UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção 2023 - Doutorado

PGMAT - **UFC**

7 de fevereiro de 2023

Candidato: ____

Importante:

1. Apresente suas soluções de forma clara e organizada.
2. Os argumentos devem ser cuidadosamente justificados para serem elegíveis a pontuação.

Questão 1. Prove que uma função $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ é diferenciável no ponto $a \in \mathbb{R}^m$ se, e somente se, existe uma aplicação $A : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$ satisfazendo as duas condições a seguir:

- $f(a+h) - f(a) = A(h) \cdot h$, para todo $h \in \mathbb{R}^m$;
- A é contínua no ponto $h = 0$.

Prova. Inicialmente, admitamos a existência da aplicação $A : \mathbb{R}^m \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$. Neste caso, para cada $v \in \mathbb{R}^m$, temos que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{A(tv) \cdot (tv)}{t} = \lim_{t\to 0} A(tv) \cdot v = A(0) \cdot v,$$

ou seja, vale $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = A(0) \cdot v$. Escrevendo

$$f(a+h) - f(a) = A(0) \cdot h + r(h),$$

com resto $r(h) = [A(h) - A(0)] \cdot h$, observamos que $|r(h)| \leq \|A(h) - A(0)\| \cdot |h|$ e concluímos que $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, uma vez que $\lim_{h\to 0} \|A(h) - A(0)\| = 0$. Isto significa que f é diferenciável em a, com $f'(a) \cdot v = A(0) \cdot v$, para todo $v \in \mathbb{R}^n$.

Reciprocamente, a partir da existência de $f'(a)$ e da função $r(h)$ tal que $f(a+h) - f(a) = f'(a) \cdot h + r(h)$, com $\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0$, definimos

$$A(h) \cdot v = \begin{cases} f'(a) \cdot v + \frac{\langle h,v\rangle}{|h|^2} \cdot r(h) & \text{se} \quad h \neq 0 \\ f'(a) \cdot v & \text{se} \quad h = 0 \end{cases}$$

e observamos que:

- $A(h) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m; \mathbb{R}^n)$, para todo $h \in \mathbb{R}^m$;
- $A(h) \cdot h = f'(a) \cdot h + r(h) = f(a+h) - f(a)$, para todo $h \in \mathbb{R}^m$;
- $\big|[A(h) - A(0)] \cdot v\big| = \big|\frac{\langle h,v\rangle}{|h|^2} \cdot r(h)\big| \leq \frac{|r(h)|}{|h|} \cdot |v|$, para quaisquer $h, v \in \mathbb{R}^n$, com $h \neq 0$, implica $\|A(h) - A(0)\| \leq \frac{|r(h)|}{|h|}$, garantido a continuidade de A na origem $0 \in \mathbb{R}^m$.

$\square$

Questão 2. Seja $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe C^1, com $\langle f'(x) \cdot v, v\rangle \geq 2023 \cdot |v|^2$, para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$. Prove que f é um difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$ sobre si mesmo.

Prova. Para cada $x \in \mathbb{R}^n$, tem-se que $f'(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é um isomorfismo, pois $f'(x) \cdot v = 0$ implica $|v|^2 \leq \frac{1}{2023}\langle f'(x) \cdot v, v\rangle = 0$, donde $v = 0$. Pelo teorema da aplicação inversa, f é um difeomorfismo local e, consequentemente, $f(\mathbb{R}^n)$ é um conjunto aberto, uma vez que f é uma aplicação aberta.

