



UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXAME DE SELEÇÃO DE MESTRADO

PGMAT - MESTRADO EM MATEMÁTICA

08 de Julho de 2024

Número de inscrição: _____

Assinale as 5 questões escolhidas:

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

Questão 5

Questão 6

Questão 7

Questão 8

Resolva 5 das 8 questões abaixo.

Questão 1. Sejam a e b dois números racionais não negativos. Mostre que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, \sqrt{a} e \sqrt{b} são ambos racionais.

Questão 2. Seja $p: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ um polinômio. Mostre que p é uniformemente contínua se, e somente se, p tem grau ≤ 1 .

Questão 3. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^1 . Mostre que f é uma função Lipschitz com constante K se, e somente se, $|f'(x)| \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Lembre que uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitz com constante K se $|f(a) - f(b)| \leq K|a - b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$).

Questão 4. Seja $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua com $a < b$. Mostre que se $\int_a^b x^n f(x) dx = 0$, para todo número natural n , então $f \equiv 0$.

Questão 5. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais positivos. Mostre que se x_n converge, então o seu limite é não negativo.

Questão 6. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Assuma que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0, 1]$. Prove que se $f(c) > 0$, para algum $c \in (0, 1)$, então $\int_0^1 f(x) dx > 0$.

Questão 7. Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^2$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Questão 8. Suponha que f é uma função real continuamente diferenciável em $[a, b]$, tal que $f(a) = f(b) = 0$ e $\int_a^b f^2(x) dx = 1$. Prove que

$$\int_a^b x f(x) f'(x) dx = -\frac{1}{2} \text{ e } \int_a^b [f'(x)]^2 dx \cdot \int_a^b x^2 f^2(x) dx \geq \frac{1}{4}.$$

Questão 1

Questão 2

Questão 3

Questão 4

Questão 5

Questão 6

Questão 7

Questão 8