UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Doutorado

PGMAT - **GEOMETRIA**

20 de agosto de 2024

Candidato: ____

INSTRUÇÕES:

1. A prova contém 7 problemas, dos quais você deve resolver 5.
2. A duração da prova é de quatro horas, de 14h às 18h.
3. A prova deve ser realizada de forma individual e sem consulta.
4. O início e o término da solução de cada problema devem ser claramente indicados.
5. Todos os cálculos e argumentos pertinentes às soluções devem ser apresentados.

Escolha 5 dos 7 problemas abaixo.

1. Seja $E_3 = (0, 0, 1)$ o campo de vetores em $\mathbb{R}^3$. Defina um campo de vetores X na esfera $\mathbb{S}^2$ como sendo a projeção ortogonal de E_3 sobre o espaço tangente a esfera $\mathbb{S}^2$. Determine $div\, X$.

2. Prove que $\mathbb{RP}^n$ é orientável se, e somente se, n for ímpar.

3. Uma variedade Rimanniana $(M^n,\, g)$ é chamada *variedade de Einstein* se existe uma função λ em M^n tal que $Ric = \lambda g$. Mostre que:
   (a) Toda variedade de dimensão 2 (superfície) é uma variedade de Einstein.
   (b) Se M^n é conexa e de Einstein, com $n > 2$, então a curvatura escalar de M^n é constante.
   (c) Se M^3 é uma variedade de Einstein conexa de dimensão 3, então M^3 tem curvatura seccional constante.

4. Sejam $f : M \to \mathbb{R}$ e $h : M \to \mathbb{R}$ duas funções de classe $C^3(M)$ definidas em uma variedade Riemanniana $(M^n,\, g)$. Mostre as seguintes identidades:
   (a)
   $$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = |Hess\, f|^2 + \langle \nabla f,\, \nabla \Delta f\rangle + Ric(\nabla f, \nabla f).$$
   (b)
   $$\Delta\langle \nabla f,\, \nabla h\rangle = \langle \nabla\Delta f, \nabla h\rangle + \langle \nabla \Delta h, \nabla f\rangle + 2Ric(\nabla f, \nabla h) + 2\langle Hess\, f,\, Hess\, h\rangle.$$

5. Seja (M, g, ∇) uma variedade Riemanniana com ∇ a conexão Levi-Civita.
   (a) Mostre a identidade
   $$2g(\nabla_X Y, Z) = (L_X g)(Y, Z) + dX^\sharp(Y, Z)$$
   onde $X^\sharp$ é a 1-forma metricamente dual a X.
   (b) Seja $\mathcal{F}$ uma folhação de M via hipersuperficies e suponha que existe N campo unitario as folhas que seja Killing e fechado, i.e. a 1-forma $N^\sharp$ é fechada. Conclua que as folhas da folhação são totalmente geodesicas.

6. Seja $\mathbb{CP}^n := \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}/\sim$ o espaço projetivo complexo onde $\sim$ é a relação de equivâlencia: $v \sim w$ se e somente se existe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tal que $v = \lambda w$.
   (a) Seja $p = [1 : 0 \ldots : 0] \in \mathbb{CP}$ um ponto. Mostre que $\mathbb{CP}^n \setminus \{p\}$ é homotopicamente equivalente com $\mathbb{CP}^{n-1}$.
   (b) Justifique que $\mathbb{CP}^1$ é homeomorfo com $S^2 := \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(c) Mostre que $H^k(\mathbb{CP}^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{para } k \in \{0, 2, \ldots, 2n\} \\ 0 & \text{para } k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 2, \ldots, 2n\} \end{cases}$

7. Seja $\tilde{\rho} = (x^4 + y^4 + z^4)^{-1}$ uma função sobre $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Mostre que

$$\int_{S^2} \Omega = 0$$

onde $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ é a esfera 2 dimensional e

$$\Omega := (xz \sin(\tilde{\rho}) - xy \cos(\tilde{\rho}))d\tilde{\rho} \wedge dy - (xy \sin(\tilde{\rho}) + xz \cos(\tilde{\rho}))d\tilde{\rho} \wedge dz$$