UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Exame de seleção para PGMAT/UFC - Mestrado - 2023.2
Prova-espelho

Questão 1. Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, denotamos o supremo de X por $\sup(X)$. Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$ e seja $S+T$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por

$$S+T = \{s+t \mid s \in S, t \in T\}.$$

Mostre que $\sup(S+T) = \sup(S) + \sup(T)$.

Solução. Como, para todo elemento $s \in S$ e $t \in T$, temos que $s \leq \sup(S)$ e $t \leq \sup(T)$, segue que todo elemento $x = s+t \in S+T$ satisfaz $x \leq \sup(s) + \sup(T)$. Donde $\sup(S+T) \leq \sup(S) + \sup(T)$. Por outro lado, dado $\epsilon > 0$, existem $s \in S$ e $t \in T$ tais que $s \geq \sup(S) - \frac{\epsilon}{2}$ e $t \geq \sup(T) - \frac{\epsilon}{2}$. Assim, existe $x = s+t \in S+T$ tal que $x \geq \sup(S)+\sup(T)-\epsilon$. Portanto, $\sup(S+T) \geq \sup(S)+\sup(T)-\epsilon$. Como ϵ é arbitrário, concluímos a demonstração da outra desigualdade e, consequentemente do problema. $\square$

Questão 2. Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a) = f(b)$. Mostre que existe pelo menos um número c no intervalo $[a,(a+b)/2]$ tal que $f(c) = f(c+(b-a)/2)$.

Solução. Se $f((a+b)/2) = f(a)$, tome $c = a$. Caso contrárion, seja $g : \left[a, \frac{a+b}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) := f(x+(b-a)/2) - f(x)$. Note que, neste caso, temos $g(a) = -g((a+b)/2) \neq 0$. Assim, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (a,(a+b)/2)$ tal que $g(c) = 0$, que é exatamente o que foi pedido no enunciado $\square$

Questão 3. Seja $\alpha \in (0,1)$. Mostre que qualquer sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz a relação de recorrência

$$x_{n+2} = \alpha x_{n+1} + (1-\alpha)x_n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

é convergente.

Solução. Pela fórmula geral das soluções de recorrências lineares de grau 2, é possível deduzir que

$$x_n = A \cdot 1^n + B \cdot (\alpha - 1)^n.$$

Como $0 < |\alpha - 1| < 1$, segue que $(\alpha-1)^n \longrightarrow 0$ quando $n \to \infty$. Logo $x_n \xrightarrow{n\to\infty} A$. $\square$

Questão 4. Mostre que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$, é não-enumerável.

Solução. Suponha, por absurdo, que exista uma enumeração $\{S_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Construa o seguinte conjunto

$$S := \{n \in \mathbb{N};\ n \notin S_n\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N}).$$

Vamos mostrar que $S \neq S_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. De fato, se $n \in S$, isto significa que $n \notin S_n$ e análogamente, se $n \notin S$, significa que $n \in S_n$. Isto significa que, de qualquer maneira, $S \neq S_n$. Como isto vale para todo n, teríamos que $S \notin \mathcal{P}(\mathbb{N})$, o que é um absurdo. □

Questão 5. Prove que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ se escreve como interseção de uma quantidade enumerável de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Solução. Seja X um conjunto fechado e, para todo $n \in \mathbb{N}$, defina

$$X_n := \bigcup_{x\in X} (x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}).$$

Como X_n é a união de conjuntos aberto, é , ele mesmo, aberto. Afirmamos que

$$X = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n.$$

É fácil ver que $X \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Considere agora $y \in X^c$. Como X é fechado, X^c é aberto e, portanto, existe $\delta > 0$ tal que $(y - \delta, y + \delta) \subset X^c$. Ou seja, não existe $x \in X$ tal que

$$x \in (y - \delta, y + \delta) \Leftrightarrow y \in (x - \delta, x + \delta).$$

Em particular, para todo $n \in \mathbb{N}$ com $\frac{1}{n} < \delta$, $y \notin X_n$. O que implica que $y \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$. Como y é um elemento arbitrário de X^c, segue $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n \subset X$, o que conclui a demonstração. □

Questão 6. Resolva os itens a seguir.

(a) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(x) > f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$.

(b) Seja c um número real positivo. Mostre que a equacão

$$ce^x = 1 + x + \frac{x^2}{2}$$

possui exatamemte uma raiz real.

Solução. (a) Provaremos algo um pouco mais forte, cujo enunciado é o seguinte:

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável tal que $f'(x) \geq f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$, com a igualdade ocorrendo em no máximo um ponto, e $f(x_0) = 0$ para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, então $f(x) > 0$ para todo $x > x_0$ e $f(x) < 0$ para todo $x < x_0$. Em particular, x_0 é a única raiz de f.

Temos

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-x} f(x)\right] = e^{-x}\left[f'(x) - f(x)\right].$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, se $b > a$, então

$$e^{-b} f(b) - e^{-a} f(a) = \int_a^b e^{-t}\left[f'(t) - f(t)\right] dt > 0.$$

Assim, se $x > x_0$, então,

$$f(x) > e^{(x-x_0)} f(x_0) = 0,$$

e, se $x < x_0$, então,

$$0 = e^{(x-x_0)} f(x_0) > f(x).$$

(b) Seja $g(x) = ce^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}$. Temos

$$g'(x) - g(x) = \frac{x^2}{2} \geq 0,$$

com a igualdade ocorrendo somente em $x = 0$.

Como $c > 0$, temos

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to \infty} g(x) = \infty.$$

Como g é contínua, temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $g(x_0) = 0$. Pela solução do item (a), temos também que x_0 é a única raiz de g.

□

Questão 7. Mostre a desigualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \frac{4}{3}$.

Solução. Como $\frac{1}{k^3} < \frac{1}{x^3}$ para todo $x \in (k-1, k)$ e $f(x) = \frac{1}{x^3}$ é contínua, segue que

$$\frac{1}{k^3} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x^3} dx.$$

Somando a desigualdade acima para $k = 3, \ldots$,

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \int_{2}^{\infty} \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{8}.$$

Logo,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} = 1 + \frac{1}{8} + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k^3} < 1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{4} < \frac{4}{3}.$$

□

Questão 8. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $[a, b]$ em $\mathbb{R}$ tal que f_n é integrável, para todo $n \in \mathbb{N}$. Mostre que se $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então f é integrável.

Solução. Dado $\epsilon > 0$, sejat $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{2(b-a)}$ para todo $x \in [a, b]$. Segue que

$$\overline{\int_a^b} f(x)\, dx \leq \overline{\int_a^b} f_n(x) + \frac{\epsilon}{2(b-a)}\, dx = \int_a^b f_n(x)\, dx + \frac{\epsilon}{2}.$$

pois f_n é integrável. Análogamente,

$$\int_a^b f_n(x)\, dx - \frac{\epsilon}{2} \leq \underline{\int_a^b} f(x)\, dx$$

Em particular,

$$\left| \overline{\int_a^b} f(x)\, dx - \underline{\int_a^b} f(x)\, dx \right| < \epsilon$$

Como ϵ é arbitrário, concluímos. □