UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

# Exame de Seleção de Mestrado

## PGMAT - Mestrado em Matemática

08 de Fevereiro de 2024

**Número de inscrição**: ______________________________________________

**Resolva 5 das 8 questões abaixo**

**Questão 1.** Dado $a > 0$ prove que $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

**Solução.** Dado $a > 0$, como a função exponencial é contínua no conjunto dos números reais, temos que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} (e^{ln(a)})^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{ln(a)}{n}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{ln(a)}{n}} = e^0 = 1.$$

**Questão 2.** Sejam $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais e $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$ o conjunto dos números inteiros. Mostre que:

a. Se $X \subset \mathbb{Z}$ é limitado inferiormente, isto é, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq n$ para todo $n \in X$, então $X$ possui um elemento mínimo.

b. Podemos escrever $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]$.

**Solução.**

a. Levando em conta que $\mathbb{Z}$ é ilimitado inferiormente, escolha $m \in \mathbb{Z}$ tal que $m \leq a$ e considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{N}$:

$$A = \{n - m : n \in X\}.$$

Pelo princípio da boa ordenação existe $n_0 \in X$ tal que $n_0 - m \leq n - m$ para todo $n \in X$, ou seja, $n_0$ é um elemento mínimo de $X$.

b. Dado $a \in \mathbb{R}$ seja $X \subset \mathbb{Z}$ o conjunto dos inteiros $n+1$ tais que $a \leq n+1$. Pelo item a. sabemos que $X$ possui um elemento mínimo $n_0 + 1$. Então, pela minimalidade de $n_0 + 1$, obtemos $n_0 < a$. Portanto, $\mathbb{R} = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} (n, n+1]$.

**Questão 3.** Sejam $X \subset \mathbb{R}$ e $a \in \mathbb{R}$. Prove que $a$ é um ponto de acumulação de $X$ se, e somente se, $a$ é o limite de uma sequência de elementos de $X$, dois a dois distintos.

**Solução.** Relembre que um número $a \in \mathbb{R}$ é dito ponto de acumulação do conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ se dado $\epsilon > 0$, existir $x \in X$ tal que $0 < |x - a| < \epsilon$. Equivalentemente, para todo $\epsilon > 0$, tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

Seja $a$ um ponto de acumulação de $X$. Existe $x_1 \in X$ tal que $0 < |x_1 - a| < 1$. Tomando $\epsilon_2 = \min\left\{|x_1 - a|, \frac{1}{2}\right\}$, temos que existe $x_2 \in X$ tal que $0 < |x_2 - a| < \epsilon_2$. Seja $\epsilon_3 = \min\left\{|x_2 - a|, \frac{1}{3}\right\}$. Existe $x_3 \in X$ tal que $0 < |x_3 - a| < \epsilon_3$. Prosseguindo desse modo, vamos obter uma sequência de elementos $x_n \in X$ com $|x_{n+1} - a| < |x_n - a|$ e $|x_n - a| < \frac{1}{n}$. Assim, os elementos $x_n$ são dois a dois distintos, pertencem a $X$ e $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

Reciprocamente, se $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, então para qualquer $n_0 \in \mathbb{N}$, o conjunto $\{x_n \mid n > n_0\}$ é infinito, pois do contrário existiria um termo $x_{n_1}$ que se repetiria infinitas vezes e isto forneceria uma sequência constante com limite $x_{n_1} \neq a$. Portanto, para todo $\epsilon > 0$, tem-se $(a - \epsilon, a + \epsilon) \cap (X - \{a\}) \neq \emptyset$.

**Questão 4.** Prove que para todo polinômio $p(x)$ de grau superior a 1 a série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p(k)}$ converge.

**Solução.** Seja $p(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{m} a_n x^n$, onde $a_m \neq 0$ e $m \geq 2$. Note que

$$p(k) = \sum_{n=0}^{m} a_n k^n = k^m \sum_{n=0}^{m} a_n k^{n-m}.$$

Logo, encontramos $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \left|\frac{p(k)}{k^m}\right| = |a_m|$. Então, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|p(k)| \geq k^m \frac{|a_m|}{2} \quad \text{para todo } k \geq k_0. \tag{1}$$

Levando em conta (1) e a convergência da série $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^m}$, concluímos que $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{p(k)}$ converge.

