UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Preliminar de Doutorado - Prova de Geometria.
Curso: Doutorado em Matemática.
Data: 04/08/2023 - Horário: 14:00 - 18:00.

Faça os problemas a seguir, justificando todas as suas afirmações e explicitando os teoremas e propriedades que utilizar.

01. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função suave. Considere a variedade riemanniana (M, g), onde

$$M = \{(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1});\ x_{n+1} = f(x_1, \ldots, x_n)\}$$

é o gráfico de f e g é a métrica riemanniana induzida em M pela métrica euclidiana de $\mathbb{R}^{n+1}$. Considere também a variedade riemanniana $(\mathbb{R}^n, h)$, onde h é a métrica riemanniana cuja expressão, na base associada à carta dada pela identidade $\mathrm{Id} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, é

$$h_{ij} = \delta_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}.$$

Mostre que (M, g) e $(\mathbb{R}^n, h)$ são isométricas.

02. Seja $\theta \in \Omega^1(\mathbb{R}^3)$ dada por

$$\theta = dx_3 - x_2 dx_1 + x_1 dx_2.$$

Para cada $p \in \mathbb{R}^3$, seja $D_p \subset T_p\mathbb{R}^3$ o núcleo de θ_p. A distribuição $\mathcal{D} = \{D_p;\ p \in \mathbb{R}^3\}$ é integrável? Justifique sua resposta.

03. Seja M^3 uma variedade compacta e orientável tal que $\partial M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$. Sejam

$$\pi_1, \pi_2 : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$$

as projeções canônicas e seja α a 1-forma dual do campo unitário padrão $\dfrac{\partial}{\partial \theta} \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^1)$. Mostre que não é possível estender ambas as formas $\pi_1^*\alpha$ e $\pi_2^*\alpha$ a formas fechadas em M.

04. Seja $M = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

(a) Calcule a cohomologia de deRham de $M \setminus \{p\}$, onde p é um ponto de M.

(b) Construa uma 1-forma fechada ω em $M \setminus \{p\}$ cuja classe de cohomologia de deRham é não trivial.

05. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ dada por $f(x, y, z) = (x^2 - y^3, x + z^2 - 1)$.

(i) Mostre que $f^{-1}\{(0,0)\} \setminus \{(0,0,0)\}$ é uma subvariedade mergulhada de $\mathbb{R}^3$

(ii) Mostre que $f^{-1}\{(0,0)\}$ não é subvariedade suave de $\mathbb{R}^3$.

(iii) Mostre que $f^{-1}\{(0,0)\}$ não é subvariedade C^1 de $\mathbb{R}^3$.

06. Sejam M uma variedade fechada (isto é, compacta e sem bordo) de dimensão $n \geq 1$, $F : M \to \mathbb{S}^1$ uma submersão e $X = \dfrac{\partial}{\partial \theta} \in \mathcal{X}(\mathbb{S}^1)$ o campo unitário padrão.

(a) Mostre que existe $V \in \mathcal{X}(M)$ tal que $(dF)_p(V_p) = X_{F(p)}$, para todo $p \in M$.

(b) Sejam q_1 e q_2 pontos quaisquer de $\mathbb{S}^1$. Mostre que as variedades $F^{-1}(q_1)$ e $F^{-1}(q_2)$ são difeomorfas.