Para completar a demonstração, vamos mostrar que f é uma aplicação injetiva e fechada. Ora, fixados $x, y \in \mathbb{R}^n$, consideremos a função real $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por $\varphi(t) = \langle f((1-t)x + ty), y - x\rangle$. Tem-se que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \langle f(y) - f(x), y - x\rangle.$$

Mas, pelo teorema do valor médio, existe $c \in (0,1)$ tal que

$$\varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) = \langle f'((1-c)x + cy) \cdot (y - x), y - x\rangle.$$

Daí, obtemos

$$\begin{aligned} |y - x|^2 &\leq \frac{1}{2023}\langle f'((1-c)x + cy) \cdot (y - x), y - x\rangle = \frac{1}{2023}\langle f(y) - f(x), y - x\rangle \\ &\leq \frac{1}{2023}|\langle f(y) - f(x), y - x\rangle| \leq \frac{1}{2023}|f(y) - f(x)| \cdot |y - x|, \end{aligned}$$

donde $|f(x) - f(y)| \geq 2023 \cdot |x - y|$. Visto que x e y foram fixados de modo arbitrário, a última desigualdade acima vale para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}^n$, garantindo, assim, a injetividade da função f, que, agora, passa a ser um difeomorfismo global sobre $f(\mathbb{R}^n)$. Vamos concluir que f é fechada a partir dessa mesma desigualdade. Com efeito, se $K \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado e $y \in \overline{f(K)}$, então $y = \lim_{i\to\infty} f(x_i)$, para alguma sequência $(x_i) \subset K$. A desigualdade acima nos dá a estimativa

$$|x_i - x_j| \leq \frac{1}{2023}|f(x_i) - f(x_j)|,$$

que implica que (x_i) é uma sequência de Cauchy em K, uma vez que $f(x_i)$ é convergente (logo, de Cauchy) em $\mathbb{R}^n$. Sendo (x_i) convergente e K fechado, existe $\lim_{i\to\infty} x_i = x \in K$, valendo $f(x) = f(\lim x_i) = \lim f(x_i) = y$. Portanto $y \in f(K)$ e $\overline{f(K)} = f(K)$. Em particular, $f(\mathbb{R}^n)$ é fechado.

Dessa forma, $f(\mathbb{R}^n)$ é aberto e fechado em $\mathbb{R}^n$, que é conexo e, consequentemente, $f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$. □

Questão 3. Seja $f : U \to \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável no aberto conexo $U \subset \mathbb{R}^n$. Demonstre que f'' é constante se, e somente se, existe uma forma bilinear simétrica $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ e um escalar $d \in \mathbb{R}$, de modo que $f(x) = \frac{1}{2}B(x,x) + \langle c, x\rangle + d$.

Prova. Admitindo que $f(x) = \frac{1}{2}B(x,x) + \langle c, x\rangle + d$, para todo $x \in U$, tem-se que

$$\begin{aligned} f'(x) \cdot v &= B(x,v) + \langle c, v\rangle, \\ f''(x)(v,w) &= B(v,w), \end{aligned}$$

para quaisquer $v, w \in \mathbb{R}^n$, mostrando que f'' é constante.

Reciprocamente, partindo agora da hipótese de que f'' é constante, façamos $B = f''(0)$. Considerando a função $\varphi : U \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$, dada por

$$\varphi(x) \cdot v = f'(x) \cdot v - B(x,v),$$

temos que $\varphi'(x)(v,w) = f''(x)(v,w) - B(v,w) = 0$, ou seja, $\varphi'(x) = 0$, para todo $x \in U$. Sendo U conexo, φ é uma função constante, ou seja, existe um vetor $c \in \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi(x)\cdot v = \langle c, v\rangle$, para quaisquer $x, v \in \mathbb{R}^n$. Considerando, agora, a função $\psi : U \to \mathbb{R}$, dada por

$$\psi(x) = f(x) - \frac{1}{2}B(x,x) - \langle c, x\rangle,$$

temos que $\psi'(x)\cdot v = f'(x)\cdot v - B(x,v) - \langle c, v\rangle = 0$, ou seja, $\psi'(x) = 0$, para todo $x \in U$. Sendo U conexo, ψ é constante, ou seja, existe um escalar $d \in \mathbb{R}$ tal que $\psi(x) = d$, para todo $x \in U$. Isto conclui a prova. $\square$

Questão 4. Sejam c e α reais positivos dados e Q um quadrado no plano, também dado. Prove que não existe função sobrejetiva $f : [0,1] \to Q$ tal que, para todos $0 \leq x, y \leq 1$, tenhamos

$$||f(x) - f(y)|| \leq c|x-y|^{\alpha+1/2},$$

em que $||\cdot||$ denota a norma euclidiana em $\mathbb{R}^2$.

