UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Exame de seleção de Doutorado
PGMAT/UFC - 2024.2 - prova espelho

Questão 1. Sejam $A \subset \mathbb{R}^2$ um retângulo fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que existe $c \in A$ tal que

$$\frac{1}{\text{Área}(A)} \int_A f(x)\, dx = f(c).$$

Solução. Como f é contínua e A é compacto, f admite um valor mínimo m_0 e um valor máximo m_1 em A. Isto é, existem $a_0, a_1 \in A$ tais que $f(a_0) = m_0$ e $f(a_1) = m_1$. Como $m_0 \leq f(x) \leq m_1$ para todo $x \in A$, segue que

$$m_0 \leq \frac{1}{\text{Área}(A)} \int_A f(x)\, dx \leq m_1.$$

Considere a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g(t) = f((1-t)a_0 + ta_1)$. Como o retângulo A é conexo, segue que a função está bem definida. Além disso, por ser uma composição de funções contínuas, g é contínua. Como $g(0) = m_0$ e $g(1) = m_1$, segue do teorema do valor intermediário que existe $t \in [0,1]$ tal que

$$\frac{1}{\text{Área}(A)} \int_A f(x)\, dx = g(t) = f((1-t)a_0 + ta_1).$$

Concluímos a demonstração tomando $c = (1-t)a_0 + ta_1 \in A$. □

Questão 2. Se $a \in \mathbb{R}^n$ e $r > 0$, denotamos por $B(a; r)$ a bola aberta de centro a e raio r. Sejam X e U subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ tais que X é compacto, U é aberto e $X \subset U$. Mostre que existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(x; \varepsilon) \subset U$ para todo $x \in X$.

Solução. Como $X \subset U$, para cada $x \in X$, existe um $r_x > 0$ tal que $B(x, r_x)$ está contida em U. Considere a cobertura de X dada pelos conjuntos abertos $B(x, r_x/2)$. Como X é compacto, existe uma subcobertura finita $B(x_1, r_{x_1}/2, \ldots, B(x_m, r_{x_m}/2)$. Seja agora $\varepsilon = \min_{1 \leq i \leq m}(r_i/2)$. Afirmamos que a escolha de ε como acima satisfaz as condições do enunciado. De fato, seja $x \in X$. Por construção, temos que $x \in B(x_i, r_{x_i}/2)$ para algum $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Assim, se $y \in B(x, \varepsilon)$, temos que

$$|y - x_i| \leq |y - x| + |x - x_i| \leq \varepsilon + \frac{r_{x_i}}{2} \leq r_i.$$

Ou seja, $y \in B(x_i, r_i) \subset U$. Como $x \in X$ e $y \in B(x, \varepsilon)$ foram escolhidos de forma arbitrária, o resultado segue. □

Questão 3. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ satisfazendo as seguintes condições:

(i) Para todo $x \in [0,1]$, a função $g_x : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $g_x(y) = f(x,y)$ é não decrescente;

(ii) Para todo $y \in [0,1]$, a função $h_y : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $h_y(x) = f(x,y)$ é não decrescente.

Mostre que f é integrável.

Solução. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Mostreremos que existe uma partição P de $[0,1] \times [0,1]$ tal que

$$S(f;P) - s(f;P) < \varepsilon,$$

onde $S(f;P)$ e $s(f;P)$ denotam, respectivamente, a soma superior e a soma inferior de f relativamente à partição P. Isso basta para mostrar que f é integrável.

Seja n um inteiro positivo e sejam $a_i = i/n$, $b_j = j/n$; $i,j \in \{0,1,\dots,n\}$. Considere a partição P_n formada pelos retângulos $R_{ij} = [a_{i-1},a_i] \times [b_{j-1},b_j]$; $i,j \in \{0,1,\dots,n\}$. Usando as condições (i) e (ii), temos

$$S(P_n,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i,b_j)\cdot \mathrm{area}(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_i,b_j)\frac{1}{n^2}$$

e

$$s(P_n,f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_{i-1},b_{j-1})\cdot \mathrm{area}(R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f(a_{i-1},b_{j-1})\frac{1}{n^2}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
S(P_n,f) - s(P_n,f) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(f(a_i,b_j) - f(a_{i-1},b_{j-1})\right)\frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \left(f(a_i,b_j) - f(a_i,b_{j-1}) + f(a_i,b_{j-1}) - f(a_{i-1},b_{j-1})\right)\frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} f(a_i,b_j) - f(a_i,b_{j-1})\right)\frac{1}{n^2} \\
&\qquad + \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} f(a_i,b_{j-1}) - f(a_{i-1},b_{j-1})\right)\frac{1}{n^2} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f(a_i,b_n) - f(a_i,b_0)\right)\frac{1}{n^2} + \sum_{j=1}^{n} \left(f(a_n,b_{j-1}) - f(a_0,b_{j-1})\right)\frac{1}{n^2}
\end{aligned}$$

