UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Qualificação em Análise

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

01 de Setembro de 2022

Candidato: ____

Parte I

Questão 1. Seja $\{K_\delta\}_\delta$ uma aproximação da identidade. Se $f \in L_p(\mathbb{R}^n)$, onde $1 < p < +\infty$, prove que a convolução $f \star K_\delta$ converge para f em $L_p(\mathbb{R}^n)$ quando $\delta \to 0$.

Questão 2. Resolva os itens abaixo:

a) Considere a função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|x|^{n+\frac{1}{2}}}, & \text{if} \quad x \neq 0, \\ 0, & \text{if} \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostre que para cada $\delta > 0$ a função f é integrável em $B_\delta^c := \{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geq \delta\}$ e existe uma constante $C = C(n, \delta) > 0$ tal que

$$\int_{B_\delta^c} f(x)dx \leq C.$$

b) Existe uma função contínua e positiva $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que é integrável e $\limsup_{x\to\infty} f(x) = \infty$.

Questão 3. Dada $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ denote por $f^\star$ a sua função maximal. Mostre que:

a) $f^\star$ é mensurável.
b) Existe uma constante $C = C(n) > 0$ tal que

$$m\left(\{x \in \mathbb{R}^n : f^\star(x) > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda}\|f\|_1,$$

para todo $\lambda > 0$.

Questão 4. Se $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear invertível, assuma que

$$\int_{T(\mathbb{R}^n)} f(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(T(x))|\det T|\, dx,$$

para toda $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um função mensurável e periódica de período 1, isto é, $F(x+1) = F(x)$. Suponha que existe $C > 0$ tal que

$$\int_0^1 |F(x+c) - F(x+d)|dx \leq C,$$

para todo $c, d \in \mathbb{R}$. Prove que existe uma transformação linear invertível $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que

$$\int\int_{T^{-1}([0,2]\times[0,2])} |F(y+x) - F(y-x)|\, dxdy = 2\int\int_{[0,1]\times[0,1]} |F(y+x) - F(y-x)|\, dxdy \quad (1)$$

e use (1) para concluir que $F \in L^1([0,1])$.

Parte II

Questão 5. Para $1 \leq p < \infty$, seja ℓ_p o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty$, munido com sua norma usual. Agora suponha $1 < p < \infty$ e considere o espaço $E = \Big\{x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_1 \cap \ell_p : \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x_n = 0\Big\}$. Mostre que E é denso em ℓ_p.

Questão 6. Seja X um espaço de Banach. Um operador linear $T\colon X \to X$ é dito ser idempotente se $T^2 = T$, ou seja, $T(T(x)) = T(x)$ para todo $x \in X$. Mostre que:

(a) O operador linear $T\colon \ell_2 \to \ell_2$ definido por

$$T(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_1, 0, x_3, x_3, x_5, x_5, x_7, x_7, \dots)$$

é idempotente e calcule $\|T\|$.

(b) Se $T\colon X \to X$ é idempotente então T é limitado se, e somente se, ambos $R(T)$ e $N(T)$ são fechados, onde $R(T) := T(X)$ (a imagem de T) e $N(T)$ é o núcleo de T.

Questão 7. Seja X um espaço de Banach infinito-dimensional. Mostre que X é reflexivo e separável se, e somente se, X^* é reflexivo e separável.

Questão 8. Dados um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$ e um operador $T \in B(\mathcal{H})$, lembre que:

- o *resolvente* $\rho(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \mathbb{C}$ tais que $(T - \lambda I)$ é invertível;
- *espectro* $\sigma(T)$ é dado por $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$;
- e o *espectro pontual* $\sigma_p(T)$ é o conjunto dos $\lambda \in \sigma(T)$ tais que $T - \lambda I$ não é injetiva.

Seja $\ell_2(\mathbb{C})$ o espaço das sequências $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ de números complexos tais que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$. Para $x = (x_n)_{n=1}^{\infty} \in \ell_2(\mathbb{C})$, defina $\|x\|_2 = \big(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\big)^{1/2}$. Sabe-se que $(\ell_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|_2)$ é um espaço de Hilbert. Considere o operador linear $T\colon \ell_2(\mathbb{C}) \to \ell_2(\mathbb{C})$ definido por

$$T(x_1, x_2, \dots) = (\alpha_2 x_2, \alpha_3 x_3, \dots), \qquad \text{onde } (\alpha_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C} \setminus \{0\} \text{ é limitada.}$$

Suponha $|\alpha_i| > 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$ e seja $r = \sup_{n \in \mathbb{N}} |\alpha_n|$. Mostre que:

(a) Se $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0$ então T é compacto.

(b) $\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| < r\}$. (**Sgst.:** Em algum momento, use $x = (1, \frac{\lambda}{\alpha_1}, \frac{\lambda^2}{\alpha_1\alpha_2}, \frac{\lambda^3}{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}, \dots)$)

(c) $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon |\lambda| \leq r\}$.