UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ

Processo Seletivo do Programa de Pós-Graduação em Matemática para o Nível de Mestrado

Edital Pgmat/ufc N. 02/2022

1) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua e de classe C^1 em (a, b). Suponha que $f'(x) \geq 0$, para todo $x \in (a, b)$ e com igualdade somente em um ponto $c \in (a, b)$. Mostre que

(i) f é crescente;

(ii) f possui inversa f^{-1} derivável no conjunto $(f(a), f(b)) - \{f(c)\}$ com

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}, \text{ onde } y = f(x) \neq f(c);$$

(iii) f^{-1} não é derivável em $f(c)$.

2) Seja $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}$ satisfazendo

$$\begin{cases} (x^2 + f(x)^2)f'(x) = 1 \\ f(1) = 1. \end{cases}$$

Mostre que $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ existe e é menor que $1 + \pi/4$.

3) Seja $(a_n)_{n\geq 1}$ uma sequência numérica tal que $a_n > 0$, para todo $n \geq 1$, e $\lim\,(a_{n+1}/a_n) < 1$. Mostre que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p\, a_n}$$

é divergente para todo $p \in \mathbb{N}$.

4) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞, cujas derivadas satisfazem $|f^{(k)}(x)| \leq C$, para todo $x \in (-R, R)$ e todo $k \geq 0$. Mostre que

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k$$

para todo $x \in (-R, R)$.

5) Seja $(f_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de funções contínuas, definidas no intervalo $[0, 1]$, e satisfazendo $|f_n(x)| \leq M$, para todo $x \in [0, 1]$ e todo $n \geq 1$. Para cada n defina $F_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ por

$$F_n(x) = \int_0^x f_n(t)dt.$$

Mostre que a sequência $(F_n)_{n\geq 1}$ possui subsequência convergente.