UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção 2023 - Doutorado

PGMAT - **UFC**

26 de junho de 2023

Candidato: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e bem organizada.
2. Os argumentos devem ser cuidadosamente justificados para serem elegíveis à pontuação.

Questão 1. Seja $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ o conjunto das matrizes de ordem $n\times n$ com entradas em $\mathbb{C}$. Consideramos $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ equipado com a norma euclidiana via identificação natural de $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com $\mathbb{C}^{n^2}$. Mostre que

$$\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ \det(A) \neq 0\}$$

é conexo por caminhos.

Prova. Sejam A e B matrizes em $M_{n\times n}(\mathbb{C})$ com determinante diferente de zero. Seja $f(z) = \det(zA+(1-z)B)$. Temos que $z \mapsto f(z)$ é uma função polinomial $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ não identicamente nula pois, $f(0) = \det(B) \neq 0$ e $f(1) = \det(A) \neq 0$. Logo, o conjunto F dos pontos $z \in \mathbb{C}$ tais que $f(z) = 0$ é finito. Escolha um caminho $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$; $\gamma(0) = 0$ e $\gamma(1) = 1$, cuja imagem não intersecta F. Assim, $t \in [0,1] \mapsto \gamma(t)A + (1-\gamma(t))B$ é um caminho em

$$\{A \in M_{n\times n}(\mathbb{C}) \ : \ \det(A) \neq 0\}$$

que conecta A a B. □

Questão 2. Sejam $K \subset \mathbb{R}^{n+1}$ um subconjunto compacto e p um ponto de $\mathbb{R}^{n+1} - K$. Suponha que: para cada vetor unitário $v \in \mathbb{S}^n$, a semirreta $\{p + tv \ : \ t \geq 0\}$ intersecta exatamente um ponto de K. Mostre que K é homeomorfo à esfera $\mathbb{S}^n$.

Prova. Defina $\phi\colon K \to \mathbb{S}^n$ dada por: $x \mapsto \dfrac{x-p}{\|x-p\|}$.Tem-se ϕ bem definida porque $p \notin K$. Também, tem-se ϕ contínua, pois é composta de funções contínuas. A injetividade de ϕ vem da hipótese de, para todo $v \in \mathbb{S}^n$, a semirreta

$$\{p + tv \ : t \geq 0\}$$

não possuir mais de um ponto de interseção com K. E a sobrejetividade de ϕ vem da hipótese, para todo $v \in \mathbb{S}^n$, a semirreta

$$\{p + tv \ : t \geq 0\}$$

possuir interseção com K. Finalmente, inversa $\phi^{-1}\colon \mathbb{S}^n \to K$ é contínua porque, dado $F \subset K$ fechado, como K é compacto, tem-se que F é compacto e, portanto, $\phi(F)$ é compacto, i.e., a pré-imagem de F por ϕ^{-1} é fechado. Logo, $\phi\colon K \to \mathbb{S}^n$ é um homeomorfismo. □

Questão 3. Seja $A \subset \mathbb{R}^2$ aberto. Mostre que não existe $f\colon A \to \mathbb{R}$ injetiva e de classe C^1.

Prova. Suponha f com derivada não nula, pois caso contário, tem-se f localmente constante e, portanto, não injetiva. Logo exite um ponto $p \in A$ tal que $\nabla f(p) \neq \mathbf{0}$. Seja $\epsilon > 0$ tal que para todo vetor unitário $v \in \mathbb{S}^1$, tem-se que $p + tv \in A$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$.

Afirmação. Se $v \in \mathbb{S}^1$ não é ortogonal a $\nabla f(p)$, então $f(p)$ é um ponto interior do intervalo imagem da função $F_v \colon I = (-\epsilon, \epsilon) \to \mathbb{R}$ dada por $t \mapsto f(p + tv)$.

De fato, $f(p)$ é a imagem de $t = 0$ pela função F_v acima e, em $t = 0$, essa função tem derivada $F_v'(0) = \nabla f(p) \cdot v$, que é diferente de zero, por hipótese. Pelo Teorema da Função Inversa em 1(uma) variável, tem-se que $F_v(0) = f(p)$ pertence ao interior do intervalo $F_v(I)$ imagem de F_v.

Uma vez que está provada a afirmação acima, a solução do problema é finalizada tomando dois vetores unitários v e w que não são paralelos e tais que não são ortogonais a $\nabla f(p)$. De fato, assim, $f(p)$ pertence ao interior dos intervalos $F_v(I)$ e $F_w(I)$ e, portanto, $F_v(I) \cap F_w(I)$ contém pelos menos um ponto diferente de $f(q)$; ou seja, existem $t, s \in I \setminus \{0\}$ tais que $f(p + tv) = f(p + sw)$, com $p + tv \neq p + sw$ (contradição com a injetividade de f). $\square$

Questão 4. Seja $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2 = y^3\}$. Mostre que não é possível escrever $X = f^{-1}(c)$ onde $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e c é um valor regular de f.