Prova. Suponha que exista uma tal função. Sejam $k > 1$ inteiro e $x_j = \frac{j}{k}$, para $0 \leq j \leq k$. Dado um real $x \in [x_j, x_{j+1}]$, temos $|x - x_j| \leq \frac{1}{k}$, logo,

$$||f(x) - f(x_j)|| \leq c|x - x_j|^{\alpha+1/2} \leq \frac{c}{k^{\alpha+1/2}}.$$

Portanto, sendo C_j o disco do plano com centro $f(x_j)$ e raio $\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}$, segue que

$$x \in [x_j, x_{j+1}] \Rightarrow f(x) \in C_j.$$

Então,

$$Q = f([0,1]) \subset C_0 \cup C_1 \cup \ldots \cup C_{k-1},$$

o que implica ($A(F)$ denota a área da figura F)

$$A(Q) = A\left(\bigcup_{j=0}^{k-1} C_j\right) \leq \sum_{j=0}^{k-1} A(C_j) = k\pi\left(\frac{c}{k^{\alpha+1/2}}\right)^2 = \frac{\pi c^2}{k^{2\alpha}}.$$

Mas, como $\alpha > 0$ e $k > 1$ é arbitrário, chegamos a uma contradição, uma vez que a relação $k^{2\alpha} \leq \frac{\pi c^2}{A(Q)}$ não é verdadeira para k suficientemente grande. $\square$

Questão 5. Seja $B \subset \mathbb{R}^3$ a bola fechada unitária de $\mathbb{R}^3$, centrada na origem. Calcule o valor da integral $\int_B \frac{x_1^2}{|x|^4} dx$, em que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e dx denota o elemento de volume usual de $\mathbb{R}^3$.

Solução. O teorema de mudança de variáveis garante que

$$\int_B \frac{x_1^2}{|x|^4} dx = \int_B \frac{x_2^2}{|x|^4} dx = \int_B \frac{x_3^2}{|x|^4} dx := I.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} 3I &= \int_B \frac{x_1^2}{|x|^4} dx + \int_B \frac{x_2^2}{|x|^4} dx + \int_B \frac{x_3^2}{|x|^4} dx \\ &= \int_B \frac{|x|^2}{|x|^4} dx = \int_B \frac{1}{|x|^2} dx. \end{aligned}$$

Agora, considere em B as coordenadas esféricas $r = |x|$ e $\omega = \frac{x}{|x|} \in \mathbb{S}^2$. Sendo $d\sigma$ o elemento de área de $\mathbb{S}^2$, segue dos teoremas de mudança de variáveis e de Fubini que

$$3I = \int_{\mathbb{S}^2} \int_0^1 \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \, dr d\sigma = 4\pi.$$

$\square$

Questão 6. Sejam B a bola fechada unitária em $\mathbb{R}^3$, centrada na origem, e $\mathbb{S}^2 = \partial B$. Mostre que

$$\int_{\mathbb{S}^2} x_1^2 \cos x_1 \, d\sigma = \int_B (\cos x_1 - x_1 \sin x_1) \, dx,$$

em que $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ e $d\sigma$ e dx denotam os elementos de volume usuais de $\mathbb{S}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respectivamente.

