UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

08 de Fevereiro de 2024

Número de inscrição: ______________________________________

Cada questão vale 2 pontos

Questão 1. Seja X uma superfície de dimensão n. Provar, que para qual quer aplicaçao $F : X \to S^{n+1}$, C^1 existe uma aplicaçao continua $H : X \times [0,1] \to S^{n+1}$ tal que $H(x,0) = F(x)$ e $H(x,0) = N$, onde N é o polo norte da esfera.

Questão 2. Achar um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ que é conexo mas não conexo por caminhos.

Questão 3. Escreva $x \in [0,1]$ na base 2, $x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$ onde $x_n \in \{0,1\}$, tal que existem infinitos n com $x_n \neq 0$.

Defina $f : [0,1] \to [0,1]^2$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, onde $f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n-1}}{2^n}$, $f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{2^n}$.

- Prove que f é sobrejetiva e existe $C > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^{1/2}$.
- Existe $f : [0,1] \to [0,1]^2$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^{\alpha}$ com $\alpha > 1/2$?

Questão 4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies compactas conexas C^k, e seja $f : M \to N$ tal que para todo $x \in M$, $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $y \in N$, $\#f^{-1}(y) = k$.

Questão 5. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}^n$ de classe C^2 definida num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V \subset U$ tal que ∂V é uma superfície compacta C^∞.

- Use o teorema da divergência para provar a formula de Green
$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)dx = \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma$$
onde η é o vetor normal exterior ao bordo de ∂V.
- Uma função u é dita harmônica se $\Delta v = 0$. Prove que duas funções harmônicas u, v tais que $u(x) = u(x)$ para todo $x \in \partial V$ são iguais em V.