UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Análise no $\mathbb{R}^n$

(com resoluções)

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

29 de Outubro de 2021

Início: 14:00
Fim: 18:00

Candidato(a): ____

Resolva as 6 questões abaixo. Justifique as suas afirmações rigorosamente, citando os teoremas utilizados sempre que necessário.

Questão 1. Mostre que a aplicação $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{S}^n$ definida por $f(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$ é uma aplicação aberta.

Solução. Se $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ e $r > 0$, denote por $B(u, r)$ a bola aberta centrada em u de raio $r > 0$. Portanto, dado $\varepsilon > 0$, basta mostrar que

$$f\big(B(x,\varepsilon)\big) \supseteq f\big(B(x,\varepsilon) \cap \{y : ||y|| = ||x||\}\big) \supseteq B\big(f(x), \varepsilon/\|x\|\big).$$

$\square$

Questão 2. Seja $(u_n)_n$ uma sequência em $\mathbb{R}^m$ com a propriedade: para toda sequência crescente $(\kappa_i) \subset \mathbb{N}$, o limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_{\kappa_i}$$

existe e é finito. Mostre que a sequência $(u_n)_n$ é limitada e, portanto, possui subsequência convergente.

Solução. Suponha que $(u_n)_n$ não seja limitada.

Então existe $\kappa_1 \geq 1$ tal que $\|u_{\kappa_1}\| \geq 1$.

Também existe $\kappa_2 > \kappa_1$ tal que $\|u_{\kappa_2}\| \geq 1^2 + \|u_{\kappa_1}\|$

Pelo mesmo motivo, existe $\kappa_3 > \kappa_2$ tal que $\|u_{\kappa_3}\| \geq 2^2 + \left\|u_{\kappa_1} + u_{\kappa_2}\right\|$

$\vdots$

Prosseguindo assim indutivamente, deduzimos que existe uma sequência cresecente $(\kappa_i)_i \subseteq \mathbb{N}$ tal que

$$\|u_{\kappa_i}\| \geq (i-1)^2 + \left\| \sum_{j=1}^{i-1} u_{\kappa_j} \right\| \quad \forall\, i \geq 2.$$

Com isso, podemos concluir que para todo $N \in \mathbb{N}$ vale:

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} u_{\kappa_i} \right\| &= \frac{1}{N} \left\| u_{\kappa_N} + \sum_{i=1}^{N-1} x_{\kappa_i} \right\| \\
&\geq \frac{1}{N} \left(\|u_{\kappa_N}\| - \left\| \sum_{i=1}^{N-1} u_{\kappa_i} \right\| \right) \\
&\geq \frac{1}{N} \left(N^2 + \left\| \sum_{j=1}^{N-1} u_{\kappa_j} \right\| - \left\| \sum_{i=1}^{N-1} u_{\kappa_i} \right\| \right) \\
&\geq N,
\end{aligned}$$

contradizendo a hipótese. $\square$

Questão 3. Seja $\alpha\colon I \to \mathbb{S}^2$ uma curva regular de classe C^2 parametrizada pelo comprimento de arco (ou seja, $\|\alpha'(s)\| = 1, \forall\, s \in I$) definida em um intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$. Mostre que $\kappa_\alpha(s) \geq 1$ para todo $s \in I$, onde $\kappa_\alpha(s) = ||\alpha''(s)||$ é a função curvatura de α.

Solução. Note que $\alpha(I) \subseteq \mathbb{S}^2$ implica $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$. Derivando uma vez, obtem-se $\langle \alpha' \,,\, \alpha \rangle = 0$. Derivando novamente, tem-se

$$\langle \alpha'', \alpha \rangle + \langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$$

Usando Cauchy-Schwarz, segue que:

$$1 = \|\alpha'\|^2 = \langle \alpha' \,,\, \alpha' \rangle = -\langle \alpha'' \,,\, \alpha \rangle \leq \|\alpha''\| \cdot \|\alpha\| = \kappa_\alpha.$$

$\square$

Questão 4. Seja $U \subset \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ o conjunto das matrizes simétricas positivas de tamanho $n \times n$, ou seja, $A = [a_{ij}]$ com $a_{ij} = a_{ji}$ e $\langle Ax, x\rangle > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Prove que U é aberto em $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ e que a aplicação $f(A) = A^2$, definida para toda $A \in U$ é um difeomorfismo local com imagem contida em U.

Nota: neste problema estamos considerando a identificação natural do espaço euclideano $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ com o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^{n^2}$ formado pelas matrizes simétricas.

Solução. Considere a aplicação contínua $T : \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}} \times S^{n-1} \to \mathbb{R}$ definida por

$$T(A, x) = \langle Ax, x\rangle.$$

Para cada $A \in U$, a compacidade de S^{n-1} e o fato de A ser positiva implicam que existe $\varepsilon > 0$ tal que $T(A, x) \geq \varepsilon$, para todo $x \in S^{n-1}$.

A continuidade de T e a compacidade de S^{n-1} mais uma vez implicam que existe $\delta > 0$ tal que $T(B, x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$, para todos $||A - B|| < \delta$ e $x \in S^{n-1}$. Mostrando assim que U é aberto.

