CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

1 de Março de 2023

Candidato: ____

Questão 1. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{vol(B_r(x_0))} \int_{B_r(x_0)} f(x)\, dx = f(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Questão 2. Seja $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um transformação linear. Prove que:

$$\text{Traço}(M) = \frac{n}{\varepsilon^2 \cdot \text{Area}(\partial B_\varepsilon(0))} \int_{\partial B_\varepsilon(0)} \langle Mx, x\rangle d\sigma$$

Sugestão: Utilize o Teorema da Divergência e lembre que

$$\text{Area}(\partial B_\varepsilon(0)) = \varepsilon^{n-1} \cdot \text{Area}(\partial B_1(0)) = \varepsilon^{n-1} \cdot n \cdot \text{Volume}(B_1(0))$$

Questão 3. Uma função $f\colon X \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é dita localmente Lipschitz se para todo $x \in X$, existe uma vizinhança V_x de x em X e uma constante $K_x > 0$ (que depende de x) tal que

$$|f(z) - f(w)| \leq K_x \cdot |z - w|, \quad \forall z, w \in V_x$$

No caso em que existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(z) - f(w)| \leq K \cdot |z - w|, \quad \forall z, w \in X,$$

dizemos que f é globalmente Lipschitz. Prove que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é compacto então toda função localmente Lipschitz é globalmente Lipschitz.

Questão 4. Seja $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Prove que f é convexa se e somente se, $D^2u(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (i.e, a matriz Hessiana é não negativa (no sentido da Algebra Linear) em todos os pontos)

Questão 5. Seja $\Sigma := \{M \subset \mathbb{R}^{n^2}; M$ é matriz simetrica de ordem n e $det(M) = 1\}$. Prove que Σ é uma hipersuperfćie em $\mathbb{R}^{n^2}$ e determine o espaço tangente a matriz identidade $I \in \Sigma$.

Questão 6. Seja $M\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ um transformação linear e consideremos a forma quadrática $Q_M(x) := \langle Mx, x\rangle$ definida para $x \in \mathbb{R}^n$. Sejam

$$\alpha = \min_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} Q_M(x), \quad \beta = \max_{x\in\mathbb{S}^{n-1}} Q_M(x).$$

Prove que α e β são respectivamente o menor e o maior auto-valor de M.