UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ - UFC
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado
Análise no $\mathbb{R}^n$
07 **de Outubro de** 2024

Estudante: ____

Escolha apenas 5 problemas, dentre os listadas abaixo, para resolver e marque os selecionados.

Problemas escolhidas: 1 2 3 4 5 6

Problema 1. Seja $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| \leq 1\}$. Para $s > 0$, defina $F_s : \mathbb{B}^n \to \mathbb{B}^n$ por

$$F_s(x) = \begin{cases} 0 & se \quad x = 0 \\ |x|^{s-1}x & se \quad x \neq 0 \end{cases}.$$

Prove que F_s está bem definida e é um homeomorfismo de $\mathbb{B}^n$. Adicionalmente, determine todos os $s > 0$ tais que F_s é um difeomorfismo.

Problema 2. Sejam $\alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ caminhos diferenciáves de classe C^1. As possíveis interseções entre eles ocorrem no conjunto $\mathbb{I} = \alpha((a, b)) \cap \beta((a, b))$. Suponha que, nos pontos de interseção, os vetores velocidades de α e β são linearmente independentes. Demonstre que o conjunto $\mathbb{I}$ é finito.

Problema 3. Seja M uma superfície de dimensão m, compacta, orientada, sem bordo e de classe C^k, $k \geq 2$.

(a) Se $f, g : M \to \mathbb{S}^n$ são aplicações de classe C^k com $|f(x) - g(x)| < 2$ para todo $x \in M$, demonstre que f e g são C^k homotópicas, $k \geq 2$.

(b) Demostre que, se ω é uma m-forma diferencial de classe C^1, fechada, em $\mathbb{S}^n$, então $\int_M f^*\omega = \int_M g^*\omega$.

Problema 4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies compactas e conexas, de classe C^k, e seja $f : M \to N$, de classe C^1, tal que para todo $x \in M$ a derivada $f'(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\#f^{-1}(y) = k$ para todo $y \in N$.

Problema 5. Sejam M, N e $f : M \to N$ como no problema anterior, e ω uma n-forma diferencial de classe C^1 em N. Prove que $\int_M f^*\omega = k \int_N \omega$, onde $k \in \mathbb{N}$ é dado no problema anterior.

Problema 6. Resolva os itens abaixo.

a) Prove que não existe um homeomorfismo $h : [0, 1] \to [0, 1]^2$.

b) Dê um exemplo de uma função continua e sobrejetiva $f : [0, 1] \to [0, 1]^2$.

c) A função do exemplo anterior pode ser Lipchitz?