UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

20 de Junho de 2022

Candidato: ____

Número de inscrição: ______________________________________

Questão 1. *Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos limitados de $\mathbb{Z}$ é enumerável. (Obs: um conjunto $S \subset \mathbb{Z}$ é dito limitado se existe $M > 0$ tal que $|s| \leq M$ para todo $s \in S$.)*

Demonstração. Os subconjuntos limitados do $\mathbb{Z}$ são de fato os subconjuntos finitos de $\mathbb{Z}$. Se pegar $A_k := \{S \subset \mathbb{Z} \mid |S| = k\}$ a seguinte aplicação é injetora

$$A_k \to \mathbb{Z}^k, \qquad \{i_1, \dots, i_k\} \to (i_1, \dots, i_k)$$

Isso mostra que A_k é enumeravel. Por isso a união dos $A_k's$ é um conjunto enumeravel e isso é o conjunto que nos interessa. □

Questão 2. *Considere as sequências $(p_n)_{n\geq 1}$ e $(q_n)_{n\geq 1}$ definidas recursivamente da seguinte maneira:*

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 1, \quad p_n = q_{n-1} + 2p_{n-1}, \quad q_n = p_{n-1} + q_{n-1}.$$

Mostre que a sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 1}$ é convergente e determine o limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$.

Demonstração. Note que

$$x_n := \frac{p_n}{q_n} = \frac{q_{n-1} + 2p_{n-1}}{p_{n-1} + q_{n-1}} = 2 - \frac{q_{n-1}}{p_{n-1} + q_{n-1}} = 2 - \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} + 1} = 2 - \frac{1}{x_{n-1} + 1}.$$

com $x_1 = 1$.

Por indução segue que a sequencia x_n é crescente e $x_n > 0$ para todo n. De fato

$$x_{n-2} < x_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{1 + x_{n-2}} > \frac{1}{1 + x_{n-1}} \Rightarrow 2 - \frac{1}{1 + x_{n-2}} < 2 - \frac{1}{1 + x_{n-1}}$$

ou seja $x_{n-1} < x_n$. Consequentemente existe $L := \lim_{n\to\infty} x_n$ e de fato $L \leq 2$ da relação $x_n = 2 - \frac{1}{1+x_{n-1}}$. Claramente L deve satisfazer $L \geq 0$ e

$$L = 2 - \frac{1}{1 + L}$$

ou seja $L^2 - L - 1 = 0$. So tem uma soluç ao não negativa que é $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. □

Questão 3. *Sejam $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e $K \subset \mathbb{R}$ um compacto. Mostre que uma função $f\colon I \to K$ é contínua se, e somente se, para toda sequência $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$ $\mathrm{Graf}(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : b = f(a)\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ tem-se que $(x, y) \in \mathrm{Graf}(f)$.*

Demonstração. Assuma que f é contínua. Seja $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Graf(f) = \{(a, b) \in X \times K; b = f(a)\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$. Como X e K são fechados, temos que $x \in X$ e $y \in K$. Além disso, temos que $y_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Pela continuidade, $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \lim\limits_{n\to+\infty} f(x_n) = f(x)$. Logo, $(x, y) \in Graf(f)$.

Reciprocamente, assuma que para toda $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset Graf(f) = \{(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; b = f(a)\}$ tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ e $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ tem-se que $(x, y) \in Graf(f)$. Suponha que f não seja contínua em algum $x \in X$. Daí, existem $\varepsilon > 0$ e uma sequência $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset$

X tais que $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ e $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, seja $y_n = f(x_n)$. Como $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset K$ e K é compacto, tomando subquência, se necessário, podemos assumir que $\lim_{n\to+\infty} y_n = y \in K$. Assim, $\lim_{n\to+\infty} |f(x_n) - y| = 0$. Pela hipótese, $y = f(x)$ e isso dá uma contradição com a desigualdade $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, f é contínua em todo $x \in X$. □

Questão 4. *Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{16}$. Quantas raízes f possui no intervalo $[0, 1]$?*

Demonstração. Note que $f(x) = x^2(1 - x)^2 - \frac{1}{16}$. Como $x, 1 - x \geq 0$, pelo $MG \leq MA$ tem-se $x(1 - x) \leq \left(\frac{x+(1-x)}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$, ou seja $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [0, 1]$, com igualdade somente quando $x = 1 - x$ (na desigualdade das medias). Ou seja temos so uma raiz $x = \frac{1}{2}$. □

Questão 5. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função C^1 tal que para todo ponto $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \neq 0$. Suponha que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, tem-se que $f^{-1}(K)$ também um compacto. Mostre que f é bijeção e sua inversa é uma função C^1.*

