UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Análise

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

27 de Fevereiro de 2023

Candidato: ____

Parte I

Questão 1. Resolva os itens abaixo:

a) Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}, & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre que para cada $\delta > 0$ a função f é integrável em $B_\delta^c := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$ e existe uma constante $C = C(n, \delta) > 0$ tal que

$$\int_{B_\delta^c} f(x)dx \leq C.$$

Demonstração. Para cada $k \geq 0$ defina

$$\mathcal{A}_k = \left\{x \in \mathbb{R}^n : 2^k\delta \leq |x| < 2^{k+1}\delta\right\} \quad \text{e} \quad g_k = \frac{1}{(2^k\delta)^{n+\frac{1}{2}}}\chi_{\mathcal{A}_k}.$$

Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : 1 \leq |x| < 2\}$. Usando a propriedade de dilatação da medida de Lebesgue obtemos

$$m(\mathcal{A}_k) = (2^k\delta)^n m(\mathcal{A}).$$

Assim, pelo Teorema da Convergência Monótona, encontramos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)\right) dx &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2^k\delta}\right)^{n+\frac{1}{2}} m(\mathcal{A}_k)\right] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2^k\delta}\right)^{n+\frac{1}{2}} (2^k\delta)^n m(\mathcal{A})\right] \\ &= \frac{m(\mathcal{A})\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}k}}\right)}{\delta^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned}$$

Por outro lado, temos a união disjunta $B_\delta^c = \displaystyle\bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{A}_k$. Então, dado $x \in B_\delta^c$ existe $\mathcal{A}_k$ tal que $x \in \mathcal{A}_k$, e assim, obtemos

$$f(x) = |x|^{-(n+\frac{1}{2})} \leq (2^k\delta)^{-(n+\frac{1}{2})} = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(x).$$

Logo, pela monotonicidade da integral, estimamos

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{k=0}^{\infty} g_k(x)\right) dx = \frac{C_0}{\delta^{\frac{1}{2}}},$$

onde $C_0 = m(\mathcal{A}) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{1}{2}k}}\right)$. $\square$

b) Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ uma transformação linear invertível. Assuma que para cada $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável temos $|E| = |\det T||T^{-1}(E)|$. Se $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, mostre que

$$\int_E f(x)\,dx = |\det T| \int_{T^{-1}(E)} f(T(y))\,dy, \tag{1}$$

para todo $E \subset \mathbb{R}^n$ mensurável.

Demonstração. Inicialmente, assuma que $f = \chi_G$, onde $G \subset E$ é um conjunto mensurável. Levando em conta que

$$f(T(y)) = \chi_G(T(y)) = \chi_{T^{-1}(G)}(y), \quad \text{para todo } y \in T^{-1}(E),$$

obtemos

$$\int_{T^{-1}(E)} f(T(y))\,dy = |T^{-1}(G)| = \frac{|G|}{|\det T|} = \frac{\int_E f(x)\,dx}{|\det T|}.$$

Assim, para $G \subset \mathbb{R}^n$ mensurável, encontramos

$$\begin{aligned}
\int_E f(x)\,dx &= \int_{E\cap G} \chi_{E\cap G}(x)\,dx \\
&= |\det T| \int_{T^{-1}(E)} \chi_{E\cap G}(T(y))\,dy \\
&= |\det T| \int_{T^{-1}(E)} f(T(y))\,dy. \qquad (2)
\end{aligned}$$

Usando (2) concluímos que (1) vale quando f é uma função simples. Então, via o Teorema da convergência monótona, a igualdade (1) é verdadeira se f é uma função mensurável não-negativa. Finalmente, para $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, usamos a igualdade $f = f^+ - f^-$ para obter (1). $\square$

Questão 2. Seja $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que para cada x a função $f(x,y)$ é integrável em y e $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é uma função limitada de (x,y). Para cada x, prove que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é uma função mensurável de y e

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.$$

Demonstração. Para cada $x \in [0,1]$ sabemos que $f(x+1/n, y)$ e $f(x,y)$ são funções mensuráveis de y. Ademais, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{n\to\infty} F_n(x,y), \quad \text{para todo } y \in [0,1],$$

onde $F_n(x,y) = n\,(f(x+1/n,y) - f(x,y))$. Logo, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ é uma função mensurável de y. Seja $C > 0$ uma constante tal que

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq C, \quad \text{para todo } x, y \in [0,1].$$

