UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

08 de Fevereiro de 2024

Número de inscrição: ____________________________________

Resolva 5 das 8 questões abaixo

Questão 1. Dado $a > 0$ prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Questão 2. Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números inteiros. Mostre que:

a. Se $X \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq n$ para todo $n \in X$, então X possui um elemento mínimo;

b. Podemos escrever $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]$.

Questão 3. Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que a é um ponto de acumulação de X se, e somente se, a é o limite de uma sequência de elementos de X, dois a dois distintos.

Questão 4. Prove que para todo polinômio $p(x)$ de grau superior a 1 a série $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p(k)}$ converge.

Questão 5. Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varphi, \psi : I \to [a, b]$ ambas de classe C^1. Mostre que $F : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$$

é de classe C^1 e vale para todo $x \in I$,

$$F'(x) = (f \circ \psi)(x) \cdot \psi'(x) - (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x).$$

Questão 6. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se f não é identicamente nula, então $\int_a^b |f(x)|\, dx > 0$.

Questão 7. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ contínua.

a) Mostre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

b) Suponha que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são pontos fixos de f. Mostre que todos os pontos de aderência de $\{x_n\}$ são também pontos fixos de f. Em particular, conclua que se $\{x_n\}$ é denso em $[a, b]$ então f é a função identidade.

Questão 8. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

1. Mostre que se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$;

2. Mostre que, de forma mais geral, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$