UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Mestrado

PGMAT - **Mestrado em Matemática**

20 de Junho de 2022

Candidato: ____

Número de inscrição: ____________________________________

Questão 1. *Mostre que o conjunto de todos os subconjuntos limitados de* $\mathbb{Z}$ *é enumerável. (Obs: um conjunto* $S \subset \mathbb{Z}$ *é dito limitado se existe* $M > 0$ *tal que* $|s| \leq M$ *para todo* $s \in S$*.)*

Questão 2. *Considere as sequências* $(p_n)_{n\geq 1}$ *e* $(q_n)_{n\geq 1}$ *definidas recursivamente da seguinte maneira:*

$$p_1 = 1, \quad q_1 = 1, \quad p_n = q_{n-1} + 2p_{n-1}, \quad q_n = p_{n-1} + q_{n-1}.$$

Mostre que a sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\geq 1}$ *é convergente e determine o limite* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n}$*.*

Questão 3. *Sejam* $I \subset \mathbb{R}$ *um intervalo e* $K \subset \mathbb{R}$ *um compacto. Mostre que uma função* $f\colon I \to K$ *é contínua se, e somente se, para toda sequência* $\{(x_n, y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathrm{Graf}(f) = \{(a,b) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} : b = f(a)\}$ *tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = x$ *e* $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = y$ *tem-se que* $(x,y) \in \mathrm{Graf}(f)$*.*

Questão 4. *Considere a função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*,* $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{16}$*. Quantas raízes* f *possui no intervalo* $[0,1]$*?*

Questão 5. *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função* C^1 *tal que para todo ponto* $x \in \mathbb{R}$*,* $f'(x) \neq 0$*. Suponha que para todo compacto* $K \subset \mathbb{R}$*, tem-se que* $f^{-1}(K)$ *também um compacto. Mostre que* f *é bijeção e sua inversa é uma função* C^1*.*

Questão 6. *Sejam* $I = (-a, a)$ *com* $a > 0$ *e* $f\colon I \to \mathbb{R}$ *uma função* C^2 *tal que* $f(0) = 0$ *e* $f'(0) = 0$*. Mostre que se* $|f''(x)| \leq 1$ *para todo* $x \in I$*, então* $|f(x)| \leq \frac{1}{2}x^2$ *para todo* $x \in I$*.*

Questão 7. *Seja* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função não negativa que é integrável a Riemann. Mostre que se* $\int_a^b f(x)dx = 0$*, então* $\{x \in [a,b] : f(x) \neq 0\}$ *tem medida nula.*

Questão 8. *Dada* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, defina a sequência de funções* $(f_n)_{n\geq 0}$ *do seguinte modo*

$$f_0 = f, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\ dt,\ n = 0, 1, 2, \ldots$$

Mostre que $(f_n)_{n\geq 0}$ *converge uniformemente para a função identicamente nula.*