UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

EXAME DE SELEÇÃO PARA PGMAT/UFC - MESTRADO - 2023.2

Questão 1. Se X é um subconjunto de $\mathbb{R}$, denotamos o supremo de X por $\sup(X)$. Sejam S e T subconjuntos de $\mathbb{R}$ e seja $S+T$ o subconjunto de $\mathbb{R}$ dado por

$$S+T=\{s+t \mid s\in S, t\in T\}.$$

Mostre que $\sup(S+T)=\sup(S)+\sup(T)$.

Questão 2. Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função contínua tal que $f(a)=f(b)$. Mostre que existe pelo menos um número c no intervalo $[a,(a+b)/2]$ tal que $f(c)=f(c+(b-a)/2)$.

Questão 3. Seja $\alpha\in(0,1)$. Mostre que qualquer sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que satisfaz a relação de recorrência

$$x_{n+2}=\alpha x_{n+1}+(1-\alpha)x_n, \quad \forall n\in\mathbb{N},$$

é convergente.

Questão 4. Mostre que o conjunto $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, formado por todos os subconjuntos de $\mathbb{N}$, é não-enumerável.

Questão 5. Prove que todo subconjunto fechado de $\mathbb{R}$ se escreve como interseção de uma quantidade enumerável de subconjuntos abertos de $\mathbb{R}$.

Questão 6. Resolva os itens a seguir.

(a) Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função diferenciável tal que $f'(x)>f(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$ e $f(x_0)=0$ para algum $x_0\in\mathbb{R}$. Mostre que $f(x)>0$ para todo $x>x_0$.

(b) Seja c um número real positivo. Mostre que a equação

$$ce^x=1+x+\frac{x^2}{2}$$

possui exatamemte uma raiz real.

Questão 7. Mostre a desigualdade $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}<\frac{4}{3}$.

Questão 8. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ tal que f_n é integrável, para todo $n\in\mathbb{N}$. Mostre que se $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para uma função $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então f é integrável.