**Questão 5.** Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e $\varphi, \psi : I \to [a, b]$ ambas de classe $C^1$. Mostre que $F : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$$

é de classe $C^1$ e vale para todo $x \in I$,

$$F'(x) = (f \circ \psi)(x) \cdot \psi'(x) - (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x).$$

**Solução.** Considere a função $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x) = \int_x^b f(y)\, dy.$$

Pela integrabilidade de $f$ temos

$$G(x) = \int_a^b f(y)\,dy - \int_a^x f(y)\,dy \quad \text{para todo } x \in [a,b]\,.$$

Analogamente, encontramos

$$F(x) = \int_a^b f(y)\,dy - \int_a^{\varphi(x)} f(y)\,dy - G(\psi(x)) \quad \text{para todo } x \in I.$$

Usando o Teorema Fundamental do Cálculo e a regra da cadeia, obtemos

$$F'(x) = -G'(\psi(x)) \cdot \psi'(x) - (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x) = (f \circ \psi)(x) \cdot \psi'(x) - (f \circ \varphi)(x) \cdot \varphi'(x),$$

para todo $x \in I$. Finalmente, como as funções $f, \psi, \varphi, \psi'$ e $\varphi'$ são contínuas em $I$ concluímos que $F$ é de classe $C^1$ em $I$.

**Questão 6.** Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Mostre que se $f$ não é identicamente nula, então $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx > 0$.

Como a função $|f(x)|$ é contínua e não é identicamente nula em $[a,b]$, existem um subintervalo $[c,d]$ de $[a,b]$ e uma constante $M > 0$ tais que $|f(x)| \geq M$ para todo $x \in [c,d]$. Portanto, se considerarmos uma partição de $[a,b]$ construída a partir de $[c,d]$, obtemos

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geq M(d-c) > 0.$$

**Questão 7.** Seja $f : [a,b] \to [a,b]$ contínua.

a. Mostre que existe $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

b. Suponha que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ são pontos fixos de $f$. Mostre que todos os pontos de aderência de $\{x_n\}$ são também pontos fixos de $f$. Em particular, conclua que se $\{x_n\}$ é denso em $[a,b]$ então $f$ é a função identidade.

**Solução.**

a. Seja $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ a função contínua definida por

$$G(x) = x - f(x).$$

Podemos supor que

$$G(a) = a - f(a) < 0 \quad \text{e} \quad G(b) = b - f(b) > 0.$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $x_0 \in [a, b]$ tal que $G(x_0) = 0$.

b. Se $x \in [a, b]$ é um ponto de aderência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, então existe uma subsequência $(x_{n_k})$ de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x$. Pela continuidade de $f$ obtemos

$$f(x) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = x.$$

Finalmente, se $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é denso em $[a, b]$, então todo $x \in [a, b]$ é ponto de aderência de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Portanto, pelo o que já demonstramos, $x$ é um ponto fixo de $f$.

**Questão 8.** Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável.

1. Mostre que se $f(a) = f(b) = 0$ então existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$;

2. Mostre que, de forma mais geral, existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

**Solução.** 1. Observe que o mínimo $m$ e o máximo $M$ de $f$ em $[a, b]$ são atingidos, em virtude do Teorema de Weierstrass, pois $f$ é contínua no compacto $[a, b]$. Se ambos fossem atingidos nas extremidades, teríamos $m = M$ e $f$ seria constante em $[a, b]$. Neste caso, $f'(c) = 0$, para todo $c \in [a, b]$. Caso contrário, $f$ atingirá o seu mínimo ou o seu máximo em um ponto interior $c \in (a, b)$. Se $f$ tiver um mínimo local em $c$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) \geq f(c)$, para $|x - c| < \delta$.

Se $c < x < c + \delta$, então $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ e, assim, $f'(c^+) \geq 0$.

Se $c - \delta < x < c$, então $\dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$ e, assim, $f'(c^-) \leq 0$.

Como $f$ é derivável em $c$, concluímos que $f'(c^+) = f'(c^-)$. Portanto, $f'(c) = 0$.

Se $f$ tiver um máximo local em $c$, então $-f$ tem um mínimo local em $c$. Assim, $(-f)'(c) = -f'(c) = 0$.

2. Seja $g(x)$ o polinômio de grau $\leq 1$ tal que $g(a) = f(a)$ e $g(b) = f(b)$. Então $g'(x)$ é constante e, de fato, $g'(x) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$, para todo $x \in [a, b]$. A função $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ é tal que $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$ e $\varphi(b) = f(b) - g(b) = 0$, o que implica $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Logo, pelo item 1., existe $c \in (a, b)$ tal que $\varphi'(c) = 0$. Consequentemente, $f'(c) = g'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.