Prova. Suponha que a cúspide $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; x^2 = y^3\}$ seja dada por $X = f^{-1}(c)$ onde $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^1 e c é um valor regular de f. Dessa forma, segue, como consequência do Teorema da Função Implícita que X é uma superfície 1-dimensional de classe C^1 e, portanto, tem-se uma parametrização local $\phi \colon (-r, r) \to X$ de uma vizinhaça de $\mathbf{0} = (0, 0)$ em X (i.e. ϕ tem derivada não nula em todo $t \in (-r, r)$ e $\phi(0) = \mathbf{0}$). Denote $\phi(t) = (x(t), y(t))$. Como $x(t)^2 = y^3(t)$, tem-se que $y(t) \geq 0$ para todo $t \in (-r, r)$ e, daí, $t = 0$ é o mínimo de $y(t)$ no intervalo e, portanto, $y'(0) = 0$. Também, da equação $x(t)^2 = y^3(t)$, tem-se que $2x(t)x'(t) = 3y(t)^2 y'(t)$ para todo $t \in (-r, r)$. Assim,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{3}{2}\frac{y^2(t)}{x(t)} y'(t) \\ &= \frac{3}{2}\frac{x^{4/3}(t)}{x(t)} y'(t) \\ &= \frac{3}{2} x(t)^{1/3} y'(t) \end{aligned}$$

e, portanto, $x'(0) = \dfrac{3}{2} x(0)^{1/3} y'(0) = 0$, o que é uma contradição com $\phi'(0) \neq \mathbf{0}$. $\square$

Questão 5. Sejam $M \subset \mathbb{R}^n$ um domínio compacto, conexo e com fronteira regular, $C^\infty(M) = \{u : M \to \mathbb{R};\ u \text{ é suave}\}$ e $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ o operador Laplaciano, dado por $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$. Diz-se que um número real λ é um *autovalor de Dirichlet* para M quando existe uma função não nula $u \in C^\infty(M)$ tal que $\Delta u = -\lambda u$ e $u|_{\partial M} = 0$. Similarmente, diz-se que λ é um *autovalor de Neumann* quando existe uma tal função satisfazendo $\Delta u = -\lambda u$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\partial M} = 0$, em que η denota o campo normal unitário exterior a ∂M.

(a) Prove que todo autovalor de Dirichlet é estritamente positivo.

(b) Demonstre que 0 é um autovalor de Neumann, e que os demais autovalores de Neumann são estritamente positivos.

(c) Exiba todos os autovalores de Dirichlet e todos os autovalores de Neumann para $M = [0,1] \subset \mathbb{R}$.

Prova. (a) Inicialmente, observando que

$$div\ (u \cdot \nabla u) = u \cdot \Delta u + |\nabla u|^2,$$

em que *div* indica o divergente de um campo vetorial, o Teorema da Divergência nos dá

$$\int_{\partial M} u \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} = \int_M u \cdot \Delta u + \int_M |\nabla u|^2. \tag{1}$$

No caso em que $u \neq 0$, $\Delta u = -\lambda u$ e $u|_{\partial M} = 0$, tem-se

$$\lambda = \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} > 0.$$

(b) Considerando $u \neq 0,\ \Delta u = -\lambda u$ e $\frac{\partial u}{\partial \eta}|_{\partial M} = 0$ na identidade (1), obtemos

$$\lambda = \frac{\int_M |\nabla u|^2}{\int_M u^2} \geq 0,$$

ocorrendo $\lambda = 0$ somente nos casos em que u é uma constante não nula.

(c) Para exibir os autovalores solicitados, devemos estudar a EDO $u''(t) = -\lambda^2 u(t)$, com $0 \leq t \leq 1$. Visto que a solução geral dessa EDO é

$$u(t) = a\cos(\lambda t) + b\sin(\lambda t),$$

a condição de Dirichlet $u(0) = u(1) = 0$ implica em $u(t) = b\sin(k\pi t)$, com $b \neq 0$ e $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$. Por outro lado, a condição de Neumann $u'(0) = u'(1) = 0$ implica em $u(t) = a\cos(k\pi t)$, com $a \neq 0$ e $k \in \mathbb{Z}$. Portanto, os autovalores de Dirichlet são da forma $k^2\pi^2$, com $k \in \mathbb{Z} - \{0\}$, enquanto os de Neumann são da mesma forma, incluindo o caso $k = 0$.

$\square$

Questão 6. Sejam $k \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave tal que $f(tx) = t^k f(x)$, para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}^+$.

(a) Demonstre que

$$\int_{\mathbb{B}^n} \Delta f(x)\, dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} k f(p)\, dp,$$

sendo $\mathbb{B}^n = \{x \in \mathbb{R}^n;\ |x| \leq 1\}$, $\mathbb{S}^{n-1} = \partial \mathbb{B}^n$ e dp o elemento de volume de $\mathbb{S}^{n-1}$.

