UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado (Gabarito)

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

20 de junho de 2022

Candidato: ____

Questão 1. Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *topologicamente homogêneo* quando, dados $a, b \in X$ quaisquer, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(a) = b$. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{R}^n$ e a esfera $\mathbb{S}^n$ são topologicamente homogêneos. Por outro lado, o intervalo fechado $[0, 1]$ não é topologicamente homogêneo.

Prova:

(1) O espaço $\mathbb{R}^n$ é topologicamente homogêneo.
Dados $a, b \in \mathbb{R}^n$, basta considerar a translação $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, definida por $h(x) = x + (b - a)$. Tem-se que h é um homeomorfismo tal que $h(a) = b$.

(2) A esfera $\mathbb{S}^n$ é topologicamente homogênea.
Dados $a, b \in \mathbb{S}^n$, fixe $N \in \mathbb{S}^n - \{a, b\}$ e considere a projeção estereográfica $\pi : \mathbb{S}^n - \{N\} \to \mathbb{R}^n$. Seja $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ a translação tal que $T(\pi(a)) = \pi(b)$. Defina $h : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ por $h(N) = N$ e $h(x) = (\pi^{-1} \circ T \circ \pi)(x)$ para $x \in \mathbb{S}^n - \{N\}$. Note que h é um homeomorfismo tal que $h(a) = b$.

(3) O intervalo fechado $[0, 1]$ não é topologicamente homogêneo.
Basta ver, por exemplo, que não existe homeomorfismo $h : [0, 1] \to [0, 1]$ tal que $h(0) = 1/2$. Caso contrário, a restrição de h ao intervalo $(0, 1]$ definiria um homeomorfismo do conjunto conexo $(0, 1]$ sobre o conjunto desconexo $[0, 1/2) \cup (1/2, 1]$.

$\square$

Questão 2. Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $a \in U$, e $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Admita que $g'(b) = 0$.

(a) Para f Lipschitziana, mostre que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = 0$.

(b) Dê exemplo de uma função contínua f tal que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ não é diferenciável no ponto a.

Prova:

(a) Temos que $|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$, com $k > 0$ constante. Sendo $g'(b) = 0$, temos que $g(b+w) - g(b) + \rho(w)|w|$, onde $\lim_{w \to 0} \rho(w) = 0$. Escrevendo $w = f(a+v) - f(a)$, obtemos

$$(g \circ f)(a+v) - (g \circ f)(a) = g(b+w) - g(b) = \rho(w)|w| = \sigma(v)|v|,$$

onde $\sigma(v) = \rho(w)\frac{|w|}{|v|}$. Note que $\frac{|w|}{|v|} = \frac{|f(a+v)-f(a)|}{|v|} \leq k$ e $\lim_{v \to 0} \rho(w) = 0$, logo $\lim_{v \to 0} \sigma(v) = 0$. Isso mostra que $(g \circ f)'(a) = 0$.

(b) Considere $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dadas por $f(x) = \sqrt{|x|}$ e $g(x) = x^2$. Note que $g'(0) = 0$, mas $(g \circ f)(x) = |x|$ não é diferenciável em 0.

$\square$

Questão 3. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq M$ para todo x pertencente ao bloco A. Considere o conjunto $C(f) = \{(x,y) \in A \times [0,M];\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mostre que

$$\underline{\int}_A f(x)dx = \underline{\int}_{A\times[0,M]} \chi_{C(f)}(x)dx.$$

Prova:

Seja P uma partição do bloco A. Dado $B \in P$, seja $m_B(f) = \inf\{f(x); x \in B\}$. Note que $P' = \{0, M\} \cup \{m_B; B \in P\}$ é uma partição de $[0,M]$ e, portanto, $P \times P'$ é uma partição de $A \times [0,M]$. Considere $m_{B\times B'}(\chi) = \inf\{\chi_{C(f)}(x); x \in B \times B'\}$, para $B \times B' \in P \times P'$. Temos que

$$s(\chi_{C(f)}; P \times P') = \sum_{B\times B' \in P\times P'} m_{B\times B'}\mathrm{vol}(B \times B') = \sum_{B\in P} m_B \mathrm{vol}(B) = s(f;P).$$

Portanto,

$$\underline{\int}_A f(x)dx = \sup_P s(f;P) = \sup_{P\times P'} s(\chi_{C(f)}; P \times P') = \underline{\int}_{A\times[0,M]} \chi_{C(f)}(x)dx.$$

$\square$

Questão 4. Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Suponha que existam constantes $0 < \beta < \lambda$ tais que

$$\beta\,|x-y| \leq |f(x)-f(y)| \leq \lambda\,|x-y|.$$

Mostre que Ω e $f(\Omega)$ são homeomorfos.

Prova:

Pela desigualdade $|f(x)-f(y)| \leq \lambda\,|x-y|$, f é contínua. A desigualdade $|f(x)-f(y)| \geq \beta\,|x-y|$ diz que f é injetiva, logo $f : \Omega \to f(\Omega)$ é bijetiva, e que

$$|f^{-1}(u) - f^{-1}(v)| \leq \frac{1}{\beta}\,|u-v|.$$

Logo, f^{-1} é contínua e Ω é homeomorfo a $f(\Omega)$.

$\square$

Questão 5. Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}^n$ duas funções de classe C^2 definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V \subset U$ um domínio limitado com fronteira ∂V regular.

(a) Aplicando o Teorema da Divergência ao campo de vetores $\vec{F} = u\nabla v$, obtenha a fórmula de Green

$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma,$$

onde η é o vetor normal exterior ao bordo ∂V.

(b) Usando $u = v$, conclua que uma função harmônica [1] que se anula no bordo ∂V é identicamente nula em V.

Prova:

(a) Note que $\operatorname{div}\vec{F} = \operatorname{div}(u\nabla v) = u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v$ e que $\langle F, \eta\rangle = \langle u\nabla v, \eta\rangle = u\frac{\partial v}{\partial \eta}$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\, dx = \int_V \operatorname{div}\vec{F} dx = \int_{\partial V} \langle F, \eta\rangle d\sigma = \int_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial \eta} d\sigma.$$

(b) Fazendo $u = v$ em (a), obtemos

$$\int_V \left(u\Delta u + |\nabla u|^2\right) dx = \int_{\partial V} u \frac{\partial u}{\partial \eta} d\sigma.$$

Se u é harmônica e se anula em ∂V, então

$$\int_V |\nabla u|^2 dx = 0.$$

Assim, $\nabla u = 0$, donde u é constante e, portanto, $u = 0$.

$\square$

[1] Dizemos que u é harmônica se $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$