UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito do Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

08 de Julho de 2024

Questão 1. Sejam a e b dois números racionais não negativos. Mostre que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é racional se, somente e se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais.

Solução. Se $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos números racionais, então existem números inteiros $p_1, p_2, q_1 \neq 0$ e $q_2 \neq 0$ tais que $\sqrt{a} = \frac{p_1}{q_1}$ e $\sqrt{b} = \frac{p_2}{q_2}$. Assim,

$$\sqrt{a}+\sqrt{b} = \frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 q_2 + p_2 q_1}{q_1 q_2}$$

é um número racional.

Reciprocamente, suponha que $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ é um número racional. Se $a = b = 0$, então o resultado é imediato. Assuma, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Pela igualdade $(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b}) = a-b$, segue que $\sqrt{a}-\sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ também é um número racional. Assim,

$$\sqrt{a} = \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}) + (\sqrt{a}-\sqrt{b})}{2} \in \mathbb{Q}.$$

Como a e b são arbitrários, trocando a por b e b por a, podemos concluir que $\sqrt{b}$ também é um número racional.

Questão 2. Seja $p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um polinômio. Mostre que p é uniformemente contínua se, e somente se, p tem grau ≤ 1.

Solução. Seja $n = \text{grau}(p(x)) = 0$ ou 1. Se $n = 0$, então $p(x)$ é um polinômio constante e o resultado é imediato.

Se $n = 1$, escrevemos $p(x) = a_1 x + a_0$, onde $a_1 \neq 0$. Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$, temos que

$$|p(x) - p(y)| = |a_1 x + a_0 - (a_1 y + a_0)| = |a_1 x + a_0 - a_1 y - a_0| = |a_1 x - a_1 y| = |a_1||x-y|.$$

Por definição, $x \mapsto p(x)$ é uma função Lipschitz em $\mathbb{R}$. Portanto, $p(x)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}$.

Se $n > 1$, escrevemos $p(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde $a_n \neq 0$. Vejamos que $x \mapsto p(x)$ não é uniformemente contínua. Tome $\epsilon = 1$. Seja $\delta > 0$ arbitrário. Definimos um polinômio $q_\delta(x) := p\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - p(x)$. Pela identidade

$$a^k - b^k = (a-b)\sum_{i=0}^{k-1} a^{k-1-i} b^i,$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, segue que

$$q_\delta(x) = p\left(x + \frac{\delta}{2}\right) - p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^i - \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{\delta}{2}\left[\left(x + \frac{\delta}{2}\right)^{k-1} + \left(x + \frac{\delta}{2}\right)^{k-2} x^1 + \cdots + x^{k-1}\right].$$

Observe que q_δ tem um termo não constante $a_n\frac{\delta}{2}x^{n-1}$, pois $n \geq 2$. Desse modo, q_δ é um polinômio não constante. Neste caso, $\lim\limits_{x\to\infty} |q_\delta(x)| = \infty$. Assim, pela definição de limite, existe $R > 0$ tal que para $x > R$, temos que $|q_\delta(x)| \geq \epsilon = 1$.

Agora, tomando $x_\delta := R+1$ e $y_\delta = R + 1 + \frac{\delta}{2}$, temos que $|x_\delta - y_\delta| < \delta$, mas

$$|p(x_\delta - p(y_\delta)| = \left|p(R+1) - p\left(R+1+\frac{\delta}{2}\right)\right| = |q_\delta(R+1)| \geq 1,$$

de onde podemos concluir o resultado desejado.

Questão 3. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1. Mostre que f é uma função Lipschitz com constante K se, e somente se, $|f'(x)| \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}$. (Lembre que uma função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz com constante K se $|f(a) - f(b)| \leq K|a-b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$).

Solução. Suponha que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Lipschitz com constante K e f é C^1. Então

$$\begin{gathered}
|f(x+h) - f(x)| \leq K|x+h-x|, \text{ para todos } x, h \in \mathbb{R} \\
|f(x+h) - f(x)| \leq K|h|, \text{ para todos } x, h \in \mathbb{R} \\
\frac{|f(x+h) - f(x)|}{|h|} \leq K, \text{ para todos } x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \neq h \in \mathbb{R} \\
\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq K, \text{ para todos } x \in \mathbb{R} \text{ e } 0 \neq h \in \mathbb{R} \\
\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0} K, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\
\left|\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right| \leq K, \text{ para todo } x \in \mathbb{R} \\
|f'(x)| \leq K, \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.
\end{gathered}$$

Reciprocamente, suponha que $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função C^1 tal que $|f'(x)| \leq K$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Dados $a, b \in \mathbb{R}$, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (a, b)$ tal que $f(a) - f(b) = f'(c)(a-b)$. Desse modo, $|f(a) - f(b)| = |f'(c)(a-b)| = |f'(c)||a-b| \leq K|a-b|$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

Solução.

Questão 4. Seja $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua com $a < b$. Mostre que se $\displaystyle\int_a^b x^n f(x)dx = 0$, para todo número natural n, então $f \equiv 0$.

Solução. Pelo Teorema de Stone-Weierstrass, existe uma sequência de polinômios $\{P_n\}$ convergindo a f uniformemente sobre $[a, b]$. Como P_n é da forma $P_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ e cada um dos termos leva a uma integral que é igual a zero, segue que $\displaystyle\int_a^b P_n(x)f(x)dx = 0$, para todo natural n.

