UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS-DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Exame Preliminar de Doutorado - Prova de Geometria.
Curso: Doutorado em Matemática.
Data: 05/09/2022 - Horário: 14:00h-18:00h.

Faça os problemas a seguir, justificando todas as suas afirmações e explicitando os teoremas e propriedades que utilizar.

1. Nos dois itens a seguir, explicite a curva integral maximal do campo $V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^2)$, começando num ponto arbitrário $p \in \mathbb{R}^2$:

   (a) $V(x,y) = y\frac{\partial}{\partial x} - x\frac{\partial}{\partial y}$.

   (b) $V(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + (x+y)\frac{\partial}{\partial y}$.

2. Para $k, n \in \mathbb{N}$, com $0 < k < n$, seja $V_k(\mathbb{R}^n)$ o conjunto das k-uplas ordenadas de vetores ortonormais em $\mathbb{R}^n$. Arranjando os vetores em k colunas $n \times 1$, podemos ver $V_k(\mathbb{R}^n)$ como um subconjunto do espaço vetorial $M(n \times k; \mathbb{R})$ de todas as matrizes reais $n \times k$. Prove que $V_k(\mathbb{R}^n)$ é uma subvariedade mergulhada de $M(n \times k; \mathbb{R})$, de dimensão $k(2n-k-1)/2$. (Sugestão: considere a aplicação $\Phi : M(n \times k; \mathbb{R}) \to M(k \times k; \mathbb{R})$, dada por $\Phi(A) = A^\top A$, em que $A^\top$ denota a transposta da matriz A.)

3. Uma possível descrição da *garrafa de Klein* K é a seguinte: $K = \mathbb{R}^2/G$, onde G é o subgrupo do grupo de homeomorfismos de $\mathbb{R}^2$ gerado por f e g, onde

$$f(x,y) = (x, y+1) \quad \text{e} \quad g(x,y) = (x+1, 1-y).$$

   Calcule os grupos de cohomologia de De Rham de K.

4. Seja M uma variedade suave de dimensão n e seja α uma n-forma em M tal que $\alpha(p) \neq 0$, para todo $p \in M$. Mostre que para todo $q \in M$ existe uma carta coordenada $(x_1, \ldots, x_n) : U \to \mathbb{R}^n$ em torno de q tal que

$$\alpha|_U = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

5. Seja (M^n, g, ∇) uma variedade riemanniana com métrica $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ e conexão de Levi-Civita ∇. Um campo suave X em M é *conforme* se a derivada de Lie $\mathcal{L}_X g$ for um múltiplo de g e *fechado* se sua 1-forma metricamente dual ω_X (isto é, tal que $\omega_X(Y) = \langle X, Y \rangle$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$) for fechada. Prove que X é simultaneamente conforme e fechado se, e só se, existir $\psi \in C^\infty(M)$ tal que $\nabla_Y X = \psi Y$, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$.