Então, pelo Teorema do Valor Médio, encontramos

$$|F_n(x,y)| \leq \sup_{x\in[0,1]} \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq C, \quad \text{para todo } y \in [0,1].$$

Portanto, pelo Teorema da convergência dominada em y, obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\ dy &= \lim_{n\to\infty}\int_0^1 F_n(x,y)\,dy \\
&= \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} F_n(x,y)\right)\ dy \\
&= \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dy.
\end{aligned}$$

□

Questão 3. Seja $\{K_\delta\}_\delta$ uma aproximação da identidade. Se $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < +\infty$, prove que a convolução $f * K_\delta$ converge para f em $L_p(\mathbb{R}^n)$ quando $\delta \to 0$.

Demonstração. Precisamos mostrar inicialmente que $(f * K_\delta) \in L_p(\mathbb{R}^n)$. De fato, se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, encontramos

$$\begin{aligned}
|f * K_\delta(x)| &\leq \left|\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)K_\delta(y)\,dy\right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||K_\delta(y)|\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)||K_\delta(y)|^{\frac{1}{p}}|K_\delta(y)|^{\frac{1}{q}}\,dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|^p|K_\delta(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\,dy\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= [(|f|^p * |K_\delta|)(x)]^{\frac{1}{p}}\, \|K_\delta\|_1^{\frac{1}{q}},
\end{aligned}$$

para quase todo x, onde usamos a desigualdade de Hölder na penúltima desigualdade (lembre que $(|f|^p * |K_\delta|)(x)$ é finito para quase todo x, pois $(|f|^p * |K_\delta|) \in L_1(\mathbb{R}^n)$). Logo, obtemos

$$\|f * K_\delta\|_p^p \leq \||f|^p * |K_\delta|\|_1 \|K_\delta\|_1^{\frac{p}{q}} < \infty,$$

ou seja, $(f * K_\delta) \in L_p(\mathbb{R}^n)$. Agora provaremos que $\|f * K_\delta\|_p \to 0$ quando $\delta \to 0$. Com efeito, levando em conta que $\int_{\mathbb{R}^n} K_\delta(y)\,dy = 1$ e aplicando a desigualdade de Hölder novamente, podemos estimar

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} (f(x-y) - f(x))\, K_\delta(y)\, dy \right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|\, |K_\delta(y)|^{\frac{1}{p}} |K_\delta(y)|^{\frac{1}{q}}\, dy \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |K_\delta(y)|\, dy \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_\delta(y)|\, dy \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (3)
\end{aligned}$$

Integrando (3) em x, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |(f * K_\delta)(x) - f(x)|^p\, dx &\leq \|K_\delta\|_1^{\frac{p}{q}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y) - f(x)|^p |K_\delta(y)|\, dy\, dx \right) \\
&= \|K_\delta\|_1^{\frac{p}{q}} \int_{\mathbb{R}^n} \|f_y - f\|_p^p |K_\delta(y)|\; dy \quad (4)
\end{aligned}$$

onde $f_y(x) = f(x-y)$. Agora escolha $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|f_y - f\|_p^p \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{para todo } y \in B_{\delta_0}$$

e considere as integrais

$$I_1 = \int_{B_{\delta_0}} \|f_y - f\|_p^p |K_\delta(y)|\, dy \quad \text{e} \quad I_2 = \int_{B_{\delta_0}^c} \|f_y - f\|_p^p |K_\delta(y)|\; dy.$$

onde B_{δ_0} denota a bola aberta de centro na origem e raio $\delta_0 > 0$. Por outro lado, sabemos que existe uma constante $C > 0$ que satisfaz:

1. $|K_\delta(x)| \leq \frac{C}{\delta^n}$ para todo $\delta > 0$ e para todo $x \in \mathbb{R}^n$.
2. $|K_\delta(x)| \leq \frac{C\delta}{|x|^{n+1}}$ para todo $\delta > 0$ e todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Assim, encontramos

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{B_{\delta_0}} \|f_y - f\|_p^p |K_\delta(y)|\, dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{B_{\delta_0}} |K_\delta(y)|\, dy \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} \|K_\delta\|_1 \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} C_0 \quad (5)
\end{aligned}$$

para alguma constante $C_0 = C_0(n, C)$. Agora use a desigualdade triangular em $L_p(\mathbb{R}^n)$ para obter

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{B_\delta^c} \|f_y - f\|_p^p |K_\delta(y)|\, dy \\ &\leq 2^p \|f\|_p^p \int_{B_{\delta_0}^c} \frac{C\delta}{|y|^{n+1}}\, dy \\ &\leq \frac{(C2^p\|f\|_p^p)}{\delta_0}\delta. \end{aligned} \tag{6}$$

Portanto, combinando (4), (5) e (6) e fazendo $\delta \to 0$ obtemos $\|f * K_\delta\|_p \to 0$. □

Questão 4. Resolva os itens abaixo:

a) Seja $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função absolutamente contínua tal que $F'(x) = 0$ a.e. x. Use o recobrimento de Vitali para provar que F é constante.