Demonstração. Como f é conttínua, a imagem de f, digamos I, é um intervalo. Como $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, trocando f por $-f$, se necessário, pelo Teorema do Valor Intermediário, podemos assumir que $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Pelo Teorema do Valor médio, f é estritamente crescente e, em particular, injetiva. Assim, temos que $I = (a, b) = (\lim_{x\to-\infty} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x))$. Mas sabemos que para todo compacto $K \subset \mathbb{R}$, tem-se que $f^{-1}(K)$ também é um compacto. Logo, $I = \mathbb{R}$, o que implica em f ser sobrejeção. De fato, se $a > -\infty$, então $K = [a, a + 1]$ é um compacto e por hipótese, $f^{-1}(K) = (-\infty, f^{-1}(a + 1)]$ também é um compacto, o que é uma contradição. Assim, $a = -\infty$. Analogamente, se mostra que $b = +\infty$. Portanto, f é uma bijeção. Logo, existe $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Como $f'(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, pelo Teorema da Função Inversa, $g = f^{-1}$ é derivável (e, em particular, contínua) e $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Uma vez que f' é contínua, obtemos que g' também é contínua e, assim, f^{-1} é uma função C^1. □

Questão 6. *Sejam $I = (-a, a)$ com $a > 0$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função C^2 tal que $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$. Mostre que se $|f''(x)| \leq 1$ para todo $x \in I$, então $|f(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ para todo $x \in I$.*

Primeira demonstração. Lembre to Teorema de Cauchy de valor medio. Se f e g são funcções derivaveis em um intervalo $[c, d]$ tal que $g'(x) \neq 0$ para $x \in (c, d)$ então existe $\xi \in (c, d)$ tal que

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Aplique esse Teorema para $g := \frac{x^2}{2}$ para um intervalo $[0, c]$ com $c \in (0, a)$ e f a função dada. Segue que

$$\left|\frac{f(c)}{c^2/2}\right| \leq \frac{|f'(\xi)|}{\xi} = \left|\frac{f'(\xi) - f'(0)}{\xi - 0}\right| \leq |f''(\xi')|$$

onde $\xi' \in (0, \xi)$ e a ultima desigualdade é consequencia do Teorema de Valor Medio. Como $|f''(\xi')| \leq 1$ temos que $|f(c)| \leq \frac{c^2}{2}$ para todo $c > 0$

Claramente o mesmo método funciona também para $c < 0$. □

Segunda demonstração. Pelo Teorema do Valor Médio, para todo $t \in I$, existe θ_t entre 0 e t tal que $|f'(t)| = |f'(t) - f'(0)| = |f''(\theta_t)| \cdot |t| \leq |t|$. Integrando cada lado da desigualdade de 0 a $x \in I$ e usando a desigualdade $|\int_0^x f'(t)dt| \leq \left|\int_0^x |f'(t)|dt\right|$, obtemos

$$|f(x)| = |f(x) - f(0)| = \left|\int_0^x f'(t)dt\right| \leq \left|\int_0^x |f'(t)|dt\right| \leq \left|\int_0^x |t|dt\right| = \frac{1}{2}x^2.$$

□

Questão 7. *Seja $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função não negativa que é integrável a Riemann. Mostre que se $\int_a^b f(x)dx = 0$, então $\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ tem medida nula.*

Demonstração. Desde que a função f é não negativa basta mostrar que $F := \{x \in [a,b] : f(x) > 0\}$ tem medida nula. Suponha que $\mu(F) > 0$.

Seja D o conjunto de pontos de discontinuidade de f. Pelo Teorema de Lebesgue $\mu(D) = 0$. Então

$$\mu(F \setminus D) > 0$$

Isso vale, porque se supor que $\mu(F \setminus D) = 0$ segue do fato que $F = F \cap D \cup F \setminus D$ e do fato que $0 \leq \mu(F \cap D) \leq \mu(D) = 0$ que $\mu(F) = 0$.

Concluimos que existe um ponto de continuidade $x \in F$ tal que $x \in (a,b)$. Como $f(x) > 0$ seque que existem $\epsilon > 0$ e $\delta > 0$ tal que $f(y) > \epsilon$ para todo $y \in (x-\delta, x+\delta) \subset (a,b)$. Com isso, uutilizando de novo que f é não negativa segue que

$$\int_a^b f(y)\ dy \geq \int_{x-\delta}^{x+\delta} f(y)\ dy > 2\epsilon\delta > 0$$

Contradição. □

Questão 8. *Dada $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, defina a sequência de funções $(f_n)_{n\geq 0}$ do seguinte modo*

$$f_0 = f, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\ dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mostre que $(f_n)_{n\geq 0}$ converge uniformemente para a função identicamente nula.

Demonstração. Como f é continua e $[0,1]$ é compacto existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ $\forall x \in [0,1]$. Então

$$|f_1(x)| \leq \int_0^x M\ dt = Mx, \quad \forall x \in [0,1]$$

e

$$|f_2(x)| \leq \int_0^x Mt\ dt = M\frac{x^2}{2}, \quad x \in [0,1]$$

e por indução

$$|f_n(x)| \leq M\frac{x^n}{n!}, \quad x \in [0,1]$$

Claramente, $M\frac{x^n}{n!}$ converge uniformemente para a função nula. Isso implica que f_n converge uniformemente para a função nula. □