Como f e P_n são limitadas em $[a,b]$, pois são contínuas e $[a,b]$ é compacto, e $P_n \to f$ uniformemente, temos que fP_n converge uniformemente para f^2. De fato, considerando $M = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$, temos que

$$\sup_{x\in[a,b]}|f(x)P_n(x) - f(x)^2| \leq M\sup_{x\in[a,b]}|P_n(x) - f(x)| \to 0$$

para $n \to \infty$. Agora, a convergência uniforme de fP_n para f^2 implica que

$$\int_a^b f(x)^2 dx = \lim_{n\to\infty} \int f(x)P_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Sabemos que $f(x)^2 \geq 0$, para todo $x \in [a,b]$, f^2 é contínua em $[a,b]$ e $\displaystyle\int_a^b f^2 dx = 0$. Portanto, $f(x)^2 = 0$, para todo $x \in [a,b]$. Logo, $f \equiv 0$.

Questão 5. Seja $\{x_n\}$ uma sequência de números reais positivos. Mostre que se x_n converge, então o seu limite é não negativo.

Solução. Suponha, por contradição, que $x_n \to L$, onde $L > 0$. Assim, para $\epsilon = -\dfrac{L}{2} > 0$, existe N tal que para todo $n > N$, temos que $|x_n - L| < -\dfrac{L}{2}$. Desse modo, para todo $n > N$, segue que $\dfrac{L}{2} < x_n - L < -\dfrac{L}{2}$, o que implica $x_n < -\dfrac{L}{2} + L = \dfrac{L}{2} < 0$, o que é uma contradição. Portanto $x_n \to L$, onde $L \geq 0$.

Questão 6. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Assuma que $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$. Prove que se $f(c) > 0$, para algum $c \in (0,1)$, então $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Solução. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que se $|x - c| < \delta$, então $|f(x) - f(c)| < \dfrac{f(c)}{2}$, isto é, $-\dfrac{f(c)}{2} < f(x) - f(c) < \dfrac{f(c)}{2}$, o que implica $-\dfrac{f(c)}{2} + f(c) < f(x)$, ou seja, $\dfrac{f(c)}{2} < f(x)$, para todo x satisfazendo $-\delta < x - c < \delta$, ou equivalentemente, $c - \delta < x < c + \delta$. Desse modo,

$$0 < f(c) = \frac{f(c)}{2}.2\delta = \frac{f(c)}{2}\int_{c-\delta}^{c+\delta} 1dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}dx \leq \int_{c-\delta}^{c+\delta} f(x)dx \leq \int_0^1 f(x)dx.$$

Portanto, $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx > 0$.

Questão 7. Seja $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $|f(x) - f(y)| \leq (x-y)^2$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$. Prove que f é constante.

Solução. Fixe $x \in \mathbb{R}$ e seja $\phi_t = \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x}$. Temos que

$$0 \leq |\phi(t)| = \left|\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right| = \frac{|f(t)-f(x)|}{|t-x|} \leq \frac{(t-x)^2}{|t-x|} = |t-x|.$$

Desse modo, $0 \leq \lim\limits_{t\to x} |\phi(t)| \leq \lim\limits_{t\to x} |t-x| = 0$. Portanto, $\lim\limits_{t\to x} |\phi(t)| = 0$ e, assim, $\lim\limits_{t\to x} \phi(t) = 0$, isto é, $\lim\limits_{t\to x} \dfrac{f(t)-f(x)}{t-x} = 0$, o que significa que $f'(x) = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Afirmação. Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in (a,b)$, então $f(x) = c$, para alguma constante c. Com efeito, sejam $x_1 < x_2$ quaisquer dois números reais em (a,b). Como f é contínua em $[x_1, x_2]$ e diferenciável em (x_1, x_2), pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in (x_1, x_2)$ tal que $f'(c) = \dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$. Agora, como $f'(c) = 0$, segue que $f(x_2) - f(x_1) = 0$. Portanto, $f(x_2) = f(x_1)$, para quaisquer $x_1 < x_2$ em (a,b). Logo, $f(x)$ é constante em (a,b).

Questão 8. Suponha que f é uma função real continuamente diferenciável em $[a,b]$, tal que $f(a) = f(b) = 0$ e $\displaystyle\int_a^b f^2(x)dx = 1$. Prove que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2} \text{ e } \int_a^b [f'(x)]^2\,dx.\int_a^b x^2 f^2(x)dx \geq \frac{1}{4}.$$

Solução. Sejam $u = xf(x)$ e $dv = f'(x)dx$. Assim, $du = (f(x) + xf'(x))dx$ e $v = f(x)$. Integrando por partes, temos que

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = bf^2(b) - af^2(a) - \int_a^b f(x)(f(x) + xf'(x))dx$$

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = 0 - \int_a^b f^2(x)dx - \int_a^b xf(x)f'(x)dx$$

Desse modo, por hipótese, podemos concluir que

$$2\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -1$$

$$\int_a^b xf(x)f'(x)dx = -\frac{1}{2}.$$

Finalmente, pela desigualdade de Hölder, temos que

$$\left|\int_a^b xf(x)f'(x)dx\right|^2 \leq \int_a^b [f'(x)]^2 . \int_a^b x^2 f^2(x)dx,$$

o que implica

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \leq \int_a^b [f'(x)]^2 . \int_a^b x^2 f^2(x)dx,$$

$$\frac{1}{4} \leq \int_a^b [f'(x)]^2 . \int_a^b x^2 f^2(x)dx.$$