UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado
Análise no $\mathbb{R}^n$
21 de Fevereiro de 2024

Estudante: ____

Problema 1. Mostre que $\mathbb{R}^2$ tem um subconjunto denso formado por pontos três a três não colineares.

Problema 2. Seja $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes de ordem $n \times n$ com entradas em $\mathbb{C}$. Consideramos $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ equipado com a norma euclidiana via identificação natural de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$. Mostre que

$$\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ \det(A) \neq 0\}$$

é conexo por caminhos.

Problema 3. Dados $n, k \in \mathbb{N}$, prove que existe $r > 0$ tal que se A for uma matriz real $n \times n$ satisfazendo $|A - I_n| < r$, então existe B, uma matriz real $n \times n$, tal que $B^k = A$.

Problema 4. Os reais x e y são positivos e tais que $x + y = 1$. Calcule o menor valor possível de $x^x + y^y$.

Problema 5. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ um domínio compacto, conexo e com fronteira regular, $C^\infty(M) = \{u : M \to \mathbb{R};\ u \text{ é suave}\}$ e $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ o operador laplaciano, dado por $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Diz-se que um número real λ é um *autovalor de Dirichlet* para M se existir uma função não identicamente nula $u \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta u = -\lambda u$ e $u|_{\partial M} = 0$. Similarmente, diz-se que λ é um *autovalor de Neumann* para M se existir uma tal função satisfazendo $\Delta u = -\lambda u$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}\big|_{\partial M} = 0$, em que η denota o campo normal unitário exterior a ∂M.

(a) Prove que todo autovalor de Dirichlet é estritamente positivo.

(b) Demonstre que 0 é um autovalor de Neumann, e que os demais autovalores de Neumann são estritamente positivos.

(c) Exiba todos os autovalores de Dirichlet e todos os autovalores de Neumann quando $M = [0, 1] \subset \mathbb{R}$.

Problema 6. Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f(tx) = t^k f(x)$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

(a) Demonstre que

$$\int_{\mathbb{B}^n} \Delta f(x)\, dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} k f(p)\, dp,$$

sendo $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$ e dp o elemento de volume de $\mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Conclua que, no caso em que $f(x, y, z) = 3x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6x^2z^2$, ocorre

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(p)\, dp = 4\pi.$$