Demonstração. Dado $c \in (0,1]$, sejam $\varepsilon > 0$ e

$$E = \left\{ x \in (0,c) : \lim_{h\to 0} \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \right| = 0 \right\}.$$

Dados $x \in E$ e $\eta > 0$ existe $(a_x, b_x) \subset (0,c)$ tal que

$$x \in (a_x, b_x), \quad (b_x - a_x) < \eta \quad \text{e} \quad |F(b_x) - F(a_x)| \leq \varepsilon(b_x - a_x). \tag{7}$$

Considere o recobrimento de Vitali de E dado por $\beta = \displaystyle\bigcup_{\eta\in(0,\infty)} \beta_\varepsilon^\eta$, onde

$$\beta_\varepsilon^\eta = \bigcup_{x\in E} \{(a_x, b_x) \subset (0,c) : (a_x, b_x) \text{ satisfaz (7)}\}.$$

Como F é absolutamente contínua, podemos escolher $\delta > 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| \leq \varepsilon, \quad \text{se} \quad \sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) < 2\delta, \tag{8}$$

onde os intervalos (a_k, b_k) são subintervalos de $(0,c)$ disjuntos. Pelo Lema de recobrimento de Vitali, existem intervalos abertos disjuntos $I_k = (c_k, d_k) \in \beta$ tais que

$$\sum_{k=1}^{M} |I_k| \geq |E| - \delta = (c - 0) - \delta. \tag{9}$$

Usando (9) podemos escrever

$$[0,c] \setminus \bigcup_{k=1}^{M} I_k = \bigcup_{k=1}^{N} [a_k, b_k] \tag{10}$$

onde os subintervalos (a_k, b_k) de $(0,c)$ são disjuntos e satisfazem

$$\sum_{k=1}^{N} (b_k - a_k) \leq \delta < 2\delta.$$

Portanto, combinando a desigualdade triangular, (7) e (8), obtemos

$$\begin{aligned} |F(c) - F(0)| &\leq \sum_{k=1}^{M} |F(d_k) - F(c_k)| + \sum_{k=1}^{N} |F(b_k) - F(a_k)| \\ &\leq \varepsilon \left(\sum_{k=1}^{M} |I_k| \right) + \varepsilon \\ &\leq \varepsilon(c+1), \end{aligned}$$

ou seja, $F(0) = F(c)$. □

b) Mostre que existe uma função contínua $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ e crescente tal que $F(0) = 0$, $F(1) = 1$ e $F'(x) = 0$ a.e. x.

Demonstração. Seja $\mathcal{C} \subset [0,1]$ o conjunto de Cantor. Sabemos que

$$\mathcal{C} = \bigcap_{k=1}^{\infty} C_k,$$

onde C_k é definido indutivamente por

$$C_k := \begin{cases} [0,1/3] \cup [2/3,1]\,, \text{ se } k = 1, \\ C_{k-1} \setminus \bigcup_{i=1}^{2^{k-1}} I_i,\ I_i \text{ é o terço médio do i-ésimo subintervalo de } C_{k-1}, \text{ se } k \geq 2. \end{cases}$$

Note que C_k possui 2^k subintervalos. Considere a sequência de funções contínuas $F_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $F_k(0) = 0$, $F_k(1) = 1$, F_k é a função linear e crescente em C_k e constante em $[0,1] \setminus C_k$ tal que

$$|F_k(x) - F_{k-1}(x)| \leq \frac{1}{2^k} \tag{11}$$

para todo $x \in (0,1)$. Usando (11) concluímos que (F_k) converge uniformemente para uma função $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ contínua e crescente. Finalmente, levando em conta que $\mathcal{C}$ possui medida nula, obtemos $F'(x) = 0$ a.e. x. □

Parte II

Questão 5. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e limitado e $g \in L^2(\Omega)$. Mostre que

$$\min_{\kappa \in \mathbb{R}} \int_\Omega |g - \kappa|^2 dx = \int_\Omega |g - g_\Omega| dx,$$

onde $g_\Omega = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega g(x) dx$.

