UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
Processo Seletivo do Programa de Pós-Graduação em Matemática para o Nível de Mestrado
Edital Pgmat/ufc N. 02/2022

1) Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e de classe C^1 em (a,b). Suponha que $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a,b)$ e com igualdade somente em um ponto $c \in (a,b)$. Mostre que

(i) f é crescente;

(ii) f possui inversa f^{-1} derivável no conjunto $(f(a), f(b)) - \{f(c)\}$ com

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ onde } y = f(x) \neq f(c);$$

(iii) f^{-1} não é derivável em $f(c)$.

Solução:

(i) Para quaisqer x_1, x_2 tais que $a \leq x_1 < x_2 \leq c$, existe $\theta \in (x_1, x_2)$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\theta) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(x_2) > f(x_1).$$

Da mesma forma, moste-se que $f(x_2) > f(x_1)$, se $c \leq x_1 < x_2 \leq b$. No caso em que $a \leq x_1 \leq c < x_2 \leq b$, ou $a \leq x_1 < c \leq x_2 \leq b$, temos $f(x_1) \leq f(c) < f(x_2)$, ou $f(x_1) < f(c) \leq f(x_2)$. Portanto, $f(x_1) < f(x_2)$, sempre que $a \leq x_1 < x_2 \leq b$.

(ii) Pelo item anterior existe a inversa $f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a,b]$ e dados $x \neq c$, em (a,b), e k suficientemente pequeno, existe h tal que $f(x+h) = f(x) + k$ e, pela expansão de Taylor de f, temos que $k = f'(x)h + \mathcal{O}(h^2)$. Ou seja,

$$\frac{f^{-1}(f(x)+k) - f^{-1}(f(x))}{k} = \frac{h}{f'(x)h + \mathcal{O}(h^2)} = \frac{1}{f'(x) + \mathcal{O}(h)}$$

Logo, f^{-1} possui derivada em todo ponto $f(x)$, onde $x \neq c$, e

$$\left(f^{-1}\right)'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

(iii) Caso f^{-1} possuisse derivada em $f(c)$, então, utilizando a regra da cadeia na identidade $f^{-1}(f(x)) = x$, teríamos

$$\left(f^{-1}\right)'(f(c)).f'(c) = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 = 1$$

uma contradição. Logo, f^{-1} não possui derivada em $f(c)$.

2) Seja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} (x^2 + f(x)^2)f'(x) = 1 \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é menor que $1 + \pi/4$. **Solução**:

Temos

$$f'(x) = \frac{1}{x^2 + f(x)} > 0,$$

logo, uma função crescente, o que implica, $f(x) > f(1) = 1$ para todo $x > 1$. Logo,

$$f'(x) \leq \frac{1}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad f(x) - f(1) \leq \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt < \int_1^\infty \frac{1}{1+t^2}\, dt = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq 1 + \frac{\pi}{4}$$

Além disso, como f é monótona crescente, existe o limte $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

3) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência numérica tal que $a_n > 0$, para todo $n \geq 1$, e $\lim\,(a_{n+1}/a_n) < 1$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p\, a_n}$$

é divergente para todo $p \in \mathbb{N}$.

Solução:

Se denotamos por $b_n = \dfrac{1}{n^p a_n}$, temos que

$$\lim \frac{b_{n+1}}{b_n} = \lim \frac{n^p a_n}{(n+1)^p a_{n+1}} = \lim \frac{1}{\frac{a_{n+1}}{a_n}} > 1$$

Pelo teste da razão, podemos concluir que a série é divergente.

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, cujas derivadas satisfazem $|f^{(k)}(x)| \leq C$, para todo $x \in (-R, R)$ e todo $k \geq 0$. Mostre que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

para todo $x \in (-R, R)$.

Solução:

Pela expansão de Taylor temos

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k \; + \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\, x^{n+1}$$

para algum $\theta \in (-x, x)$. Por hipótese temos que, para $x \in (-R, R)$

$$\left| \frac{f^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\, x^{n+1} \right| \leq C\, \frac{R^{n+1}}{(n+1)!} \;\to\; 0, \quad \text{quando } n \to \infty,$$

pois, pelo teste da razão, a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{R^n}{n!}$$

é convergente.

5) Seja $(f_n)_{n \geq 1}$ uma sequência de funções contínuas, definidas no intervalo $[0, 1]$, e satisfazendo $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x \in [0, 1]$ e todo $n \geq 1$. Para cada n defina $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

Mostre que a sequência $(F_n)_{n \geq 1}$ possui subsequência convergente.
Solução: De fato,

- A Sequência $\{F_n\}$ é uniformemente limitada.

  Com efeito, para todo $x \in [0, 1]$

$$|F_n(x)| \leq \int_0^x |f_n(t)|\, dt \leq Mx \leq M.$$

- A Sequência $\{F_n\}$ é equicontínua.

  Com efeito, para todo $x, y \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} |F_n(x) - F_n(y)| &= \left| \int_0^x f_n(t)\,dt - \int_0^y f_n(t)\,dt \right| \\ &= \left| \int_y^x f_n(t)\,dt \right| \leq \int_y^x |f_n(t)|\,dt \\ &\leq M|x-y|. \end{aligned}$$

  Portanto $\{F_n\}$ é uma sequência equicontínua e uniformemente limitado e, pelo Teorema de Ascoli-Arzelá, admite uma subsequência $\{F_{n_k}\}$ convergente.