UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção - Mestrado: Prova Espelho `2023.1`

1. Seja $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ a sequência definida por:

$$x_n = \begin{cases} 1, & se\ 1 \leq n \leq 1000; \\ \dfrac{2}{n}, & se\ n > 1000. \end{cases}$$

   (a) Prove que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é convergente e calcule seu limite L.

   (b) Dado $\varepsilon = \dfrac{1}{400}$ encontre o menor $m \in \mathbb{N}$ tal que se $n > m$ então

$$x_n \in (L - \varepsilon, L + \varepsilon).$$

Demonstração.

   (a) Como $x_n = \frac{2}{n}$ para todo n suficientemente grande, temos

$$L = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = 0$$

   (b) Por um lado, se $n \leq 1000$, temos $x_n = 1 \notin (-\frac{1}{400}, \frac{1}{400})$. Por outro, $n \geq 1001$, $0 \leq x_n = \frac{2}{n} \leq \frac{2}{1000} = \frac{1}{500}$. Em particular, $x_n \in (-\frac{1}{400}, \frac{1}{400})$.

$\square$

2. Sejam $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ uma sequência de números reais monótona, crescente e limitada. Prove que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ é convergente.

Demonstração. Como a sequência é limitada, segue que o conjunto X formado pelos valores da sequência é um conjunto limitado. Em particular, este conjunto possui um supremo $M := \sup M < \infty$. Vamos mostrar que a sequência converge para M. Seja $\epsilon > 0$ um número real qualquer. Como M é supremo de X, existe $x \in X$ tal que $M - \epsilon < x \leq M$. Por definição de X, existe $n_0 \geq 1$ tal que $x = x_{n_0}$. Como a sequência é crescente, temos que para todo $n \geq n_0$,

$$M - \epsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq M.$$

Em particular, para todo $n \geq n_0$, $|x_n - M| < \epsilon$. Como ϵ foi tomado de forma arbitrária, temos que, de fato, $\lim_{n\to\infty} x_n = M$. □

3. Seja $f : [a, b] \to [a, b]$ uma função contínua. Mostre que f possui um ponto fixo. Isto é, existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Note que se $f(a) = a$ ou $f(b) = b$ não há nada a provar. Caso contrário, como $f(x) \in [a, b]$ devemos ter $f(a) > a$ e $f(b) < b$. Defina então uma função auxiliar $g(x) = f(x) - x$. Como f e a função identidade são contínuas, é claro que g é uma função contínua. Além disso, temos $g(a) > 0$ e $g(b) > b$. Portanto, pelo teorema do valor intermediário, existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$. Ou seja, $f(c) = c$ □

4. Seja $f : [0, +\infty)$ uma função contínua tal que

$$\lim_{x\to\infty} [f(x + 1) - f(x)] = L.$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = L$

Demonstração. Dado ϵ, existe a tal que para todo $x \geq a$ temos

$$L - \epsilon \leq f(x + 1) - f(x) \leq L + \epsilon.$$

Como f é contínua, f é limitada no interalo $[a, a+1]$. Seja $M = \sup_{x\in[a,a+1]} |f(x)|$. Agora, dado $x > a+1$, seja N o único inteiro ≥ 1 tal que $a \leq x - N \leq a+1$. Em particular, temos que $|f(x-N)| \leq M$. Segue do que vimos acima que

$$L - \epsilon < f(x) - f(x-1) < L + \epsilon, \ \ldots, \ L - \epsilon < f(x-N+1) - f(x-N) < L + \epsilon.$$

Somando essas igualdades, obtemos

$$NL - N\epsilon < f(x) - f(x-N) < NL + N\epsilon.$$

Por um lado temos

$$f(x) \leq NL + N\epsilon + M \leq xL + x\epsilon + M \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - L \leq \epsilon + \frac{M}{x}.$$

Por outro

$$f(x) \geq NL - N\epsilon - M \geq xL - (a+1)L - x\epsilon + M \Rightarrow \frac{f(x)}{x} - L \geq -\epsilon - \frac{M + (a+1)L}{x}.$$

Fazendo $x \to \infty$, concluímos $\square$

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função diderenciável em $a \in \mathbb{R}$.

   (a) Mostre que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h} = f'(a)$.

   (b) Dado $a \in \mathbb{R}$, encontre uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que o limite $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a-h)}{2h}$ existe mas f não é diferenciável no ponto a.

Demonstração. (a) Como f é diferenciável, segue que

$$f'(a) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h\to\infty} \frac{f(a) - f(a-h)}{h}.$$

Donde,

$$2f'(a) = \lim_{h\to\infty} \frac{f(a+h) - f(a-h)}{h}.$$

(b) Seja $f(x) = |x-a|$. É fato conhecido que f não é diferenciável em $x = a$ pois $\lim_{h\to 0^+} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = 1$ e $\lim_{h\to 0^-} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = -1$. Por outro lado,

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a-h)}{2h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|-|h|}{2h} = 0.$$

□

6. Sejam $A = \begin{pmatrix} 0 & t \\ -t & 0 \end{pmatrix}$, com $t \in \mathbb{R}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) Mostre que para $k \in \mathbb{Z}$ com $k \geq 0$ valem:
$A^{4k} = t^{4k} I$; $A^{4k+1} = t^{4k+1} J$; $A^{4k+2} = -t^{4k+2} I$ e $A^{4k+3} = -t^{4k+3} J$.