Como

$$f(a_i,b_n) - f(a_i,b_0) \le f(1,1) - f(0,0) \;\text{ e }\; f(a_n,b_{j-1}) - f(a_0,b_{j-1}) \le f(1,1) - f(0,0),$$

encontramos

$$S(P_n,f) - s(P_n,f) \le \frac{2n\left(f(1,1) - f(0,0)\right)}{n^2} = \frac{2\left(f(1,1) - f(0,0)\right)}{n}.$$

Tomando n suficientemente grande, obtemos

$$S(P_n,f) - s(P_n,f) < \varepsilon.$$

$\square$

Questão 4. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável. Suponha que $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$, onde c é uma constante não-nula. Prove que existem funções $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, duas vezes diferenciáveis, tais que $f(x, y) = \phi(x - cy) + \psi(x + cy)$.

Solução. Seja $g(u, v) = f(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c})$. Então

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial x}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{2c}\frac{\partial f}{\partial y}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right)$$

Derivando a expressão acima com respeito a v, encontramos que

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) = \frac{1}{4}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) - \frac{1}{4c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) = 0.$$

A partir da igualdade $\frac{\partial^2 g}{\partial v \partial u}(u, v) = 0$, podemos deduzir que $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v)$ não depende de v, ou seja, existe uma função $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \Phi(u).$$

Seja $\phi(u) = \int_0^u \Phi(t)dt$. Vemos que a igualdade acima é equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(g(u, v) - \phi(u)\right) = 0$$

Repetindo o argumento acima, podemos encontrar uma função $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que

$$g(u, v) = f\left(\frac{u+v}{2}, \frac{v-u}{2c}\right) = \phi(u) + \psi(v).$$

Tomando $u = y - cx$, $v = y + cx$ concluímos a demonstração. $\square$

Questão 5. Sejam $A = \{(x, y);\ y > 0\}$, $B = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0);\ x \geq 0\}$ e $f : A \to B$ dada por

$$f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy).$$

(a) Mostre que f está bem definida, ou seja, mostre que se $(x, y) \in A$, então $f(x, y) \in B$.

(b) Mostre que $f : A \to B$ é um difeomorfismo.

Solução. (a) Seja $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $y > 0$, devemos mostrar que se $2xy = 0$, então $x^2 - y^2 < 0$. De fato, observe que se $2xy = 0$, como $y > 0$, devemos ter que $x = 0$, logo $x^2 - y^2 = -y^2 < 0$, como queríamos.

(b) Calculando a derivada de f, obtemos

$$|df| = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2),$$

que é diferente de zero para todo $(x, y) \neq (0, 0)$. Em particular df é não-singular em todos os pontos de A. O resultado seguirá se porvarmos que f é uma bijeção. Para isto basta observar que a função

$$\begin{aligned} g : B &\to A \\ (u, v) &\mapsto \left(\frac{v}{\sqrt{2(\sqrt{u^2 + v^2} - u)}}, \sqrt{\frac{\sqrt{u^2 + v^2} - u}{2}} \right) \end{aligned}$$

está bem-definida e satisfaz $g \circ f = \mathrm{id}|_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}|_B$, o que é uma tarefa trabalhosa, porém completamente elementar. $\square$

Questão 6. Suponha que $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ é uma função de classe C^1 tal que a derivada de F é não-singular em todos os pontos de $\mathbb{R}^2$.

(a) Mostre que se $V \subset \mathbb{R}^2$ é aberto, então $F(V) \subset \mathbb{R}^2$ é aberto.

(b) Suponha que $F(0, 0) = (0, 0)$ e que $\|F(x, y)\| \geq 1$ para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tal que $\|(x, y)\| = 1$. Mostre que $F(U) \supset U$, onde $U = \{(x, y) : ||(x, y)|| < 1\}$.

[Sugestão: Mostre que $F(U) \cap U$ é aberto e fechado em U].