Considere agora $f(A) = A^2$. Observe que

$$f'(A) \cdot V = AV + VA, \text{ para todo } V \in \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Afirmamos que $f'(A)$ é isomorfismo, para todo $A \in U$. Basta mostrar que se $f'(A) \cdot V = 0$, então $V = 0$. De fato, assuma $AV = -VA$. Como A é simétrica, o teorema espectral implica que existe uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ formada de autovetores de A. Seja w autovetor unitário de A com autovalor λ. Observe que

$$A(Vw) = -V(Aw) = -V(\lambda w) = -\lambda(Vw).$$

A positividade de A nos leva à seguinte contradição:

$$0 < \langle A(Vw), Vw\rangle = -\lambda||Vw||^2 = -\langle Aw, w\rangle||Vw||^2 < 0.$$

Sendo $f'(A)$ isomorfismo para todo $A \in U$, o teorema da aplicação inversa garante que f é difeomorfismo local sobre a sua imagem.

Resta mostrar que $f(U) \subset U$. De fato, toda $A \in U$ é simétrica e $Ax \neq 0$ para $x \neq 0$. Portanto, A^2 é simétrica $(A^2)^T = (A^T)^2 = A^2$ e

$$\langle A^2x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle > 0, \text{ para todo } x \neq 0.$$

□

Questão 5. (a) Sejam $f : Q \to \mathbb{R}$ uma função integrável definida no bloco $Q \subset \mathbb{R}^n$ tal que $f(Q) \subset [0,1]$ e $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Prove que a função composta $g \circ f$ é integrável.

(b) Determine se o resultado do item (a) deste problema continua válido se a função $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ for meramente integrável.

Solução. (a) Primeiramente, observamos que o conjunto $D_{g\circ f}$ dos pontos de descontinuidade de $g \circ f$ está contido em na união $D_f \cup f^{-1}(D_g)$ das descontinuidades de f com a pré-imagem do conjunto de descontinuidades de g. Em seguida, observamos que D_g é vazio, pois g é contínua. O teorema de Lebesgue e o fato de que f é integrável no bloco Q garantem que D_f tem medida nula. Portanto, $D_{g\circ f} \subset D_f$ também tem medida nula. Aplicando novamente o teorema de Lebesgue, concluímos que $g \circ f$ é integrável.

(b) O resultado do item (a) não é válido com a hipótese de g ser meramente integrável. Considere o exemplo a seguir. Seja $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ uma enumeração de Q, e defina as funções $f, g : \mathbb{R} \to [0,1]$ pelas seguintes relações:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{k}, & \text{se } x = \varphi(k) \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad \text{e} \quad g(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

As duas funções definidas acima são integráveis em qualquer intervalo fechado, pois seus conjuntos de descontinuidades têm medida nula. De fato, $D_f = \mathbb{Q}$ é enumerável e $D_g = \{0\}$ tem um único ponto. Por outro lado, a composta é descontínua em todos os pontos, pois

$$(g \circ f)(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

□

Questão 6. Seja $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^2. Sobre essa função, resolva:

(a) Prove que, para todo $x \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, temos

$$\frac{d}{dr}\left(\int_0^{2\pi} u(x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta))d\theta\right) = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} d\theta,$$

onde $x = (x_1, x_2)$, $\frac{\partial u}{\partial x_1}$ e $\frac{\partial u}{\partial x_2}$ representam as derivadas parciais da função u, as quais são calculadas no ponto $x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ na integral.

(b) Neste item, suponha que u seja harmônica, ou seja, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$. Prove que o valor da expressão a seguir é independente de $r > 0$:

$$\frac{1}{r}\int_{C(x,r)} u(y)ds(y),$$

onde ds é a forma comprimento de arco do círculo.

Solução. (a) Considere a função $f : (0, +\infty) \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(r, \theta) = u(x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta))$. A regra da cadeia fornece

$$\frac{\partial f}{\partial r}(r, \theta) = \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1}(x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)) + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2}(x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)).$$

Além disso, como u é de classe C^2, temos que $\frac{\partial f}{\partial r}$ é contínua em $(0, +\infty) \times [0, 2\pi]$ e, portanto, podemos aplicar o teorema de derivação sob o sinal de integral de Leibniz para concluir a demonstração.

(b) Usamos o teorema de mudança de variáveis, $y = x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$, para escrever

$$\int_{C(x,r)} u(y)ds(y) = \int_0^{2\pi} u(x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta))r d\theta.$$

Passando o fator r para o lado esquerdo da igualdade, derivando e usando o resultado do item (a), conclui-se:

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int_{C(x,r)} u(y)ds(y)\right) = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} d\theta.$$

Em seguida, aplicamos o teorema da divergência ao campo gradiente, ∇u, no disco $D(x, r)$ de centro x e raio r:

$$\int_{D(x,r)} div(\nabla u)dy = \int_{C(x,r)} \langle \nabla u, \mathbf{n}\rangle ds = \int_0^{2\pi} \cos\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \operatorname{sen}\theta \cdot \frac{\partial u}{\partial x_2} d\theta,$$

onde $\mathbf{n}$ representa o campo de vetores unitários normais apontando para fora de $D(x, r)$, ou seja, $\mathbf{n}(y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$ sempre que $y = x + r(\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)$. Com isto, concluímos que

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\int_{C(x,r)} u(y)ds(y)\right) = \int_{D(x,r)} div(\nabla u)dy = 0,$$

pois

$$div(\nabla u) = div\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) = 0.$$

□