Solução: Para $g \in L^2(\Omega)$,

$$F(\kappa) = \int_\Omega |g - \kappa|^2 dx$$

é convexa e diferenciável na variável κ e

$$F'(\kappa) = \int_\Omega 2(\kappa - g).$$

Portanto $F'(\kappa) = 0$ ocorre precisamente para $\kappa = \frac{1}{|\omega|} \int_\Omega g$. Como F é convexa, um ponto crítico possui um mínimo. ■

Questão 6. Sejam E, F espaços de Banach e $M \subset E$ subespaço e $T : E \to F$ um operador linear limitado sobrejetor. Mostre que $T(M)$ é fechado em F se, e somente se, $M + \mathrm{Ker}(T)$ é fechado em E. (Aqui, $T(E)$ representa o conjunto imagem de $T : E \to F$ e $\mathrm{Ker}(T) = \{x \in E : Tx = 0\}$ o núcleo)

Solução: Vamos iniciar com duas observações:

1. Como T é contínua e sobrejetiva, e E e F são espaços de Banach $\Rightarrow T$ é uma aplicação aberta.
2. Ademais, vale que $T(M) = T(M + \mathrm{Ker}(T))$ e que $T^{-1}(T(M)) = M + \mathrm{Ker}(T)$.

($\Rightarrow$) Assuma que $T(M)$ é fechado. Então $T(M)^c$ (complementar) é aberto, e como T é contínua, $T^{-1}(T(M)) = M + \mathrm{Ker}(T)$ é aberto. Como T é sobrejetiva

$$T^{-1}(T(M)^c) = (T^{-1}(T(M)))^c = (M + \mathrm{Ker}(T))^c,$$

o qual implica que $M + \mathrm{Ket}(T)$ é fechado.

($\Leftarrow$) Agora suponha que $M + \mathrm{Ket}(T)$ é fechado. Como T é aberta, isto implica que $T(M + \mathrm{Ker}(T)) = T(M)$ é fechado.

Daé concluímos o resultado. ■

Questão 7. Seja E um espaço normado. Dizemos que um conjunto $A \subset E$ é fracamente limitado se para toda $\phi \in E^\star$ (espaço dual de E) o conjunto $\phi(A) \subset \mathbb{R}$ é limitado. Mostre que A é limitado se, e somente se, é fracamente limitado. Conclua que toda sequência fracamente convergente é limitada.

Solução: Suponha A limitado. Então existe constante $c > 0$ tal que $\|x\| \leq c$ para todo $x \in A$. Portanto, se $\phi \in E^\star$, então para todo $x \in E$ temos que $|\phi(x)| \leq \|\phi\|_{E^\star} \cdot \|x\| \leq c\|\phi\|_{E^\star}$. Portanto $\phi(A)$ é limitado.

Reciprocamente, seja $J : E \to E^{\star\star}$ a injeção canônica. Por hipótese, para cada $\phi \in E^\star$ existe $c_\phi > 0$ tal que $|\phi(x)| \leq c_\phi$ para todo $x \in A$. Portanto, temos que $|Jx(\phi)| = |\phi(x)| \leq c_\phi$ para todo $x \in A$. Em outras palavras, a família de operadores $\{Jx : x \in A\}$ em $L(E^\star, \mathbb{R})$ é pontualmente limitado. Portanto, pelo princípio da limitação uniforme temos que

$$\sup_{x \in A} \|x\| = \sup_{x \in A} \|Jx\| < \infty,$$

ou seja, A é limitado. $\blacksquare$

Questão 8. Para uma função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ e $\alpha \in (0,1]$ vamos definir

$$[f]_{C^{0,\alpha}} : = \sup_{\substack{x,y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|^\alpha}.$$

Ademais, definimos o espaço das funções α-Hölder contínua em $[0,1]$ como

$$C^{0,\alpha}([0,1]) : = \{f : [0,1] \to \mathbb{R} \, : \, [f]_{C^{0,\alpha}} < \infty\}.$$

