UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado
Análise no $\mathbb{R}^n$
08 de Agosto de 2023

Estudante: ____

Problema 1. Dadas funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2, suponha que existam pontos distintos $p, q \in \mathbb{R}^2$ satisfazendo as seguintes condições: $p \in \mathrm{Graf}(f)$, $q \in \mathrm{Graf}(g)$ e

$$|p - q| = \min\{|u - v|;\ u \in \mathrm{Graf}(f) \text{ e } v \in \mathrm{Graf}(g)\}.$$

Prove que a reta que passa por p e q é ortogonal ao gráfico de f em p e ao gráfico de g em q.

Problema 2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, tal que $|f'(t)| \leq k < 1$, para todo $t \in \mathbb{R}$. Defina $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ pondo $\varphi(x, y) = (x + f(y), y + f(x))$. Mostre que φ é um difeomorfismo sobre sua imagem.

Problema 3. Sejam $A \subset \mathbb{R}^n$ um bloco fechado e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função (limitada e) integrável. Prove que $|f| : A \to \mathbb{R}$ também é integrável, e que

$$\left| \int_A f(x)dx \right| \leq \int_A |f(x)|dx.$$

Problema 4. Seja $\xi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 com gradiente limitado, digamos $|\nabla \xi| < C$ em $\mathbb{R}^n$, e $M \subset \mathbb{R}^{n+1}$ o gráfico de ξ. Dados $p_0, q_0 \in \mathbb{R}^n$, prove que existe uma curva $\gamma : [0, 1] \to M$, de classe C^1, ligando $p = (p_0, \xi(p_0))$ a $q = (q_0, \xi(q_0))$ e tal que

$$\ell(\gamma) \leq \sqrt{1 + C^2}\, |p_0 - q_0|.$$

Problema 5. Dados $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto e não vazio, sejam $C^\infty(U; \mathbb{R}) = \{f : U \to \mathbb{R};\ f \text{ é } C^\infty\}$ e $C^\infty(U; \mathbb{R}^3) = \{X : U \to \mathbb{R}^3;\ X \text{ é } C^\infty\}$.

(a) Prove que:

  i. $(\mathrm{rot} \circ \mathrm{grad})(f) = 0$, para toda $f \in C^\infty(U; \mathbb{R})$.

  ii. $(\mathrm{div} \circ \mathrm{rot})(X) = 0$, para todo $X \in C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$.

(b) Considere $C^\infty(U; \mathbb{R})$ e $C^\infty(U; \mathbb{R}^3)$ como espaços vetoriais reais. Prove que existem aplicações lineares $\varphi_0 : C^\infty(U; \mathbb{R}) \to \Omega^0(U)$, $\varphi_1 : C^\infty(U; \mathbb{R}^3) \to \Omega^1(U)$, $\varphi_2 : C^\infty(U; \mathbb{R}^3) \to \Omega^2(U)$ e $\varphi_3 : C^\infty(U; \mathbb{R}) \to \Omega^3(U)$ tais que o diagrama

$$\begin{tikzcd}
C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[r, "\mathrm{grad}"] \arrow[d, "\varphi_0"'] & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{rot}"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & C^\infty(U;\mathbb{R}^3) \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & C^\infty(U;\mathbb{R}) \arrow[d, "\varphi_3"] \\
\Omega^0(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^1(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^2(U) \arrow[r, "d"'] & \Omega^3(U)
\end{tikzcd}$$

comuta, isto é, tais que $d \circ \varphi_0 = \varphi_1 \circ \mathrm{grad}$, $d \circ \varphi_1 = \varphi_2 \circ \mathrm{rot}$ e $d \circ \varphi_2 = \varphi_3 \circ \mathrm{div}$.

Problema 6. Sejam $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto não vazio, conexo, limitado e cujo bordo ∂U é uma hipersuperfície de classe C^2. Se $X : \overline{U} \to \mathbb{R}^n$ for um campo de classe C^1 tal que $\int_U \langle \nabla \eta, X \rangle\, dx = 0$, para toda $\eta : U \to \mathbb{R}$ de classe C^2 e suporte compacto, prove que $\mathrm{div}(X) = 0$ em U.