Questão 1. Seja X uma superfície de dimensão n. Prove que para qualquer aplicação $F : X \to S^{n+1}$ de classe C^1 existe uma aplicação contínua $H : X \times [0,1] \to S^{n+1}$ tal que $H(x,0) = F(x)$ e $H(x,1) = N$ para todo $x \in X$, onde N é o polo norte da esfera.

Observação: $S^{n+1} = \{(x_1, \ldots, x_{n+2}) \in \mathbb{R}^{n+2} : x_1^2 + \cdots + x_{n+2}^2 = 1\}$.

Pelo teorema do Sard a aplicação não pode ser sobre. Retirando um ponto qualquer de esfera recebemos o espaço homeomorfo ao R^{n+1}. Seja N corresponde o origem. Como R^{n+1} eh contratil, podemos construir a família $H(x,t) = F(x) * t$.

Questão 2. Achar um exemplo de um conjunto $X \subset \mathbb{R}^2$ que é conexo mas não é conexo por caminhos.

Tomamos reunião do segmento ligando os pontos (0,-1) e (0,1) no plano $\mathbb{R}^2$ e o grafico da funçao $F(x) = sen(1/x)$.

Questão 3. Para cada $x \in [0,1]$, seja $(x_1, x_2, \ldots)$ sua representação na base 2, ou seja

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{2^n}$$

onde $x_n \in \{0,1\}$ e $x_n \neq 0$ para infinitos $n \geq 1$. Defina a função $f : [0,1] \to [0,1]^2$ por $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$, onde

$$f_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n-1}}{2^n}, \quad f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_{2n}}{2^n}.$$

(a) Prove que f é sobrejetiva e que existe $C > 0$ tal que $\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^{1/2}$.

(b) Existe uma função $f : [0,1] \to [0,1]^2$ e constantes $C > 0, \alpha > 1/2$ tais que

$$\|f(x) - f(y)\| \leq C\|x - y\|^{\alpha}$$

para todos $x, y \in [0,1]$?

a) Observe que $1/2^{n+1} < \|x - y\| \leq 1/2^n$ se e somente se $x_i = y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $x_{n+1} \neq y_{n+1}$.

Pegue a norma do máximo em $[0,1]^2$, pela definição de f se $x_i = y_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ e $x_{n+1} \neq y_{n+1}$ então $\|f_*(x) - f_*(y)\| \leq 1/2^{n/2}$ para $* = 1, 2$. Se n é par $\|f_1(x) - f_1(y)\| \geq 1/2^{(n+1)/2}$ se é ímpar $\|f_2(x) - f_2(y)\| \geq 1/2^{(n+2)/2}$.

Logo $\|f(x) - f(y)\| \leq 4\|x - y\|^{1/2}$.

Para provar que é sobrejetiva observe que dado $(x, y) \in [0,1]^2$ podemos escrever $p \in [0,1]$ com as coordenadas na base dois ímpares dadas pelas de x e as pares pelas de y.

b) Não existe pois $f([0,1])$ tem medida nula em $\mathbb{R}^2$. Para provar isto observe que para todo $N \in \mathbb{N}$ podemos particionar $[0,1]$ em N intervalos de tamanho $1/N$, logo a $f([0,1])$ pode ser coberta pela imagem destes intervalos.

Observe que o diâmetro de $f([k/N, (k+1)/N])$ é menor ou igual a C/N^{α}, logo esta contido num quadrado de arestas iguais a $2C/N^{\alpha}$. Então podemos cobrir $f([0,1])$ com N cubos de volume $4C^2/N^{2\alpha}$, o que da a soma dos volumes igual a $4C^2/N^{2\alpha-1}$, como $2\alpha > 1$ quando N vai para infinito isto vai para zero.

Questão 4. Sejam $M \subset \mathbb{R}^m$ e $N \subset \mathbb{R}^n$ superfícies compactas conexas C^k, e seja $f : M \to N$ tal que para todo $x \in M$ a derivada $Df(x) : T_xM \to T_{f(x)}N$ é um isomorfismo. Prove que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\#f^{-1}(y) = k$ para todo $y \in N$.

Como $Df(x)$ é um isomorfismo temos que f é uma aplicação aberta, como M é compacta temos que $f(M) \subset N$ é aberto e fechado em N, como é conexa temos que $f(M) = N$. Logo para todo $y \in N$, $f^{-1}(y) \neq \emptyset$.

Vamos a provar agora que para todo $y \in N$, $f^{-1}(y)$ é finito. Caso não seja, por M ser compacto, podemos pegar uma sequencia de pontos $x_n \in f^{-1}(y)$, $x_k \neq x_j$ para $i \neq j$, que converge a x, por continuidade $f(x) = y$. Pelo teorema da aplicação inversa existe uma vizinhança de x onde f é um difeomorfismo nela, mas para n grande x_n esta nesta vizinhança, contradição.

Provemos que para todo $y \in N$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $z \in B_\delta(y)$, $\#f^{-1}(z) = \#f^{-1}(y)$. Para todo $x \in f^{-1}(y)$ pelo teorema da aplicação inversa existe um $\alpha > 0$ tal que f restrito a $B_\alpha(x)$ é um difeo, pegando o menor α nos pontos de $f^{-1}(y)$ e tal que as bolas $B_\alpha(x)$ sejam disjuntas, temos que $\cup_{x \in f^{-1}(y)} f(B_\alpha(x))$ é um aberto que contem y.

Logo existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(y)$ tem pelo menos $\#f^{-1}(y)$ pre imagens. Agora vamos a provar que a menos de reduzir δ todo ponto tem exatamente a mesma quantidade de pre imagens: Por absurdo se isto não acontece para todo n existe $z_n \notin \cup_{x \in f^{-1}(y)} B_\alpha(x)$ e $d(z_n, y) \leq 1/n$, temos que $M \setminus \cup_{x \in f^{-1}(y)} B_\alpha(x)$ é compacto logo a menos de pegar uma subsequencia temos $z_n \to z$ e por continuidade $f(z) = y$, contradição.

Logo para todo $k \in \mathbb{N}$ o conjunto de pontos tais que $\#f^{-1}(y) = k$ é aberto, como N é conexo so um deles pode ser diferente de vazio.

Questão 5. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V \subset U$ tal que ∂V é uma superfície compacta C^∞.

(a) Use o teorema da divergência para provar a fórmula de Green

$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)dx = \int_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma$$

onde η é o vetor normal exterior ao bordo de ∂V.

(b) Uma função u é dita harmônica se $\Delta u = 0$. Prove que se u, v são harmônicas tais que $u(x) = v(x)$ para todo $x \in \partial V$, então $u(x) = v(x)$ para todo $x \in V$.

a) Pegue $u\nabla v = (u\frac{\partial v}{\partial x_1}, \ldots, u\frac{\partial v}{\partial x_n})$ logo temos que

$$\nabla \cdot (u\nabla v) = u\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$$

Aplicando o teorema da divergência em V temos o resultado.

b) Pega $g = u - v$, pela linearidade de Δ g é harmônica. Aplicando a parte anterior para $u = v = g$ temos que

$$\int_V \|\nabla g\|^2 dx = 0$$

então $\nabla g = 0$ o que implica g constante, como no bordo é zero implica $g = 0$.