Vamos equipar $C^{0,\alpha}([0,1])$ com a norma $\|f\|_{C^{0,\alpha}} : = \|f\|_\infty + [f]_{C^{0,\alpha}}$, onde $\|f\|_\infty : = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

a) Mostre que a bola $B_{C^{0,\alpha}} : = \{f \in C^{0,\alpha}([0,1]) \, : \, \|f\|_{C^{0,\alpha}} < 1\}$ é relativamente compacto em $C([0,1])$, isto é, seu fecho com respeito à norma $\|\cdot\|_\infty$ é um subconjunto compacto de $C([0,1])$.

b) Defina $C^1([0,1])$ o conjunto de todas funções $f \in C([0,1])$ que são continuamente diferenciáveis em $(0,1)$ cuja derivada f' extende continuamente para $[0,1]$. Equipe $C^1([0,1])$ com a norma
$$\|f\|_{C^1([0,1])} : = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$
Mostre que a bola $B_{C^1} : = \{f \in C^1([0,1]) : \|f\|_{C^1} < 1\}$ é relativamente compacto em $C([0,1])$. (Sugestão: mostre que $C^1([0,1]) \subset C^{0,1}([0,1])$).

c) Conclua que a aplicação inclusão $\imath : C^1([0,1]) \to C([0,1])$, $\imath(f) : = f$ é um operador compacto.

Solução:

a) Primeiro note que $[f]_{C^{0,\alpha}} < \infty$ implica que
$$|f(x) - f(y)| \leq [f]_{C^{0,\alpha}} |x - y|^\alpha \quad \forall \, x, y \in [0,1].$$
Em particular, deduzimos que toda $f \in C^{0,\alpha}([0,1])$ está em $C([0,1])$ e, portanto, $B_{C^{0,\alpha}} \subset C([0,1])$. O conjunto $B_{C^{0,\alpha}}$ é relativamente compacta em $C([0,1])$ se seu fecho

é compacto ou equivalentemente, toda sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset B_{C^{0,\alpha}}$ possui subsequência convergente com relação $\|\cdot\|_\infty$.

Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sequência. Vamos usar o Teorema o Teorema de Ascoli-Arzelá. Note que

$$\|f_n\|_\infty + [f_n]_{C^{0,\alpha}} = \|f_n\|_{C^{0,\alpha}} < 1, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Portanto, temos duas estimativas

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\|_\infty \leq 1, \quad \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|^\alpha \quad \forall\, x, y \in [0,1].$$

A primeira estimativa implica que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente limitada. Asegunda estimativa implica que a sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente equicontínua (para todo $\epsilon > 0$, seja $\delta \colon = \epsilon^{1/\alpha} > 0$. Então se $|x-y| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| \leq |x-y|^\alpha < \delta^\alpha = \epsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$). Portanto, pelo teorema de Ascoli-Arzelá $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente. Logo, $B_{C^{0,\alpha}}$ é relativamente compacto em $C([0,1])$.

b) Seja $f \in C^1([0,1])$ e seja $x, y \in [0,1]$ pontos distintos. Segue do Teorema do Valor médio que existe θ entre x e y tal que $f(x) - f(y) = f'(\theta) \cdot (x-y)$. Em particular, segue que

$$|f(x) - f(y)| = |f'(\theta)| \cdot |x-y| \leq \|f'\|_\infty \cdot |x-y|.$$

Ademais, pelo Teorema fundamental do cálculo,

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)\, dt \right| \leq \int_y^x |f'(t)| dt \leq \|f'\|_\infty . (x-y)$$

para $x > y$. De qualquer forma, isto implica que $f \in C^{0,1}([0,1])$ com $|f|_{C^{0,1}} \leq \|f'\|_\infty$. Portanto, concluímos que

$$\|f\|_{C^{0,1}} = \|f\|_\infty + [f]_{C^{0,1}} \leq \|f\|_\infty \|f'\|_\infty = \|f\|_{C^1}. \tag{12}$$

Agora escolha $f \in B_{C^1}$. Então segue de (12) que $f \in B_{C^{0,1}}$. Portanto, concluímos que $B_{C^1} \subset B_{C^{0,1}}$. Pelo item a), mostramos que $B_{C^{0,1}}$ é relativamente compacto em $C([0,1])$ segue que B_{C^1} é relativamente compacto em $C([0,1])$ (Aqui usamos o seguinte fato: Seja (X,d) um espaço métrico e $B \subset X$ relativamente compacto. Então todo subconjunto $A \subset B$ é também relativamente compacto.)

c) O resultado segue dos itens a) e b). $\blacksquare$