UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção 2023 - Doutorado

PGMAT - **UFC**

7 de fevereiro de 2023

Candidato: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e organizada.
2. Os argumentos devem ser cuidadosamente justificados para serem elegíveis a pontuação.

Questão 1. Prove que uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, existe uma aplicação $A : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo as duas condições a seguir:

- $f(a+h) - f(a) = A(h) \cdot h$, para todo $h \in \mathbb{R}^m$;
- A é contínua no ponto $h = 0$.

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com $\langle f'(x) \cdot v, v \rangle \geq 2023 \cdot |v|^2$, para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$. Prove que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre si mesmo.

Questão 3. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Demonstre que f'' é constante se, e somente se, existe uma forma bilinear simétrica $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $d \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = \frac{1}{2}B(x,x) + \langle c, x \rangle + d$.

Questão 4. Sejam c e α reais positivos dados e Q um quadrado no plano, também dado. Prove que não existe função sobrejetiva $f : [0,1] \to Q$ tal que, para todos $0 \leq x, y \leq 1$, tenhamos

$$||f(x) - f(y)|| \leq c|x-y|^{\alpha+1/2},$$

em que $|| \cdot ||$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Questão 5. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ a bola fechada unitária de $\mathbb{R}^3$, centrada na origem. Calcule o valor da integral $\int_B \frac{x_1^2}{|x|^4} dx$, em que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e dx denota o elemento de volume usual de $\mathbb{R}^3$.

Questão 6. Sejam B a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^3$, centrada na origem, e $\mathbb{S}^2 = \partial B$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \cos x_1 \, d\sigma = \int_B (\cos x_1 - x_1 \sin x_1) \, dx,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $d\sigma$ e dx denotam os elementos de volume usuais de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Questão 7. Mostre que o conjunto $SL(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2};\ \det X = 1\}$ é uma hipersuperfície suave de $\mathbb{R}^{n^2}$, com plano tangente na identidade igual a $T_{I_n}SL(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2};\ \text{traço}(X) = 0\}$.