UNIVERSIDADE FEDERAL DO CEARÁ
CENTRO DE CIÊNCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Prova de Seleção para PGMAT/UFC – Doutorado – 2022.1

Questão 1. Dê um exemplo de um difeomorfismo local $f : \mathbb{R} \to S^1$. Prove que não existe $h : S^1 \to \mathbb{R}$ contínua e injetiva.

Questão 2. Dados U aberto convexo e $f : U \to \mathbb{R}^n$ diferenciável, considere as seguintes afirmações:

(a) $\|f'(x)\| < c$ para todo $x \in U$.

(b) $\|f(x) - f(y)\| \leq c\|x - y\|$.

(c) f é uniformemente contínua.

Prove que (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c). As implicações (c) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a) são verdadeiras? Justifique.

Questão 3. Seja $n > 2$, e sejam $f : U \to \mathbb{R}^n$, $U \subset \mathbb{R}^n$ aberto, e $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2$ ambas de classe C^1, tais que $\varphi \circ f(U) \subset \mathbb{R} \times \{0\}$. Dado $a \in U$ e $b = f(a)$, prove que a dimensão do núcleo de $\varphi'(b)$ é maior que $n - 2$ ou $\det f'(a) = 0$.

Questão 4. Seja $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{R}$ dada por $f(x, y, z) = x$, onde $\mathbb{S}^2$ é a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$. Calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} f$.

Questão 5. Seja $\omega : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{A}_2(\mathbb{R}^3)$ a 2–forma diferencial dada por

$$\omega = z\,dx \wedge dy + y\,dx \wedge dz + x\,dy \wedge dz.$$

Restrinja ω à esfera unitária e calcule $\displaystyle\int_{\mathbb{S}^2} \omega$.