Solução. (a) Suponha que $y_0 = F(x_0)$, $x_0 \in V$. Por hipótese, $F'(x_0)$ é invertível. Logo, pelo teorema da função inversa, existem vizinhanças $V_0 \subset U$ de x_0 e W_0 de $F(x_0)$ tais que $F|_{V_0} : V_0 \to W_0$ é um isomorfismo. Em particular $F(U)$ contém a vizinhança aberta W_0 de $F(x_0)$. Como x_0 foi tomado de maneira arbitrária, o resultado segue.

(b) Como U é conexo, se provarmos que $F(U) \cap U$ aberto e fechado em U, teremos $F(U) \cap U = U$ ou $F(U) \cap U = \emptyset$. Observe que $F(U) \cap U$ não pode ser vazio (0 está dentro tanto de U quanto de $F(U)$). Logo deveremos ter $F(U) \cap U = U$ (o que significa que $U \subseteq F(U)$). Já vimos no item (a) que $F(U) \cap U$ é aberto em U. Para ver que $F(U) \cap U$ é fechado em U, suponha que tenhamos $x_n \in F(U) \cap U$, $x_n \to x^* \in U$. Temos $x_n = F(y_n)$, com $y_n \in U \subset \overline{U}$. Como $\overline{U}$ é compacto, existe uma subsequência $y_{n_k} \to y \in \overline{U}$. Como F é contínua, $F(y_{n_k}) \to F(y) = x^*$. Se tivéssemos $\|y\| = 1$, então, por hipótese, teríamos $\|F(y)\| \geq 1 \Rightarrow x^* \notin U$. Contradição. Logo $y \in U$, o que significa que $x^* \in F(U) \cap U$, o que conclui a demonstação. $\square$

Questão 7. Em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, considere a 2-forma

$$\omega = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \left(xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy \right).$$

(a) Calcule $d\omega$.

(b) Considere a esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x, y, z);\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ com uma orientação fixada. Mostre que

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^* \omega \neq 0,$$

onde $\iota : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}^3$ é a inclusão.

(c) Existe uma 1-forma θ em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ tal que $d\theta = \omega$? Justifique sua resposta.

Solução. (a) Temos

$$\omega = f dy \wedge dz + g dz \wedge dx + h dx \wedge dy,$$

onde

$$f = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}, \quad g = \frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad \text{e} \quad h = \frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Como as formas $dy \wedge dz$, $dz \wedge dx$ e $dx \wedge dy$ são fechadas, temos

$$\begin{aligned} d\omega &= df \wedge dy \wedge dz + dg \wedge dz \wedge dx + dh \wedge dx \wedge dy \\ &= (f_x dx + f_y dy + f_z dz) \wedge dy \wedge dz \\ &\quad + (g_x dx + g_y dy + g_z dz) \wedge dz \wedge dx \\ &\quad + (h_x dx + h_y dy + h_z dz) \wedge dx \wedge dy \\ &= (f_x + g_y + h_z) dx \wedge dy \wedge dz. \end{aligned}$$

Como

$$f_x = \frac{-2x^2+y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}}, \quad g_y = \frac{x^2-2y^2+z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}} \quad \text{e} \quad h_z = \frac{x^2+y^2-2z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{5/2}},$$

obtemos que $d\omega = 0$.

(b) Em $\mathbb{R}^3$, considere a 2-forma

$$\alpha = x dy \wedge dz + y dz \wedge dx + z dx \wedge dy.$$

Obviamente, temos $\iota^*\omega = \iota^*\alpha$. Assim, por um lado, temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^*\omega = \int_{\mathbb{S}^2} \iota^*\alpha.$$

Por outro lado, como $d\alpha = 3 dx \wedge dy \wedge dz$ e $\mathbb{S}^2 = \partial \mathbb{B}^3$, onde $\mathbb{B}^3 = \{(x,y,z);\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$, o Teorema de Stokes nos dá

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^*\alpha = \int_{\mathbb{B}^3} d\alpha = 3\mathrm{Vol}(\mathbb{B}^3) = 4\pi.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^*\omega \neq 0.$$

(c) Se θ existisse, como $\partial \mathbb{S}^2 = \emptyset$, o Teorema de Stokes nos daria

$$\int_{\mathbb{S}^2} \iota^*\omega = \int_{\mathbb{S}^2} \iota^* d\theta = 0,$$

o que não ocorre, pelo item (b). Portanto, tal θ não existe. $\square$