UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Centro de Ciências
Departamento de Matemática

Pós-Graduação em Matemática	*Exame de Seleção para o Mestrado*
Período: 2023-1	*Data-07/02/2023*
Banca examinadora:	*Abdênago Barros e Ramon Moreira*
Aluno:	

1. Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a sequência definida por:

$$x_n = \begin{cases} 1, \ \textit{se} \ 1 \leq n \leq 1000; \\ \dfrac{2}{n}, \ \textit{se} \ n > 1000. \end{cases}$$

   (a) Prove que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é convergente e calcule seu limite L.

   (b) Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{400}$ encontre o menor $m \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m$ então

$$x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

2. Seja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais monótona, crescente e limitada. Prove que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é convergente.

3. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que f possui um ponto fixo.

4. Seja $f : [0, +\infty)$ uma função contínua tal que $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x + 1) - f(x)] = L$. Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diderenciável em $a \in \mathbb{R}$.

(a) Mostre que $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

(b) Dado $a \in \mathbb{R}$, encontre uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o limite $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe mas f não é diferenciável no ponto a.

6. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, com $t \in \mathbb{R}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Prove que para $k = 0, 1, \ldots, n, \ldots$ inteiros temos: $A^{4k+1} = t^{4k+1}J$; $A^{4k+2} = -t^{4k+2}I$; $A^{4k+3} = -t^{4k+3}J$ e $A^{4k} = t^{4k}I$.

   (b) Conclua que
   $$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{2n!}A^{2n} = p_{2n}^{\cos}(t)I + p_{2n-1}^{\text{sen}}(t)J,$$
   onde $p_{2n}^{\cos}(t)$ denota o polinômio de Taylor de ordem $2n$ da função $f(t) = \cos t$, enquanto que $p_{2n-1}^{\text{sen}}(t)$ denota polinômio de Taylor de ordem $2n-1$ da função $f(t) = \operatorname{sen} t$.

7. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por:
   $$f(x) = \begin{cases} 1 + x, & se \ -1 \leq x < 0; \\ 1 - x, & se \ 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

   (a) Prove que f é contínua mas não derivável.

   (b) Encontre uma primitiva $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de f de classe $\mathcal{C}^1\big([-1, 1]\big)$. Podemos encontrar F de classe $\mathcal{C}^2\big([-1, 1]\big)$?

8. Consideremos uma sequência $\big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots\big)$ de números reais tais que $x_k \in \{2, 3, 4\}$. Pondo $x = \big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots\big)$ considere
   $$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{5^k}.$$

   (a) Prove que f é bem definida, ou seja, a série é convergente.

   (b) Encontre o menor intervalo real $[a, b]$ tal que $a \leq f(x) \leq b$.

   (c) Encontre x e y tais que $f(x) = a$ e $f(y) = b$.