Prova. Inicialmente, note que o campo normal unitário N em $\mathbb{S}^2$, que aponta para fora de B, é dado por $N(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, x_3)$. Portanto, sendo $f : B \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e $X(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 0, 0)$, temos

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle fX, N \rangle d\sigma = \int_{\mathbb{S}^2} f x_1^2 \, d\sigma.$$

Por outro lado, o teorema da divergência dá

$$\int_{\mathbb{S}^2} \langle fX, N \rangle d\sigma = \int_B \operatorname{div}(fX) dx = \int_B \frac{\partial}{\partial x_1}(f x_1) dx = \int_B \left(f + x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \right) dx.$$

A igualdade do enunciado é o caso particular $f(x_1, x_2, x_3) = \cos x_1$. $\square$

Questão 7. Mostre que o conjunto $SL(n; \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2};\ \det X = 1\}$ é uma hipersuperfície suave de $\mathbb{R}^{n^2}$, com plano tangente na identidade igual a $T_{I_n} SL(n; \mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2};\ \text{traço}(X) = 0\}$.

Prova. Se $GL(n;\mathbb{R}) = \{X \in \mathbb{R}^{n^2};\ \det X \neq 0\}$, a continuidade da função determinante garante que $GL(n;\mathbb{R})$ é um aberto de $\mathbb{R}^{n^2}$. Sendo $\Phi : GL(n;\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ dada por $\Phi(A) = \det(A)$, temos $SL(n;\mathbb{R}) = \Phi^{-1}(1)$. Portanto, basta mostrar que Φ é uma submersão. Para tanto, dados $A \in GL(n;\mathbb{R})$ e $X \in T_A GL(n;\mathbb{R}) \approx M(n;\mathbb{R})$, temos

$$\Phi_* X = \frac{d}{dt}\Phi(A+tX)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\det(A+tX)\Big|_{t=0}.$$

Sendo $A = (a_{ij})$ e $X = (x_{ij})$, a fórmula para a expansão de determinantes em função das entradas da matriz dá

$$\begin{aligned}
\det(A+tX) &= \det(a_{ij} + t x_{ij}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma)(a_{1j_1} + t x_{1j_1}) \dots (a_{nj_n} + t x_{nj_n}) \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1j_1} \dots a_{nj_n} \\
&\quad + \sum_k \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn}\sigma) a_{1j_1} \dots \hat{a}_{kj_k} \dots a_{nj_n} x_{kj_k} t + t^2 f(a_{ij}, x_{ij}, t) \\
&= \det A + t \sum_k \det(A_1 \dots X_k \dots A_n) + t^2 f(A, X, t),
\end{aligned}$$

em que $(A_1 \dots X_k \dots A_n)$ denota a matriz obtida de A, trocando sua k-ésima linha A_k pela k-ésima linha X_k de X. Portanto,

$$\begin{aligned}
d\Phi_A(X) &= \frac{d}{dt}(\det A + t \sum_k \det(A_1 \dots X_k \dots A_n) + t^2 f(A, X, t))\Big|_{t=0} \\
&= \sum_k \det(A_1 \dots X_k \dots A_n).
\end{aligned}$$

Em particular, sendo $A \in SL(n;\mathbb{R})$ e $X = \lambda A$, temos

$$d\Phi_A(X) = \sum_k \det(A_1 \dots \lambda A_k \dots A_n) = n\lambda \det A = n\lambda,$$

que pode assumir qualquer valor real. Agora, sabemos que

$$T_{I_n} SL(n;\mathbb{R}) = \{X \in M(n;\mathbb{R});\ d\Phi_{I_n}(X) = 0\}.$$

Fazendo $A = I_n$ na expressão obtida acima para $d\Phi_A(X)$, temos

$$d\Phi_{I_n}(X) = \sum_k \det((I_n)_1 \dots X_k \dots (I_n)_n) = \sum_k x_{kk} = \text{traço}(X).$$

Portanto,

$$T_{I_n} SL(n;\mathbb{R}) = \{X \in M(n;\mathbb{R});\ \text{traço}(X) = 0\}.$$

$\square$