x - cy) + \psi(x + cy)$.

Questão 5. Sejam $A = \{(x,y);\ y > 0\}$, $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0);\ x \geq 0\}$ e $f : A \to B$ dada por

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Mostre que f está bem definida, ou seja, mostre que se $(x,y) \in A$, então $f(x,y) \in B$.

(b) Mostre que $f : A \to B$ é um difeomorfismo.

Questão 6. Suponha que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^1 tal que a derivada de F é não-singular em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que se $V \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, então $F(V) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto.

(b) Suponha que $F(0,0) = (0,0)$ e que $\|F(x,y)\| \geq 1$ para todo $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x,y)\| = 1$. Mostre que $F(U) \supset U$, onde $U = \{(x,y) : ||(x,y)|| < 1\}$.

[Sugestão: Mostre que $F(U) \cap U$ é aberto e fechado em U].

Questão 7. Em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, considere a 2-forma

$$\omega = \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right).$$

(a) Calcule $d\omega$.

(b) Considere a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 = 1\}$ com uma orientação fixada. Mostre que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^* \omega \neq 0,$$

onde $\iota : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ é a inclusão.

(c) Existe uma 1-forma θ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ tal que $d\theta = \omega$? Justifique sua resposta.