UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Exame Geral de Conhecimentos do Doutorado
Prova de Singularidades

Banca Examinadora: Alexandre Fernandes e Edson Sampaio
Data: 10/08/2023.

Nome: ____

1. Dados um aberto $U \subset \mathbb{C}^n$ e funções holomorfas não nulas $f_1, ..., f_k : U \to \mathbb{C}$, mostre que $X = \{x \in U; f_1(x) = ... = f_k(x) = 0\}$ é nenhures denso em U.

2. Seja X um conjunto analítico complexo em $\mathbb{C}^n$ de dimensão pura e $0 \in X$. Mostre que X é subvariedade analítica de $\mathbb{C}^n$ em torno de 0 se, e somente se, $m(X, 0) = 1$.

3. Seja $h : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Mostre que os seguintes itens são equivalentes:

   a) h é um homeomorfismo;
   b) h é um difeomorfismo;
   c) Existem $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $b \in \mathbb{C}$ tais que $h(z) = az + b$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

4. Mostre que os Teoremas de Preparação e de Divisão de Weierstrass são equivalentes.

5. Sejam $U \subset \mathbb{C}^n$ um aberto, X um conjunto analático em U de dimensão pura igual a 1 e seja $x \in X$. Mostre que $(X; x)$ é um germe irredutível se, e somente se, existe aberto $W \subset \mathbb{C}^n$ contendo x tal que $X \cap W$ é uma variedade topológica.

6. Sejam $f, g : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dadas por $f(x, y) = y^2 - x^2 + x^3$ e $g(x, y) = xy$. Mostre que existe um germe de homeomorfismo $h : (f^{-1}(0), 0) \to (g^{-1}(0), 0)$.

7. Enuncie o Teorema de Representação Local (ou Teorema de Parametrização Local) de conjuntos analíticos. Em seguida, mostre que este implica no seguinte:

   Seja $f : U \subset \mathbb{C}^n \to \Delta \subset \mathbb{C}^k$ uma aplicação holomorfa. Assuma que X é um conjunto analático de U tal que $f|_X : X \to \Delta$ é própria. Mostre que existe um conjunto analítico $\sigma \subset f(X)$ tal que $\dim \sigma < \dim X$, $X \setminus f^{-1}(\sigma) \subset Reg(X)$ e $f|_{X \setminus f^{-1}(\sigma)} : X \setminus f^{-1}(\sigma) \to f(X) \setminus \sigma$ é difeomorfismo local.