(b) Conclua que, no caso em que $f(x, y, z) = 3x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6x^2z^2$, ocorre

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(p)\, dp = 4\pi.$$

Prova. (a) Derivando na variável t a identidade $f(tx) = t^k f(x)$ e depois fazendo $t = 1$, obtemos

$$\langle \nabla f(x), x \rangle = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot x_i = k f(x), \tag{2}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Usando a identidade (2) e o Teorema da Divergência, calculamos

$$\int_{\mathbb{B}^n} \Delta f(x)\, dx = \int_{\mathbb{B}^n} div\ \nabla f(x)\, dx = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} \langle \nabla f(p), p \rangle\, dp = \int_{\mathbb{S}^{n-1}} k f(p)\, dp,$$

levando em conta que $\eta(p) = p$ é o campo normal unitário exterior à fronteira de $\mathbb{B}^n$.

(b) Inicialmente, observamos que a função $f(x, y, z) = 3x^2y^2 + 6y^2z^2 + 6x^2z^2$ é tal que $f(tx, ty, tz) = t^4 f(x, y, z)$, para todo $t > 0$ e $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Daí, pelo item anterior, temos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} f(p)\, dp = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}^3} \Delta f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{B}^3} (18x^2 + 18y^2 + 24z^2)\, dx\, dy\, dz. \tag{3}$$

Usando mudanças de variáveis em $\mathbb{R}^3$, calculamos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}^3} (18x^2 + 18y^2 + 24z^2)\, dx\, dy\, dz &= 60 \int_{\mathbb{B}^3} z^2\, dx\, dy\, dz \\ &= 480 \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^4 \cos^2 \varphi \sin \varphi\, d\rho\, d\varphi\, d\theta \\ &= 480 \left(\frac{\pi}{30} \right) = 16\pi. \end{aligned}$$

Usando este resultado em (3), finalizamos a demonstração.

□

Questão 7. Seja $F \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto fechado e $\psi : F \to \mathbb{R}^m$ uma função suave.

(a) Mostre que existe uma função suave $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tal que $\Psi(x) = \psi(x)$, para todo $x \in F$.

(b) Dê um contraexemplo para mostrar que a conclusão do item anterior é falsa se F não for fechado.

(c) Dê um contraexemplo para mostrar que a conclusão do item (a) é falsa se o contradomínio de ψ não for o espaço $\mathbb{R}^m$.

Prova. (a) Vamos supor que $\mathbb{R}^n - F \neq \emptyset$, pois não há o que fazer no caso em que $F = \mathbb{R}^n$. Para cada $p \in F$, sejam $B_p \subset \mathbb{R}^n$ a bola unitária aberta centrada em p, $U_p = F \cap B_p$ e $\psi_p : B_p \to \mathbb{R}^m$ uma função suave tal que $\psi_p|_{U_p} = \psi|_{U_p}$. Considerando a cobertura aberta

$$\mathbb{R}^n \subset (\cup_{p\in F} B_p) \cup (\mathbb{R}^n - F),$$

tomamos $\{\xi_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}_{p\in F} \cup \{\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\}$ como sendo uma partição da unidade subordinada à cobertura acima, com $\operatorname{supp} \xi_p \subset B_p$ e $\operatorname{supp} \xi \subset \mathbb{R}^n - F$, e definimos a função $\Psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, pondo

$$\Psi(x) = \sum_{p\in F} \xi_p(x)\psi_p(x).$$

Finalmente, observamos que:

(i) Ψ é suave, pois a coleção de suportes $\{\operatorname{supp} \xi_p\}_{p\in F}$ é localmente finita e cada função $\xi_p\psi_p : B_p \to \mathbb{R}^m$ é suave.

(ii) Para cada $x \in F$, ocorre $\xi(x) = 0$ e $\psi_p(x) = \psi(x)$, sempre que $\xi_p(x) \neq 0$, e assim

$$\Psi(x) = \sum_{p\in F} \xi_p(x)\psi(x) = \left(\xi(x) + \sum_{p\in F} \xi_p(x)\right)\psi(x) = \psi(x).$$

(b) Considerando $F = (0, 1) \subset \mathbb{R}$ e $\psi : (0, 1) \to \mathbb{R}$, dada por $\psi(x) = \frac{1}{x}$, tem-se que ψ é suave, mas não pode ser estendida suavemente a $\mathbb{R}$, uma vez que não admite extensão contínua em $x = 0$, visto que $\lim_{x\to 0^+} \psi(x) = +\infty$.

(c) Basta observar que a função identidade $i : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ não pode ser estendida suavemente a uma função $I : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{S}^1$, pois, pelo Teorema de Stokes, teríamos

$$2\pi = \int_{\mathbb{S}^1} dp = \int_{\partial\mathbb{B}^2} I^*(dp) = \int_{\mathbb{B}^2} d(I^*dp) = \int_{\mathbb{B}^2} I^*d(dp) = \int_{\mathbb{B}^2} I^*0 = 0.$$

□