UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Exame de Seleção de Doutorado

PGMAT - **Doutorado em Matemática**

20 de junho de 2022

Candidato: ____

Questão 1. (2,0 pontos) Um conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ chama-se *topologicamente homogêneo* quando, dados $a, b \in X$ quaisquer, existe um homeomorfismo $h : X \to X$ tal que $h(a) = b$. Prove que, para todo $n \in \mathbb{N}$, o espaço $\mathbb{R}^n$ e a esfera $\mathbb{S}^n$ são topologicamente homogêneos. Por outro lado, o intervalo fechado $[0, 1]$ não é topologicamente homogêneo.

Questão 2. (2,0 pontos) Sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$ definida no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$, com $a \in U$, e $g : V \to \mathbb{R}^p$ diferenciável no aberto $V \subset \mathbb{R}^n$, com $f(U) \subset V$ e $b = f(a)$. Admita que $g'(b) = 0$.

(a) Para f Lipschitziana, mostre que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ é diferenciável no ponto a, com $(g \circ f)'(a) = 0$.

(b) Dê exemplo de uma função contínua f tal que $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ não é diferenciável no ponto a.

Questão 3. (2,0 pontos) Seja $f : A \to \mathbb{R}$ tal que $0 \leq f(x) \leq M$ para todo x pertencente ao bloco A. Considere o conjunto $C(f) = \{(x, y) \in A \times [0, M];\ 0 \leq y \leq f(x)\}$. Mostre que

$$\underline{\int}_A f(x)dx = \underline{\int}_{A\times[0,M]} \chi_{C(f)}(x)dx.$$

Questão 4. (2,0 pontos) Seja $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$, onde $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Suponha que existam constantes $0 < \beta < \lambda$ tais que

$$\beta\,|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq \lambda\,|x - y|.$$

Mostre que Ω e $f(\Omega)$ são homeomorfos.

Questão 5. (2,0 pontos) Sejam $u, v : U \to \mathbb{R}^n$ duas funções de classe C^2 definidas num aberto $U \subset \mathbb{R}^n$. Seja $V \subset U$ um domínio limitado com fronteira ∂V regular.

(a) Aplicando o Teorema da Divergência ao campo de vetores $\vec{F} = u\nabla v$, obtenha a fórmula de Green

$$\int_V (u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v)\,dx = \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial \eta}d\sigma,$$

onde η é o vetor normal exterior ao bordo ∂V.

(b) Usando $u = v$, conclua que uma função harmônica [1] que se anula no bordo ∂V é identicamente nula em V.

[1] Dizemos que u é harmônica se $\Delta u = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$