(b) Conclua que $I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots + \frac{1}{(2n)!}A^{2n} = p_{2n}^{\cos}(t)I + p_{2n-1}^{\text{sen}}(t)J$, onde $p_{2n}^{\cos}(t)$ denota o polinômio de Taylor de ordem $2n \in \mathbb{N}$ de $\cos t$ enquanto que $p_{2n-1}^{\text{sen}}(t)$ denota o polinômio de Taylor de ordem $2n-1$ da função $f(t) = \operatorname{sen} t$.

Demonstração. (a) Começamos observando que $J^2 = -I$. Assim,

$$A = tJ \Rightarrow A^2 = -t^2 I \Rightarrow A^4 = t^4 I.$$

Deste modo, é fácil ver que

- $A^{4k} = (A^4)^k = t^{4k} I^k = t^{4k} I$
- $A^{4k+1} = A^{4k}.A = t^{4k} I.tJ = t^{4k+1} J$
- $A^{4k+2} = A^{4k}.A^2 = t^{4k} I.(-t^2 I) = -t^{4k+2} I$
- $A^{4k+2} = A^{4k+2}.A = -t^{4k+2} I.tJ = -t^{4k+3} J$

(b) usando o item (a), temos que

$$\begin{aligned} I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 \cdots + \frac{1}{(2n)!}A^{2n} &= I + tJ - \frac{1}{2!}t^2 I - \frac{1}{3!}J + \cdots + \frac{1}{(2n)!}(-1)^n t^{2n} I \\ &= p_2 n(t) I + p_{2n-1}(t) J, \end{aligned}$$

onde

$$\begin{cases} p_{2n}(t) = 1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!}, \\ p_{2n-1}(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \end{cases}$$

que são exatamente os polinômios de Talyor de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$.

□

7. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ a função definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x, \ se \ 0 \leq x \leq 1; \\ 1 + x, \ se \ -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

   (a) Prove que f é contínua mas não derivável.

   (b) Encontre uma primitiva $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ de f de classe $\mathcal{C}^1\big([-1, 1]\big)$. Podemos encontrar F de classe $\mathcal{C}^2\big([-1, 1]\big)$?

Demonstração. (a) Como f é dad por um polinômio em todo ponto $x \neq 0$, f é contínua e derivável em todos esses pontos. Em $x = 0$, temos

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 1.$$

Logo, f é contínua em também em $x = 0$. Por outro lado,

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = -1 \neq 1 = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(h) - f(0)}{h}.$$

Portanto, f não é derivável em $x = 0$.

(b) Como F é contínua, obter uma primitiva de f fazendo

$$F(x) := \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x - \frac{x^2}{2}, \ \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ x + \frac{x^2}{2}, \ \text{se } -1 \leq x < 0. \end{cases}$$

F é de classe $\mathcal{C}^1$ pois $F' = f$ e como já vimos, f é contínua. Não seria possível tomar F de classe $\mathcal{C}^2$ pois isso implicaria que f é derivável. O que não é verdade.

$\square$

8. Consideremos uma sequência $\big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots\big)$ de números reais tais que $x_k \in \{2, 3, 4\}$. Pondo $x = \big(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n, \ldots\big)$ considere

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{5^k}.$$

   (a) Prove que f é bem definida, ou seja, a série é convergente.

(b) Encontre o menor intervalo real $[a, b]$ tal que $a \leq f(x) \leq b$.

(c) Encontre x e y tais que $f(x) = a$ e $f(y) = b$.

Demonstração. (a) Note que para toda sequência $(x_k)_k$ como no enunciado temos

$$\left|\frac{x_k}{5^k}\right| \leq \frac{4}{5^k}.$$

Além disso, a série $\sum_{k\geq 1} \frac{4}{5^k}$ converge (pelo critério da razão, por exemplo). Portanto, a série $\sum_{k\geq 1} \frac{x_k}{5^k}$ converge pelo critério da comparação e assim, $f(x)$ é bem definida.

(b) e (c) Temos que para todo $N \geq 1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{2}{5^n} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{x_k}{5^n} \leq \sum_{k=1}^{N} \frac{4}{5^n}.$$

Fazendo $N \to \infty$ e utilizando a fórmula da soma de uma série geométrica, tem-se que

$$\frac{1}{2} = 2\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} \leq f(x) \leq 4\frac{\frac{1}{5}}{1 - \frac{1}{5}} = 1.$$

Nota-se que as desigualdades acima são estritas pois, temos

$$f(2, 2, \ldots, 2, \ldots) = 1/2, \quad f(4, 4, \ldots, 4, \ldots) = 1.$$

$\square$